有限元法在数值天气预报中的应用

孙敬猷 王申林

(山东大学数学系)

沈长泗 陈士杰

(山东省气象台)

有限元法在结构力学、弹性力学等方面应用很多^[1,2]。最近二、三年,也有人从理论上探讨有限元法在数值天气预报中应用的可能性^[3,4]。本文就正压涡度方程讨论了有限元法在数值天气预报中的应用。所采用的网格剖分由大小矩形网格所组成。这种网格对提高所关心区域的预报精度有明显的成效,而且可以节省计算机的存储量。目前,国外有些国家也有使用这种网格的,不过都是采用有限差分法,而且要分两次(或三次)计算,即先计算粗网格,再计算局部加密网格,这样做就必然要在局部小网格的边界上加上人为的边界条件。现在,用有限元法来处理,就克服了这个困难。从计算的实例看,有限元法在数值天气预报中应用,无论是实践上还是理论上都是一件有意义的工作。特别应该指出,利用有限元法,可以将通常为了克服非线性不稳定性所采用的 Arakawa 格式推广到一般网格的情形,给出了一个简洁而严格的守恒性的证明。由于解决了一般网格下能量守恒格式的设计问题,最终将有可能直接使用测站值进行数值预报。

在我们进行数值计算时,看到了 Jespersen 的工作^[6]。他也发现了 Arakawa 格式就是有限元法的必然结果。但是,他只考虑了等距网格的情形。因此,他的工作是我们的一个特例。

一、有限元方程*

为简便起见,考虑一层正压涡度方程的初边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{\mu^2}{m^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ = J \left(\Phi, \frac{m^2}{f} \Delta \Phi + f \right), (x, y) \in G, \end{cases} \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\partial G} = 0, \quad (2)$$

$$\Phi|_{t=0} = \Phi^0, \quad (3)$$

这里所用符号是通常数值天气预报中所采用的。 G 是长方形预报区域, ∂G 是 G 的边界。

为了求得问题(1),(2)的离散化方程(有限元方程),将问题(1),(2)化为与其等价的变分问题。即在满足边界条件 $u|_{\partial G} = 0$ 的适当光滑的函数类中,求使汎函

$$F(u) = \iint_G \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu^2}{m^2} u^2 - 2uJ \left(\Phi, \frac{m^2}{f} \Delta \Phi + f \right) \right\} dx dy \quad (4)$$

达到极小的函数 $u(x, y)$, 这里 $u = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ 。

按有限元法,将区域 G 剖分为若干矩形单元,并假定 u 在 G 上连续,且在每个单元上为双线性函数。如果矩形单元 $\square_e$ 的四个顶点为 i, j, m, p , 边长分别为 a 和 b (图1),

图 1

本文1975年12月5日收到。

* 山东大学数学系计算数学专业72级部分工农兵学员参加了数值计算工作。山东省气象台张景华同志参加了部分资料整理和绘图工作。

点 i, j, m, p 的坐标分别为 $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_m, y_m), (x_p, y_p)$, 利用变换:

$$\begin{cases} x = x_i + a\xi, \\ y = y_i + b\eta, \end{cases} \quad (5)$$

则上述单元变为 (ξ, η) 平面上以 $(0, 0), (1, 1)$ 为两个对角顶点的单位正方形。不难求出, 在这个单元 $\square_e$ 上的双线性内插函数

$$u(x, y) = (1 - \xi - \eta + \xi\eta)u_i + (\xi - \xi\eta)u_j + \xi\eta u_m + (\eta - \xi\eta)u_p, \quad (6)$$

这里 u_i, u_j, u_m, u_p 分别是函数 $u(x, y)$ 在结点 i, j, m, p 处的值。令

$$\zeta = \frac{m^2}{f} \Delta\Phi + f, \quad (7)$$

在 $\square_e$ 上, 将函数 Φ 与 ζ 也用形如 (6) 式的双线性内插函数表示:

$$\begin{cases} \Phi(x, y) = (1 - \xi - \eta + \xi\eta)\Phi_i + (\xi - \xi\eta)\Phi_j + \xi\eta\Phi_m + (\eta - \xi\eta)\Phi_p, \\ \zeta(x, y) = (1 - \xi - \eta + \xi\eta)\zeta_i + (\xi - \xi\eta)\zeta_j + \xi\eta\zeta_m + (\eta - \xi\eta)\zeta_p, \end{cases} \quad (8)$$

这里带下标的量是对应函数在下标那个结点处的值。由此求得:

$$\begin{aligned} J(\Phi, \zeta) &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{\partial\zeta}{\partial x} \\ &= \frac{1}{ab} [(1 - \eta)(\Phi_i\zeta_j - \Phi_j\zeta_i) + (\eta - \xi)(\Phi_i\zeta_m - \Phi_m\zeta_i) + \xi(\Phi_j\zeta_m - \Phi_m\zeta_j) + \eta(\Phi_m\zeta_p - \Phi_p\zeta_m) + (1 - \eta - \xi)(\Phi_i\zeta_p - \Phi_p\zeta_i) + (\xi - 1)(\Phi_j\zeta_p - \Phi_p\zeta_j)]. \end{aligned} \quad (9)$$

将 (6), (9) 式代入 (4) 式, 计算出积分, 然后按变分原理, 对所有 u_k 求极小, 即可求得结点处 u 的值所满足的代数方程组。这个方程组通常称为有限元方程。

如果 0 点为内结点, 则在用上述方法求得对应于 0 点所求的方程中, 只与以 0 点为公共顶点的四个相邻矩形的九个顶点处 u 的值有关。如结点的编号如图 2 所示, 则对 0 点求得的有限元方程为:

$$\sum_{i=0}^8 K[i]u_i = b[0], \quad (10)$$

图 2

其中系数

$$\begin{cases} K[0] = \frac{b_1}{3a_1} + \frac{a_1}{3b_1} + \frac{b_1}{3a_2} + \frac{a_2}{3b_2} + \frac{b_2}{3a_2} + \frac{a_2}{3b_2} + \frac{b_2}{3a_1} + \frac{a_1}{3b_2} + \frac{1}{9}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4), \\ K[1] = -\frac{b_1}{3a_1} + \frac{a_1}{6b_1} - \frac{b_2}{3a_1} + \frac{a_1}{6b_2} + \frac{1}{18}(T_4 + T_1), \\ K[2] = \frac{b_1}{6a_1} - \frac{a_1}{3b_1} + \frac{b_1}{6a_2} - \frac{a_2}{3b_1} + \frac{1}{18}(T_1 + T_2), \\ K[3] = -\frac{b_1}{3a_2} + \frac{a_2}{6b_1} - \frac{b_2}{3a_2} + \frac{a_2}{6b_2} + \frac{1}{18}(T_2 + T_3), \\ K[4] = \frac{b_2}{6a_2} - \frac{a_2}{3b_2} + \frac{b_2}{6a_1} - \frac{a_1}{3b_2} + \frac{1}{18}(T_3 + T_4), \\ K[5] = -\frac{b_1}{6a_1} - \frac{a_1}{6b_1} + \frac{T_1}{36}, \\ K[6] = -\frac{b_1}{6a_2} - \frac{a_2}{6b_1} + \frac{T_2}{36}, \\ K[7] = -\frac{b_2}{6a_2} - \frac{a_2}{6b_2} + \frac{T_3}{36}, \\ K[8] = -\frac{b_2}{6a_1} - \frac{a_1}{6b_2} + \frac{T_4}{36}, \end{cases} \quad (11)$$

$$T_1 = \frac{\mu^2}{m^2} a_1 b_1, \quad T_2 = \frac{\mu^2}{m^2} a_2 b_1,$$

$$T_3 = \frac{\mu^2}{m^2} a_2 b_2, \quad T_4 = \frac{\mu^2}{m^2} a_1 b_2.$$

方程(10)的右端项

$$b[0] = \frac{1}{12} (G_0^{++} + G_0^{+x} + G_0^{x+}), (12)$$

这里

$$\begin{cases} G_0^{++} = (\Phi_1 - \Phi_3)(\zeta_2 - \zeta_4) \\ \quad - (\Phi_2 - \Phi_4)(\zeta_1 - \zeta_3), \\ G_0^{+x} = \Phi_1(\zeta_5 - \zeta_8) - \Phi_3(\zeta_6 - \zeta_7) \\ \quad - \Phi_2(\zeta_5 - \zeta_6) + \Phi_4(\zeta_8 - \zeta_7), \\ G_0^{x+} = \zeta_2(\Phi_5 - \Phi_6) - \zeta_4(\Phi_8 - \Phi_7) \\ \quad - \zeta_1(\Phi_5 - \Phi_8) + \zeta_3(\Phi_6 - \Phi_7). \end{cases} (13)$$

将方程(10)乘以 $4/[(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)]$, 则不难看出, 在等距网格 ($a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = h$) 时, 上述方程类似 Helmholtz 方程带平均的九点差分格式, 并且右端项正好是 Arakawa 守恒格式^[5].

图3 图中大网距为 h , 小网距为 $h/2$
($h = 540$ 公里)

将预报区域 G 按图3的方式, 剖分为步长为 h 和 $h/2$ 的网格 (h 为 540 公里). 解按上述方法求出的有限元方程, 求出函数 $u = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ 在网格结点处的值. 再用通常所用的三步法, 外推求出 24 小时和 48 小时的预报场 Φ . 时间步长 $\Delta t =$ 半小时. 计算右端项时, 用 Spline 插值求出 $\Delta \Phi$ 在结点处的值, 从而求出 ζ 在结点处的值*. 数值计算的结果表明: 所得到的格式是稳定的, 计算时不需要进行空间平滑, 所得到的 48 小时预报图与实况比较接近. 和有限差分法不同, 用有限元法, 可以得到边界结点的方程, 因此不需要另外添加别的边界条件.

二、Arakawa 守恒格式的推广与能量守恒

定义

$$J_0 = \frac{\sum_{e'} \iint_{\square_{e'}} J(\Phi, \zeta) N_e dx dy}{\sum_{e'} \iint_{\square_{e'}} N_e dx dy}, (14)$$

这里 $\square_{e'}$ 是顶点中含有 0 点的任一单元, 求和号是对所有这样的单元求的. 式中的 N_e 按下法规定: 如果 $\square_{e'}$ 是矩形, 当 0 点在单元 $\square_{e'}$ 中任“ i ”角时, $N_e = N_1 = (1 - \xi - \eta + \xi\eta)$; 当 0 点在单元 $\square_{e'}$ 中任“ j ”角时, $N_e = N_2 = (\xi - \xi\eta)$; 当 0 点在单元 $\square_{e'}$ 中任“ m ”角时, $N_e = N_3 = \xi\eta$; 当 0 点在单元 $\square_{e'}$ 中任“ p ”角时, $N_e = N_4 = \eta - \xi\eta$.

公式(14)是 $J(\Phi, \zeta)$ 的离散化公式. 为方便起见, (14) 式的分母简记为 S_0 . 如果 0 点是图 2 中的内点时, 由 (14) 式不难求出

$$J_0 = \frac{G_0^{++} + G_0^{+x} + G_0^{x+}}{3(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}, (15)$$

这里 G_0^{++} , G_0^{+x} , G_0^{x+} 如公式(13)表示. 并且 $S_0 = \frac{4}{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}$, (15) 式即为 $\frac{b[0]}{S_0}$. 因此, (15) 式和方程(10)的右端(12)式除以 S_0 一致. 很明显, 这个公式就是 Arakawa 守恒格式的推广. 当 $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = h$ 时, (15) 式就是通常常用的 Arakawa 守恒格式:

$$J_0 = \frac{1}{3} (J_0^{++} + J_0^{+x} + J_0^{x+}),$$

这里 $J_0^{++} = \frac{1}{4h^2} G_0^{++}$, $J_0^{+x} = \frac{1}{4h^2} G_0^{+x}$, $J_0^{x+} = \frac{1}{4h^2} G_0^{x+}$. (15) 式是 Arakawa 守恒格式在非均匀矩形网格下的推广, 而(14)式则是 Arakawa 格式在任意网格下的推广.

* 不利用 Spline 插值, 而按公式

$$(\Delta \Phi)_0 = 4 \sum_{i=0}^8 K[i] \Phi_i / [(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)],$$

也可求出 ζ 在结点处的值. 对边界点也可求得类似的公式.

(14) 式也满足三个守恒关系:

$$\sum_0 J_0 S_0 = 0 \text{ (平均涡度守恒)}, \quad (16)$$

$$\sum_0 \Phi_0 J_0 S_0 = 0 \text{ (平均动能守恒)}, \quad (17)$$

$$\sum_0 \zeta_0 J_0 S_0 = 0 \text{ (均方涡度守恒)}, \quad (18)$$

这里 0 取一切结点, 包括边界结点. S_0 是 (14) 式的分母.

事实上, 由于雅可比满足积分形式的平均涡度守恒:

$$\iint_G J(\Phi, \zeta) dx dy = 0,$$

则有

$$\sum_c \iint_{\square_c} J(\Phi, \zeta) dx dy = 0. \quad (19)$$

注意到

$$\sum_{i=1}^4 N_i = 1,$$

所以

$$\iint_{\square_c} J(\Phi, \zeta) dx dy = \sum_{i=1}^4 \iint_{\square_c} J(\Phi, \zeta) N_i dx dy. \quad (20)$$

由 (14) 式得:

$$\sum_0 J_0 S_0 = \sum_0 \sum_{c'} \iint_{\square_{c'}} J(\Phi, \zeta) N_{c'} dx dy,$$

将按结点 0 求和换成按每个单元 $\square_c$ 求和, 则上式可改写为:

$$\sum_0 J_0 S_0 = \sum_c \sum_{i=1}^4 \iint_{\square_c} J(\Phi, \zeta) N_i dx dy.$$

利用 (20), (19) 式得知:

$$\sum_0 J_0 S_0 = 0 \text{ (平均涡度守恒)}.$$

(17), (18) 式的证明完全相同, 只证一个. 例如证明 (17) 式.

由积分形式的平均动能守恒, 得知:

$$\begin{aligned} & \iint_G \Phi J(\Phi, \zeta) dx dy \\ &= \sum_c \iint_{\square_c} \Phi J(\Phi, \zeta) dx dy = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

由 (14) 式得知:

$$\begin{aligned} \sum_0 \Phi_0 J_0 S_0 &= \sum_0 \Phi_0 \sum_{c'} \iint_{\square_{c'}} J(\Phi, \zeta) N_{c'} dx dy \\ &= \sum_0 \sum_{c'} \iint_{\square_{c'}} \Phi_0 J(\Phi, \zeta) N_{c'} dx dy, \end{aligned}$$

这里 $\sum_{c'}$ 是对以 0 点为顶点的所有矩形 $\square_{c'}$ 求和. 将按结点求和换成按每个单元 $\square_c$ 求和, 则不难看出上式即为:

$$\sum_0 \Phi_0 J_0 S_0 = \sum_c \sum_{i=1}^4 \iint_{\square_c} \Phi_{ci} J(\Phi, \zeta) N_i dx dy, \quad (22)$$

其中 $\Phi_{ci} (i = 1, 2, 3, 4)$ 代表 Φ 在单元 $\square_c$ 的四个顶点 i, j, m, p 处的值: $\Phi_{c1} = \Phi_i, \Phi_{c2} = \Phi_j, \Phi_{c3} = \Phi_m, \Phi_{c4} = \Phi_p$. 显然, 由双线性内插公式 (8), 在 $\square_c$ 上

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \Phi_{ci} N_i &= \Phi_i N_1 + \Phi_j N_2 + \Phi_m N_3 \\ &+ \Phi_p N_4 = \Phi. \end{aligned}$$

将上式代入 (22) 式, 并注意到 (21) 式, 则得:

$$\sum_0 \Phi_0 J_0 S_0 = \sum_c \iint_{\square_c} \Phi J(\Phi, \zeta) dx dy = 0.$$

(17) 式得证. 类似地可证 (18) 式.

因此, 由 (14) 式定义的 J_0 满足关系 (16) — (18) 式. 用差分法不可能得到这样的推广, 并且用有限元法证明这三个守恒关系, 即使是用差分法可以证明的等距网格情形, 也比 Arakawa 的证明简单、自然、严密.

参 考 资 料

- [1] 冯 康, 数学的实践与认识, 1974, 4; 1975, 1—2.
- [2] 齐基威茨, 结构和连续力学中的有限单元体法, 国防工业出版社, 1973.
- [3] Cullen, M. J. P., *J. Inst. Maths. Applies*, 11 (1973), 15—31.
- [4] Cullen, M. J. P., *J. Inst. Maths. Applies*, 13 (1974), 233—247.
- [5] Arakawa, A., *J. Computational Phys.*, 1 (1966), 119—143.
- [6] Jespersen, D. C., *J. Computational Phys.*, 16 (1974), 383—390.