$E_1 \circ E_d$ 型的距离正则图

高锁刚* 游宏

(哈尔滨工业大学数学系, 哈尔滨 150001. * 现地址: 河北师范大学数学系, 石家庄 050016. Email: sggaio@public.sj.he.cn)

摘要 考虑 $E_1 \circ E_d$ 型的距离正则图, 给出了这种图的几种等价表示, 推广了紧距离正则图的特征定理.

关键词 紧距离正则图 $E_1 \circ E_d$ 型的距离正则图 本原幂等元 余弦序列

设 G 是直径为 d 的连通图. 记 $\tilde{A}_i(u) = \{v \in X \mid \partial(u, v) = i\}$, 这里 X 是图 G 的顶点集, 而 $\partial(u, v)$ 表示 u, v 两点间的距离. 图 G 称为距离正则的^[1], 如果参数 $c_i = c_i(u, v) = |\tilde{A}_{i-1}(u) \cap \tilde{A}_1(v)|$, $a_i = a_i(u, v) = |\tilde{A}_i(u) \cap \tilde{A}_1(v)|$ 和 $b_i = b_i(u, v) = |\tilde{A}_{i+1}(u) \cap \tilde{A}_1(v)|$ 仅依赖于 $i = \partial(u, v)$ 而与 u, v 这两点的选取无关. 注意, $c_i + a_i + b_i = k$, 其中 $k := k_1 = b_0, c_0 := 0$ 和 $b_d := 0$. 设 $A_0, A_1, \dots, A_d$ 是距离正则图 G 的距离矩阵. 又设 q 是 G (即 A_1) 的一个特征值, E 是与其对应的本原幂等元, m 是 E 的重数, 那么^[2]存在 $s_0, s_1, \dots, s_d \in \mathbb{R}$, 使得

$$E = |X|^{-1} m \sum_{i=0}^d s_i A_i. \quad (1)$$

称 $s_0, s_1, \dots, s_d$ 为 G 的与 E (或 q) 对应的余弦序列^[3,4].

以下总设 G 是直径 $d \geq 3$ 的距离正则图. Jurišić 等人¹⁾证明了

$$\left(q_1 + \frac{k}{a_1 + 1}\right) \left(q_d + \frac{k}{a_1 + 1}\right) \geq \frac{-ka_1 b_1}{(a_1 + 1)^2},$$

定义了 G 是紧距离正则图, 如果 G 不是二分图且前面的等式成立. 他们还证明了紧距离正则图的如下特征定理:

定理¹⁾ 设 G 是直径 $d \geq 3$ 的非二分距离正则图, 其特征值为 $q_0 > q_1 > \dots > q_d$. 令 q 和 q' 是 G 的特征值, 相应的余弦序列分别是 $s_0, s_1, \dots, s_d$ 和 $r_0, r_1, \dots, r_d$. 设 $e \in \mathbb{R}$, 那么下列论述等价:

(i) G 是紧距离正则图, q, q' 是 q_1, q_d 的一个置换, 且 $e = \frac{sr-1}{r-s}$.

(ii) $q \neq q_0, q' \neq q_0$ 且

$$s_i r_i - s_{i-1} r_{i-1} = e(s_{i-1} r_i - s_i r_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq d. \quad (2)$$

Pascasio^[4]讨论了紧距离正则图和本原幂等元的关系, 证明了(2)式成立当且仅当 $E \circ F$ 是 G 的某个本原幂等元的纯量倍数, 其中 E, F 是分别与 $s_0, s_1, \dots, s_d$ 和 $r_0, r_1, \dots, r_d$ 相对应的本原幂等元. 因此上面的(i), (ii)可叙述为:

(i') G 是紧距离正则图, E, F 是 E_1, E_d 的一个置换.

(ii') E, F 是 E_1, E_d 的一个置换, 且 $E \circ F = aH$, $a \in \mathbb{R}$, H 是 G 的本原幂等元.

1) Jurišić A, Koolen J, Terwilliger P. Tight distance regular graphs

<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/csb2000-45-17-1816>

本文定义了一类 $E_1 \circ E_d$ 型的距离正则图, 给出了这种图的几种等价表示, 推广了紧距离正则图的特征定理.

1 主要结果

定义 1 设 G 是直径 $d \geq 3$ 的非二分距离正则图, 特征值为 $q_0 > q_1 > \cdots > q_d$. 又设 E_1, E_d 是分别与 q_1, q_d 相对应的本原幂等元. 称 G 是 $E_1 \circ E_d$ 型的距离正则图, 如果 $E_1 \circ E_d$ 至多是 G 的两个本原幂等元的线性组合, 其中 “ $\circ$ ” 是 Hadamard 乘积.

定理 1 设 G 为直径 $d \geq 3$ 的非二分距离正则图, 其特征值为 $q_0 > q_1 > \cdots > q_d$. 与本原幂等元 E_1, E_d, E_h, E_l 相对应的余弦序列分别是 $s_0, s_1, \cdots, s_d, r_0, r_1, \cdots, r_d, g_0, g_1, \cdots, g_d$ 和 $g'_0, g'_1, \cdots, g'_d$, 那么下列论述等价:

(i) G 是 $E_1 \circ E_d$ 型的距离正则图.

(ii) E, F 是 E_1, E_d 的一个置换, 并且存在至多两个本原幂等元 E_h, E_l , 使得

$$E \circ F = I_1 E_h + I_2 E_l, \quad I_i \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

(iii) E, F 是 E_1, E_d 的一个置换, $s_i r_i = I g_i + (1-I) g'_i, i = 0, 1, \cdots, d, 0 \leq I \leq 1$.

(iv) E, F 是 E_1, E_d 的一个置换, 且

$$s_i r_i - s_{i-1} r_{i-1} = \begin{cases} \frac{e_0}{(1-I)} (s_{i-1} r_i - s_i r_{i-1}) - I(g' - 1)d_i, & \text{若 } E_h = E_0, 0 \leq I < 1, \\ \frac{e_0}{I} (s_{i-1} r_i - s_i r_{i-1}) - (1-I)(g - 1)d_i & \text{若 } E_l = E_0, 0 < I \leq 1, \\ e_1(s_{i-1} r_i - s_i r_{i-1}) - e_2(g_i - g_{i-1}) + e_3(g'_i - g'_{i-1}), & \text{若 } E_h \neq E_0, E_l \neq E_0, 0 < I \leq 1, \end{cases}$$

其中 $1 \leq i \leq d, d_i = \frac{c_1 \cdots c_{i-1}}{b_1 \cdots b_{i-1}} \sum_{h=0}^{i-1} k_h e_0 = (sr-1)/(r-s), e_1 = (I-sr)/I(s-r), e_2 = (1-I)g'/(g-1),$

$e_3 = (1-I)(lg'-sr)/(g'-1).$

注 在定理 1 中当 $E_h \neq E_0$ 时令 $I=1$ 或 $E_h = E_0$ 时令 $\lambda=0$ 即得 Jurišić 等人¹⁾文中的定理 8.3. 我们还计算了一类 $E_1 \circ E_d$ 型距离正则图的参数, 并且在 E, F 是一般的本原幂等元时得到了与上述定理类似的结果, 从而推广了文献[4]中的定理 3.4. 限于篇幅, 将在另文报道这些结果.

例 1 设 G 是半立方体 $\frac{1}{2}H(9, 2)$, 其中 $d=4$, 由 Dickie 文¹⁾知: $E_1 \circ E_4 = |X|^{-1} (q_{1,4}^3 E_3 + q_{1,4}^4 E_4)$, 即 G 是 $E_1 \circ E_4$ 型距离正则图.

2 定理 1 的证明

命题 1^[3] 设 G 是直径 $d \geq 3$ 的距离正则图, 对 G 的余弦序列 $s_0, s_1, \cdots, s_d$ 和 $r_0, r_1, \cdots, r_d$, 有

$$(s-r) \sum_{h=0}^i k_h s_h r_h = \frac{b_1 \cdots b_i}{c_1 \cdots c_i} (s_{i+1} r_i - s_i r_{i+1}), \quad 0 \leq i \leq d,$$

1) Dickie G A. Q-polynomial structures for association schemes and distance-regular graphs. Ph D Thesis, University of Wisconsin, 1995

其中 s_{d+1} 和 r_{d+1} 是未定元.

证 (i) $\Leftrightarrow$ (ii) 由 $E_1 \circ E_d$ 型距离正则图定义, 及 Krein 参数条件.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) 设 $E \circ F = I_1 E_h + I_2 E_l$, $I_i \geq 0, i=1, 2$. 由(1)式易得

$$|X|^{-1} m_s m_r \sum_{i=0}^d s_i r_i A_i = I_1 m_g \sum_{i=0}^d g_i A_i + I_2 m_{g'} \sum_{i=0}^d g'_i A_i.$$

注意 $\{A_0, A_1, \dots, A_d\}$ 是 M (Bose-Mesner 代数) 的一个基, 化简上式即得(iii). 反之由(iii)成立易推得(ii)成立.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) 只就 $E_h \neq E_0, E_l \neq E_0$ 的情形证明, 其他情形可类似地证. 设(iii)成立. 若 E_h, E_l 都是非平凡的本原幂等元, 则 $g_1 \neq 1, g'_1 \neq 1$. 由命题 1 得

$$\begin{aligned} s_i r_i - s_{i-1} r_{i-1} &= I(g_i - g_{i-1}) + (1-I)(g'_i - g'_{i-1}) \\ &= I(g-1) \frac{c_1 \cdots c_{i-1}}{b_1 \cdots b_{i-1}} \sum_{h=0}^{i-1} k_h g_h + (1-I)(g'_i - g'_{i-1}) \\ &= \frac{-c_1 \cdots c_{i-1}}{b_1 \cdots b_{i-1}} \sum_{h=0}^{i-1} k_h s_h r_h + (1-I) \frac{c_1 \cdots c_{i-1}}{b_1 \cdots b_{i-1}} \sum_{h=0}^{i-1} k_h g'_h \\ &\quad + [sr - (1-I)g'] \frac{c_1 \cdots c_{i-1}}{b_1 \cdots b_{i-1}} \sum_{h=0}^{i-1} k_h g_h + (1-I)(g'_i - g'_{i-1}) \\ &= e_1(s_{i-1} r_i - s_i r_{i-1}) - e_2(g_i - g_{i-1}) + e_3(g'_i - g'_{i-1}). \end{aligned}$$

反过来, 设(iv)成立. 当 $i=1$ 时, 易证(iii)成立. 利用数学归纳法得

$$\begin{aligned} s_i r_i &= s_{i-1} r_{i-1} + e_1(s_{i-1} r_i - s_i r_{i-1}) - e_2(g_i - g_{i-1}) + e_3(g'_i - g'_{i-1}) \\ &= I g_{i-1} + (1-I) g'_{i-1} + e_1(r-s) \frac{c_1 \cdots c_{i-1}}{b_1 \cdots b_{i-1}} \sum_{h=0}^{i-1} k_h s_h r_h - e_2(g_i - g_{i-1}) + e_3(g'_i - g'_{i-1}) \\ &= I g_{i-1} + (1-I) g'_{i-1} + e_1(r-s) \frac{c_1 \cdots c_{i-1}}{b_1 \cdots b_{i-1}} \sum_{h=0}^{i-1} k_h [I g_h + (1-I) g'_h] \\ &\quad - e_2(g_i - g_{i-1}) + e_3(g'_i - g'_{i-1}) \\ &= I g_i + (1-I) g'_i. \end{aligned}$$

致谢 本工作为国家自然科学基金资助项目(批准号: 19871018).

参 考 文 献

- 1 Bannai E, Ito T. Algebraic Combinatorics I: Association Schemes. Menlo Park: Benjamin/Cummings, 1984
- 2 Brouwer A E, Cohen A M, Neumaier A. Distance-Regular Graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989
- 3 Godsil C D. Algebraic Combinatorics. New York: Chapman and Hall, 1993
- 4 Pascasio A A. Tight graphs and their primitive idempotents. J Algebraic Combinatorics, 1999, 10: 47-59

(2000-01-14 收稿)

<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/csb2000-45-17-1816>