有重叠的自相似集的 Hausdorff 维数

邓起荣^①, John HARDING^②, 胡天佑^③

① 福建师范大学数学系, 福州 350007

② Department of Mathematical Sciences, New Mexico State University, Las Cruces, NM 88003, USA

③ Department of Mathematics, University of Wisconsin-Green Bay, Green Bay, WI 54311, USA

E-mail: dengfractal@126.com, jharding@nmsu.edu, hut@uwgb.edu

收稿日期: 2007-11-22; 接受日期: 2007-12-27

摘要 对于一类满足一定条件的相似压缩迭代函数系生成的不变集, 本文证明了一个计算其 Hausdorff 维数的简单公式. 该公式是通过把满足所给条件的迭代函数系联系到一个非重叠的无穷迭代函数系, 然后利用 Moran 的计算无穷迭代函数系生成的不变集的 Hausdorff 维数的方法得到的. 该方法可以应用于一些不满足 Ngai 和 Wang 引进的有限型条件的迭代函数系.

关键词 Hausdorff 维数 迭代函数系 自相似性

MSC(2000) 主题分类 28A78, 28A80

1 引言

考虑由相似变换 $S_1, \dots, S_m: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 组成的迭代函数系 (简记为 IFS)

$$\|S_i(x) - S_i(y)\| = \rho_i \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d,$$

这里 $0 < \rho_i < 1$ ($i = 1, \dots, m$).

设 K 为该系统的吸引子并记 $\mathcal{H}^s(K)$ 和 $\dim K$ 分别为 K 的 s 维 Hausdorff 测度和 Hausdorff 维数. 当开集条件 (简记为 OSC) 成立时 $\dim K$ 的计算是众所周知的. 没有开集条件时, $\dim K$ 只在一些特定的例子中可以计算^[1-5]. 最近, Ngai 和 Wang 在文献 [6] 中引进了“有限型条件”, 并在此条件下给出了计算 $\dim K$ 的一个公式, 他们的结果包含了许多已有结果作为特例.

对于一类满足一定条件的迭代函数系生成的不变集, 本文给出了另一种计算 $\dim K$ 的方法. 该方法可以应用于一些不满足有限型条件的迭代函数系, 基本思想就是要把有重叠的有限迭代函数系分解为无重叠的无穷迭代函数系, 使得新的无穷迭代函数系生成的不变集与原来的迭代函数系生成的不变集有相同的 Hausdorff 维数, 从而通过利用开集条件计算出 $\dim K$.

把有重叠的有限迭代函数系分解为无重叠的无穷迭代函数系的思想并不是新的. Moran^[7]已经证明任何有重叠的自相似迭代函数系都可以分解为满足开集条件的无穷迭代函数系, 使其不变集与原来的迭代函数系的不变集有相同的维数. 本文的贡献在于通过假定有重叠的迭代函数系满足一定的条件, 确保给出相应的无穷迭代函数系的明确描述, 从而得到一个简单的公式计算原来的有重叠的迭代函数系的不变集的 Hausdorff 维数.

2 预备知识

我们在此简要回顾一些关于有限和无穷迭代函数系的结果, 并引进一些要用到的符号和术语. 对于无穷迭代函数系, 我们采用 Moran^[7] 的叙述方法, 因为不需要他的一般结果, 我们做了一些简化. 关于进一步的细节, 读者也可以参考文献 [8, 9].

紧集 $X \subset \mathbb{R}^d$ 上的无穷迭代函数系是一个可数函数族 $\mathcal{F} = \{f_i : i \in \mathcal{I}\}$, 其中每一个函数 $f_i : X \rightarrow X$ 都是具有压缩比 ρ_i 的相似变换并且存在上界 $\rho < 1$, 使得 $\rho_i < \rho$ 对一切 $i \in \mathcal{I}$ 成立.

对于紧集 X 上的无穷 IFS $\mathcal{F} = \{f_i : i \in \mathcal{I}\}$, 记 $\mathcal{F}^\infty$ 为所有由 $\mathcal{F}$ 中的元素组成的无穷序列 $\{f_{i_k}\}$ 组成的集合, 记

$$K_{\mathcal{F}} = \bigcup \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_n}(X) \mid \{f_{i_k}\} \in \mathcal{F}^\infty \right\},$$

集合 $K_{\mathcal{F}}$ 称为 $\mathcal{F}$ 的不变集或吸引子. 在不引起混淆的情形下, 简记 $K_{\mathcal{F}}$ 为 K .

下述结果在文献 [8] 中可以找到.

命题 1 对于无穷的 IFS $\mathcal{F} = \{f_i : i \in \mathcal{I}\}$, 不变集 $K_{\mathcal{F}}$ 满足条件

$$K_{\mathcal{F}} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} f_i(K_{\mathcal{F}}).$$

对于有限的 IFS 的情形, 众所周知, $K_{\mathcal{F}}$ 是紧集而且是满足上述性质的唯一的紧集.

称紧集 X 上的有限或无穷 IFS $\mathcal{F} = \{f_i : i \in \mathcal{I}\}$ 满足开集条件 (简记为 OSC), 如果存在非空有界开集 $V \subseteq X$, 使得

- (1) $f_i(V) \subseteq V$ 对一切 $i \in \mathcal{I}$,
- (2) $f_i(V) \cap f_j(V) = \emptyset$ 对一切 $i \neq j$.

下述结果在文献 [7] 中可以找到.

命题 2 假定 $\mathcal{F} = \{f_i : i \in \mathcal{I}\}$ 是一个相对紧的无穷 IFS (在紧集上一致收敛的拓扑中) 并满足 OSC, 则

$$\dim K_{\mathcal{F}} = \inf \left\{ t \in \mathbb{R} : \sum_{i \in \mathcal{I}} \rho_i^t \leq 1 \right\},$$

其中 ρ_i 是 f_i 的压缩比.

下一节将列出一个迭代函数系应该满足的条件, 以便我们能够给出一个满足开集条件的无穷迭代函数系, 使其不变集具有与原来的不变集相同的 Hausdorff 维数. 上述公式就给出了一个计算不变集的 Hausdorff 维数的明确公式.

在文献 [7] 中已经证明, 即使无穷迭代函数系满足开集条件, 由它生成的不变集也可能没有正的 Hausdorff 测度, 这与有限迭代函数系的情形是不一样的. 为证明 Hausdorff 测度是正

的, 先证明在我们的假定条件下, 迭代函数系满足文献 [10, 11] 中引进的弱分离条件 (WSC). 由 Zerner^[11] 的定理得知, 不变集有正的 Hausdorff 测度.

3 主要结果

我们总是设 $\{S_i\}_{i=1}^m$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的迭代函数系, 具有压缩比 $\rho_1, \dots, \rho_m$ 并当作一个大的有界闭集 X 上的迭代函数系. 进一步, k 是一个满足 $1 \leq k < m$ 的整数, 令 $\Sigma_1 = \{1, \dots, k\}$, $\Sigma_2 = \{k+1, \dots, m\}$ 和 $\Sigma = \{1, \dots, m\}$.

对任意的 $A \subseteq \Sigma$, 令 A^* 为 A 中元素组成的有限序列之集, 长度为 0 的序列记为 $\emptyset$. 对于 Σ^* 中的序列 $I = i_1 \cdots i_n$ 和 $J = j_1 \cdots j_r$, 定义

$$IJ = i_1 \cdots i_n j_1 \cdots j_r;$$

$$S_I = S_{i_1} \circ S_{i_2} \cdots \circ S_{i_n};$$

$$\rho_I = \rho_{i_1} \rho_{i_2} \cdots \rho_{i_n}.$$

注意, S_I 是一个压缩变换且 ρ_I 是它的压缩比. 如果 $I = \emptyset$ 是空序列, 令 $S_\emptyset$ 为恒等变换和 $\rho_\emptyset = 1$.

下述关于 $\{S_i\}_{i=1}^m$ 的假定在本节中恒成立.

假定 $\mathcal{H}$ 设 V 是一个 X 的非空开子集, 使得

- (1) $\{S_i\}_{i=1}^k$ 和 $\{S_i\}_{i=k+1}^m$ 分别关于 V 满足 OSC.
- (2) 对每一个 $i \in \Sigma_1$, 存在某个 $j \in \Sigma_2$ 使得 $S_i(V) \cap S_j(V) \neq \emptyset$.
- (3) 对每一对满足 $S_i(V) \cap S_j(V) \neq \emptyset$ 的 $i \in \Sigma_1$ 和 $j \in \Sigma_2$, 存在 $n_{ij} \in \Sigma_2$ 和 $I_{ij} \in \Sigma_2^*$, 使得
 - a) $S_i(V) \cap S_j(V) \subseteq S_i \circ S_{n_{ij}}(V)$,
 - b) $S_i \circ S_{n_{ij}} = S_j \circ S_{I_{ij}}$.

为方便起见, 引进下列记号. 对于 IFS $\{S_i\}_{i=1}^m$ 和每一个 $i \in \Sigma_1$, 记

- 1) $B_i = \{j \in \Sigma_2 : S_i(V) \cap S_j(V) \neq \emptyset\}$.
- 2) $C_i = \{n_{ij} : j \in B_i\}$.
- 3) $D_i = \Sigma_2 \setminus C_i$.
- 4) $\mathcal{F}_1 = \{S_i : i \in \Sigma_1\}$.
- 5) $\mathcal{F}_2 = \{S_i : i \in \Sigma_2\}$.
- 6) $\mathcal{F}_3 = \{S_I \circ S_i \circ S_j : I \in \Sigma_1^*, i \in \Sigma_1, j \in D_i\}$.

令 K 为 IFS $\{S_i\}_{i=1}^m$ 的吸引子, K_1, K_2 和 K_3 分别是 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ 和 $\mathcal{F}_3$ 的吸引子.

下述的引理 3 和 5 是把有重叠的 IFS 分解为无重叠的无穷 IFS 的关键. 基本的步骤是重复利用假定 $\mathcal{H}$ 中的 (3), 把 $S_I \circ S_j$ (这里 $I \in \Sigma^*, j \in \Sigma_2$) 替换为 $\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ 中的函数的复合, 并证明 IFS $\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ 满足 OSC.

引理 3 上述的 IFS $\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ 关于 V 满足开集条件.

证明 上述假定 $\mathcal{H}$ 中的 (1) 表明 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 分别关于 V 满足开集条件, 所以 $S_i(V) \subseteq V$ 对一切 $i \in \Sigma$ 成立, 从而 $f(V) \subseteq V$ 对一切 $f \in \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ 成立. 因此, 只需证明, 对于不同的 $f, g \in \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$, 有 $f(V) \cap g(V) = \emptyset$ 成立. 分几种情形讨论.

情形 1. $f, g \in \mathcal{F}_2$.

由 $\mathcal{F}_2$ 关于 V 满足开集条件立即可证.

情形 2. $f \in \mathcal{F}_2, g \in \mathcal{F}_3$.

设 $g = S_I \circ S_i \circ S_l$, 其中 $I \in \Sigma_1^*, i \in \Sigma_1$ 且 $l \in D_i$. 对 I 的长度用数学归纳法证明 $f(V) \cap g(V) = \emptyset$. 如果 I 的长度是 0, 则 $g = S_i \circ S_l$. 因 $f \in \mathcal{F}_2$, 存在某个 $j \in \Sigma_2$, 使得 $f = S_j$. 由于 $g(V) \subseteq S_i(V)$, 如果 $S_i(V) \cap S_j(V) = \emptyset$, 则结论显然成立. 设这个交非空, 考虑由假定 $\mathcal{H}$ 中的 (3) 给定的 n_{ij} . 因为 $l \in D_i$, D_i 的定义表明 $l \neq n_{ij}$, 而 n_{ij} 和 l 属于 Σ_2 , 且 $\mathcal{F}_2$ 满足 OSC, 所以 $S_{n_{ij}}(V) \cap S_l(V) = \emptyset$. 所以, 由假定 $\mathcal{H}$ 中的 (3) 得知

$$\begin{aligned} f(V) \cap g(V) &= S_j(V) \cap S_i \circ S_l(V) \\ &= S_j(V) \cap S_i(V) \cap S_i \circ S_l(V) \\ &\subseteq S_i \circ S_{n_{ij}}(V) \cap S_i \circ S_l(V) \\ &= S_i(S_{n_{ij}}(V) \cap S_l(V)) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

设 I 的长度大于 0, 记 r 为 I 的第 1 个字母, J 为剩下的序列, 则 $g = S_r \circ S_J \circ S_i \circ S_l$. 因为 $g(V) \subseteq S_r(V)$, 如果 $S_r(V) \cap S_j(V) = \emptyset$, 则结论显然成立. 我们假定这个交非空并考虑 n_{rj} . 类似于上面的计算可得

$$f(V) \cap g(V) \subseteq S_r(S_{n_{rj}}(V) \cap S_J \circ S_i \circ S_l(V)).$$

由归纳假设得知 $S_{n_{rj}}(V) \cap S_J \circ S_i \circ S_l(V) = \emptyset$, 结论得证.

情形 3. $f, g \in \mathcal{F}_3$.

因 $f \in \mathcal{F}_3$, 存在序列 $J = j_1 \cdots j_s \in \Sigma_1^*, j_{s+1} \in \Sigma_1$ 和 $r \in D_{j_{s+1}}$, 使得 $f = S_J \circ S_{j_{s+1}} \circ S_r$, 即 $f = S_{j_1 \cdots j_{s+1}} \circ S_r$. 类似地, 存在 $i_1, \dots, i_{n+1} \in \Sigma_1$ 和 $l \in D_{i_{n+1}}$, 使得 $g = S_{i_1 \cdots i_{n+1}} \circ S_l$. 故可以假设 $s+1 \leq n+1$. 因为 $f(V) \cap g(V) \subseteq S_{j_1}(V) \cap S_{i_1}(V)$, $\mathcal{F}_1$ 满足 OSC. 结论显然成立, 除非 $j_1 = i_1$. 设 $j_1 = i_1$, 则

$$f(V) \cap g(V) = S_{j_1}(S_{j_2 \cdots j_{s+1}} \circ S_r(V) \cap S_{i_2 \cdots i_{n+1}} \circ S_l(V)).$$

剩下的任务就是证明 $S_{j_2 \cdots j_{s+1}} \circ S_r(V) \cap S_{i_2 \cdots i_{n+1}} \circ S_l(V) = \emptyset$. 重复上述论证去掉 $j_2, \dots, j_{s+1}$. 如果 $s+1 = n+1$, 则只要证 $S_r(V) \cap S_l(V) = \emptyset$, 而它由 $\mathcal{F}_2$ 满足 OSC 和 $r \neq l$ (f 和 g 不同) 可得. 如果 $s+1 < n+1$, 则只要证 $S_r(V) \cap S_{i_{s+2} \cdots i_n} \circ S_{i_{n+1}} \circ S_l(V) = \emptyset$, 这由情形 2 可得. 证毕.

推论 4 设 $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s \in \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3, r \leq s$ 且

$$f_1 \circ \cdots \circ f_r(V) \cap g_1 \circ \cdots \circ g_s(V) \neq \emptyset,$$

则当 $i = 1, \dots, r$ 时 $f_i = g_i$ 而且 $g_1 \circ \cdots \circ g_s(V) \subseteq f_1 \circ \cdots \circ f_r(V)$.

证明 这是开集条件的简单推理.

引理 5 对任意的 $I \in \Sigma^*$ 和 $j \in \Sigma_2$, 存在 $f_1, \dots, f_l \in \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$, 使得 $S_I \circ S_j = f_1 \circ \cdots \circ f_l$.

证明 因为 Ij 的最后一个符号属于 Σ_2 , 可以把 Ij 分成若干段, 使得每一段都是 Σ_1 中的符号 (若干个或空) 后面跟一个 Σ_2 中的符号. 设 $J = i_1 \cdots i_p k$ 是其中的一段, 这里 $i_1, \dots, i_p \in \Sigma_1$ 且 $k \in \Sigma_2$. 我们对 p 用数学归纳法证明 S_J 是 $\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ 中映射的复合. 如果 $p = 0$, 显然. 设 $p > 0$. 如果 $k \in D_{i_p}$, 则由定义得 $S_J \in \mathcal{F}_3$. 否则的话 $k \in C_{i_p}$, 所以存在某个 $j \in B_{i_p}$, 使得 $k = n_{i_p j}$. 利用 $I_{i_p j} \in \Sigma_2^*$ (由假定 $\mathcal{H}$ 中的 (3)) 有 $S_{i_p} \circ S_k = S_{i_p} \circ S_{n_{i_p j}} = S_j \circ S_{I_{i_p j}}$. 所

以 $S_J = S_{i_1 \dots i_{p-1}j} \circ S_{I_{ipj}}$. 根据归纳假设, $S_{i_1 \dots i_{p-1}j}$ 等于 $\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ 中的映射的复合, 而由定义, $S_{I_{ipj}}$ 也等于 $\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ 中的映射的复合. 证毕.

对于 IFS $\{S_i\}_{i=1}^m$ 和 $b > 0$, 记 $\rho_* = \min\{\rho_i : 1 \leq i \leq m\}$. 设

$$(1) \mathcal{I}_b = \{I \in \Sigma^* : \rho_I \leq b < \rho_I \rho_*^{-1}\},$$

$$(2) \mathcal{A}_b = \{S_I : I \in \mathcal{I}_b\}.$$

要了解下述定义的细节可以参考文献 [10, 11].

定义 6 称 IFS $\{S_i\}_{i=1}^m$ 满足弱分离条件 (WSC), 如果存在 $x_0 \in \mathbb{R}^d$ 和 $\gamma > 0$, 使得对任意的 $0 < b < 1$, $J \in \Sigma^*$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$, 有

$$\#\{S_I \in \mathcal{A}_b : S_I(S_J(x_0)) \in B_b(x)\} \leq \gamma,$$

其中 $B_b(x)$ 是中心为 x 半径为 b 的球.

定理 7 上述 IFS $\{S_i\}_{i=1}^m$ 满足 WSC.

证明 给定 $x_0 \in V$ 和 $l \in \Sigma_2$. 对任意的 $x \in \mathbb{R}^d$, $J \in \Sigma^*$ 和 $0 < b < 1$, 如果 $S_I \in \mathcal{A}_b$ 且 $S_I(S_J(x_0)) \in B_b(x)$, 因为 $S_J(x_0) \in V$ 且 $\rho_I \leq b$, 所以 $S_I(V) \subset B_{b(1+|V|)}(x)$, 从而 $S_I(S_I(S_J(x_0))) \in S_I(V) \subset B_{b(1+|V|)}(x)$, 这里 $|V|$ 是 V 的直径. 所以

$$\{S_I \in \mathcal{A}_b : S_I(S_J(x_0)) \in B_b(x)\} \subseteq \{S_I \in \mathcal{A}_b : S_I(S_I(S_J(x_0))) \in B_{b(1+|V|)}(x)\}.$$

记

$$\{S_I \in \mathcal{A}_b : S_I(S_I(S_J(x_0))) \in B_{b(1+|V|)}(x)\} = \{S_{I_1}, S_{I_2}, \dots, S_{I_q}\}.$$

只需证明存在不依赖于 x , J 及 b 的常数 γ , 使得 $q \leq \gamma$, 就可以证明 WSC. 注意到 $I \in \mathcal{I}_b$ 表明 $b\rho_* < \rho_I$, 即 I 的长度有界, 因此上述集合有限.

对每一个 $i = 1, \dots, q$, 引理 5 给出了 $\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ 中的一族 $f_1^i, \dots, f_{n_i}^i$, 使得 $S_{I_i} \circ S_l = f_1^i \circ \dots \circ f_{n_i}^i$. 为方便起见, 记 $\Psi_i = f_1^i \circ \dots \circ f_{n_i}^i$, 注意该映射的压缩比是 $\rho_{I_i} \rho_l$. 因为 $S_{I_i} \in \mathcal{A}_b$, 我们有 $\rho_{I_i} \leq b < \rho_{I_i} \rho_*^{-1}$, 所以 Ψ_i 的压缩比小于 b . 因为 $\Psi_i(S_J(x_0)) = S_{I_i}(S_l \circ S_J(x_0)) \in B_{b(1+|V|)}(x)$, 所以 $\Psi_i(V) \cap B_{b(1+|V|)}(x) \neq \emptyset$ (因 $S_J(x_0) \in V$), 因此 $\Psi_i(V) \subseteq B_{b(1+2|V|)}(x)$.

设 $i, j \leq q$ 且 $I \in \Sigma^*$ 满足 $\Psi_i \circ S_I = \Psi_j$, 则 $\rho_{I_i} \rho_l \rho_I = \rho_{I_j} \rho_l$, 所以 $\rho_I = \rho_{I_j} / \rho_{I_i}$. 但是 $\rho_{I_i} \leq b < \rho_{I_j} \rho_*^{-1}$, 所以 $\rho_* < \rho_I$. 存在有限个序列 $I \in \Sigma^*$ (最多有 $c = \frac{\ln \rho_*}{\ln \max_j \{\rho_j\}}$ 个) 满足条件. 由推论 4 得, 对于任意满足 $\Psi_i(V) \cap \Psi_j(V) \neq \emptyset$ 的 i 和 j , 存在序列 $I \in \Sigma^*$, 使得 $\Psi_i \circ S_I = \Psi_j$ 或 $\Psi_j \circ S_I = \Psi_i$. 所以, 对任意的 $i = 1, \dots, q$ 有

$$\#\{j : \Psi_i(V) \cap \Psi_j(V) \neq \emptyset\} \leq 2c,$$

从而存在元素个数 $s \geq q/2c$ 的集合 $S \subseteq \{1, \dots, q\}$, 使得 $\Psi_i(V) \cap \Psi_j(V) = \emptyset$, $i, j \in S$. 为简单起见, 设这个集合为 $\{1, \dots, s\}$. 因为每一个 Ψ_i 的压缩比大于 $b\rho_*^2$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(B_{b(1+2|V|)}(x)) &\geq \mathcal{L}\left(\bigcup_{i=1}^s \Psi_i(V)\right) \\ &= \sum_{i=1}^s \mathcal{L}(\Psi_i(V)) \\ &\geq \frac{q}{2c} (b\rho_*^2)^d \mathcal{L}(V), \end{aligned}$$

这里 $\mathcal{L}(V)$ 是 V 的 Lebesgue 测度. 所以

$$q \leq \frac{2c\mathcal{L}(B_{b(1+2|V|)}(x))}{(b\rho_*^2)^d \mathcal{L}(V)} = \frac{2c\mathcal{L}(B_{(1+2|V|)}(x))}{\rho_*^{2d} \mathcal{L}(V)}.$$

因为 $\mathcal{L}(B_{(1+2|V|)}(x))$ 只依赖于 V 的直径和空间的维数, 存在常数 γ , 使得 $q \leq \gamma$ 成立. 证毕.

上述定理推广了文献 [12] 的命题 4.4, 而我们的证明更简单.

现在给出本文的主要定理.

定理 8 吸引子 K 的维数 $s = \dim K$ 可用下述方法计算得到.

(i) 如果 $D_i = \emptyset$ 对一切 $i \in \Sigma_1$ 成立, 则 s 是下述方程的唯一解:

$$\sum_{j=k+1}^m \rho_j^s = 1.$$

(ii) 如果至少存在一个 $i \in \Sigma_1$, 使得 $D_i \neq \emptyset$, 则 s 是下述方程的唯一解:

$$\sum_{j=1}^m \rho_j^s - \sum_{i=1}^k \rho_i^s \sum_{j \in C_i} \rho_j^s = 1.$$

不管是情形 (i) 或者情形 (ii), 都有 $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$.

证明 (i) 因 $\mathcal{F}_2$ 满足 OSC, 只需证明 $K = K_2$ 即可, 也即 $K \subseteq K_2$ 即可, 因为反向包含显然成立. 设 $a \in K_2$ 是 S_m 的不动点. 因为 K 是 $\bigcup_{I \in \Sigma^*} S_I(a)$ 的闭包, 故只需证明对一切 $I \in \Sigma^*$ 有 $S_I(a) \in K_2$. 任取 $I \in \Sigma^*$, 由引理 5 得存在 $f_1, \dots, f_l \in \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$, 使得 $S_I \circ S_m = f_1 \circ \dots \circ f_l$. 但是 $D_i = \emptyset$, 对一切 $i \in \Sigma_1$, $\mathcal{F}_3 = \emptyset$, 从而 $f_1, \dots, f_l$ 属于 $\mathcal{F}_2$, $S_I(a) = S_I \circ S_m(a) = f_1 \circ \dots \circ f_l(a) \in K_2$.

(ii) 先证 $\dim K = \max\{\dim K_1, \dim K_{2,3}\}$, 其中 $K_{2,3}$ 是 IFS $\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ 的吸引子. 由于 $K_1, K_{2,3} \subseteq K$, 显然有 $\dim K_1, \dim K_{2,3} \leq \dim K$. 关于另一个不等式, 注意到, 对于任何无穷序列 $\mathbf{i} = i_1 i_2 \dots \in \Sigma^\infty$, 下述的交是一个递减的紧集序列的交, 因而是一个点 $x_{\mathbf{i}}$:

$$x_{\mathbf{i}} = \bigcap_{j=1}^{\infty} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_j}(X).$$

由吸引子的定义, $K = \{x_{\mathbf{i}} : \mathbf{i} \in \Sigma^\infty\}$. 将 K 拆成两块, 第 1 块是 A , 由有无穷多个 $\mathbf{i}$ 中的符号属于 Σ_2 的那种 $\mathbf{i}$ 对应的 $x_{\mathbf{i}}$ 组成; 另外一块是 B , 由只有有限多个 $\mathbf{i}$ 中的符号属于 Σ_2 的那种 $\mathbf{i}$ 对应的 $x_{\mathbf{i}}$ 组成. 这里的两块是否相交不重要, 重要的是它们的并等于 K .

如果 $\mathbf{i}$ 中有无穷多个符号属于 Σ_2 , 它可以分解为无穷多形如 $i_j \dots i_r$ 的段, 使得 $i_r \in \Sigma_2$. 由引理 5, $S_{i_j} \circ \dots \circ S_{i_r}$ 等于 $\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ 中的映射的复合. 由此得 A 包含在 $K_{2,3}$ 中. 如果 $\mathbf{i}$ 中只有有限多个符号属于 Σ_2 , 则 $\mathbf{i} = I\mathbf{j}$, 其中, I 是一个有限序列, $\mathbf{j}$ 是由 Σ_1 中的符号组成的无穷序列, 这时 $x_{\mathbf{i}} = S_I(x_{\mathbf{j}})$ 且 $x_{\mathbf{j}} \in K_1$, 所以 $B \subseteq \bigcup\{S_I(K_1) : I \in \Sigma^*\}$. 因为 Σ^* 可数, B 包含于可数个 Hausdorff 维数等于 $\dim K_1$ 的集合的并. 所以 $\dim K \leq \max\{\dim K_1, \dim K_{2,3}\}$.

现在考虑 $\dim K_{2,3}$. 记

$$q(t) = \sum_{j=k+1}^m \rho_j^t + \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{I \in \Sigma_1^r} \rho_I^t \sum_{i=1}^k \sum_{j \in D_i} \rho_i^t \rho_j^t,$$

记 $q(t)$ 的部分和为

$$q_n(t) = \sum_{j=k+1}^m \rho_j^t + \sum_{r=0}^n \sum_{I \in \Sigma_1^r} \rho_I^t \sum_{i=1}^k \sum_{j \in D_i} \rho_i^t \rho_j^t.$$

在引理 3 中已经证明了 IFS $\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ 满足 OSC, 利用 Arzela-Ascoli 定理容易验证它也是相对紧的, 由命题 2 得 $\dim K_{2,3} = \inf\{t \in \mathbb{R} : q(t) \leq 1\}$.

因为 $q_n(t)$ 是有限和, 它是连续递减函数, 所以存在实数 s_n , 使得 $q_n(s_n) = 1$. 但 s_n 是 $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ 的一个子系统的吸引子的 Hausdorff 维数, 所以 $s_n \leq d$, 其中 d 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^d$ 的维数. 因为 s_n 有界, 可以定义 $s = \sup\{s_n : n \geq 0\}$.

由于 q_n 递减, $q_n(s) \leq q_n(s_n) = 1$, 而且 $q(s)$ 是部分和 $q_n(s)$ 的极限, $q(s) \leq 1$. 注意到 $\sum_{I \in \Sigma_1^r} \rho_I^s = (\sum_{i=1}^k \rho_i^s)^r$, 由 $q(s) \leq 1$ 得 $\sum_{i=1}^k \rho_i^s < 1$. 由于 IFS $\mathcal{F}_1$ 满足 OSC, $\dim K_1$ 是方程 $\sum_{i=1}^k \rho_i^t = 1$ 的唯一解, 所以 $\dim K_1 < s$.

记 I 为开区间 $(\dim K_1, \infty)$, 则 $s \in I$ 且对一切 $t \in I$,

$$q(t) = \sum_{j=k+1}^m \rho_j^t + \left(1 - \sum_{i=1}^k \rho_i^t\right)^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j \in D_i} \rho_i^t \rho_j^t.$$

这说明 $q(t)$ 在 I 中连续. 因为 $s_n \in I$ 当 n 很大时成立, 且 $q(s_n) > q_n(s_n) = 1$, 所以由 s 是 s_n 的极限得 $q(s) \geq 1$, 故 $q(s) = 1$, 从而 $\dim K_{2,3} = s$. 而我们已经证明 $\dim K_1 < s$, 所以 $\dim K = s$.

只剩下证明 s 是条件 (ii) 中的方程的唯一解. 令

$$h(t) = \sum_{j=1}^m \rho_j^t - \sum_{i=1}^k \sum_{j \in C_i} \rho_i^t \rho_j^t,$$

则由

$$q(t) = \sum_{j=k+1}^m \rho_j^t + \left(1 - \sum_{i=1}^k \rho_i^t\right)^{-1} \sum_{i=1}^k \rho_i^t \left(\sum_{j=k+1}^m \rho_j^t - \sum_{j \in C_i} \rho_j^t \right),$$

得

$$\left(1 - \sum_{i=1}^k \rho_i^t\right) q(t) = \sum_{j=k+1}^m \rho_j^t - \sum_{i=1}^k \rho_i^t \sum_{j \in C_i} \rho_j^t.$$

故

$$\left(1 - \sum_{i=1}^k \rho_i^t\right) q(t) = h(t) - 1 + \left(1 - \sum_{i=1}^k \rho_i^t\right).$$

所以 $h(t) = 1$ 当且仅当 $q(t) = 1$, 即 $s = \dim K$ 是条件 (ii) 中的方程的唯一解.

对于进一步的结论 $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$, 定理 7 表明我们的迭代函数系满足 WSC. 由文献 [11] 的一个结果得 $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$. 证毕.

4 例子

在这一节中, 给出几个例子说明定理 8 的应用.

例 9 假定 $0 < p, q < 1$, 设 $K \subset \mathbb{R}$ 是下述 IFS 生成的自相似集:

$$S_1(x) = px + 1, \quad S_2(x) = qx, \quad S_3(x) = px + 1/q.$$

如果 $2p + q - pq < 1$, 则 $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$, 其中 $s = \dim K$ 是方程 $2p^s + q^s - p^s q^s = 1$ 的唯一解, 否则的话, K 是一个区间.

证明 假定 $2p + q - pq < 1$. 只需证明这里的 IFS 满足定理 8 的条件即可, 其中 $\Sigma_1 = \{1\}$, $\Sigma_2 = \{2, 3\}$ 和 $V = (0, b)$, 而 $b = 1/q(1-p)$.

由 $2p + q - pq < 1$ 得 $S_2(b) < S_1(b) < S_3(0) < S_3(b) = b$, 所以 $S_i(V) \subseteq V, i = 1, 2, 3$, 且 $S_2(V) \cap S_3(V) = \emptyset$, 假定 $\mathcal{H}$ 中的第 1 条成立. 另外, 由 $S_2(0) < S_1(0) < S_2(b) < S_1(b)$ 得 $B_1 = \{2\} \neq \emptyset$, 假定 $\mathcal{H}$ 中的第 2 条成立. 注意到 $S_1(V) \cap S_2(V) = (1, pb+1) \cap (0, qb) = (1, qb)$. 由关系式 $pqb+1=qb$ 得 $S_1(V) \cap S_2(V) = S_1S_2(V)$, 经过简单的计算可得 $S_1S_2 = S_2S_3$. 这说明假定 $\mathcal{H}$ 中的最后一条成立, 其中 $n_{12} = 2, I_{12} = 3$.

反之, 设 $2p + q - pq \geq 1$, 则有 $S_1(b) \geq S_3(0)$. 再由 $S_2(b) = qb > 1 = S_1(0)$ 得 $S_2([0, b]) \cup S_1([0, b]) \cup S_3([0, b]) = [0, b]$, 所以 $[0, b]$ 是该迭代函数系的吸引子. 证毕.

注 10 第 3 位作者于 2001 年在香港中文大学的分形几何讨论班中讲解过例 9, 后来 Lau 和 Wang 在文献 [12, 命题 4.4] 中做了进一步的研究. 注意到该例中的 IFS 与著名的 $(0, 1, 3)$ 问题有关 ($p = q = 1/3$). 在此情形下, 吸引子的 Hausdorff 维数 $s = \dim K$ 满足 $3 \cdot 3^{-s} - 3^{-2s} = 1$, 所以 $s \approx 0.87604$.

例 11 设 $0 < r_2, r_4 \leq r_1 \leq 1/4, r_1r_3 = r_2r_4$. 令 K 为 IFS

$$S_1(x) = r_1x + 1, \quad S_2(x) = r_2x + 1 + 3r_1, \quad S_3(x) = r_3x + 3, \quad S_4(x) = r_4x$$

的吸引子, 则 $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$, 其中 $s = \dim K$ 是方程 $r_1^s + r_2^s + r_3^s + r_4^s - r_1^sr_3^s = 1$ 的唯一解.

证明 只需证明迭代函数系满足我们的假定 $\mathcal{H}$ 即可, 其中 $\Sigma_1 = \{1\}, \Sigma_2 = \{2, 3, 4\}, B_1 = \{2\}, n_{12} = 3, I_{12} = 4, V = (0, b), b = 3/(1 - r_3)$.

注意 $3 < b \leq 4$ 以及 b 是 S_3 的不动点, $f_i(V) \subseteq V$ 对一切 $i = 1, 2, 3, 4$ 成立; 由 $S_4(b) < S_2(0) <$

图 1

$S_2(b) < S_3(0)$ 得知 $S_2(V), S_3(V), S_4(V)$ 两两不交, 第 1 条假定成立. 因为 $S_1(V) = (1, 1+r_1b)$ 和 $S_2(V) = (1+3r_1, r_2b+1+3r_1)$, 我们有 $S_1(V) \cap S_2(V) = (1+3r_1, 1+r_1b)$ 和 $S_1(V) \cap S_2(V) = S_1S_3(V)$. 最后, 直接计算可得 $S_1S_3 = S_2S_4$, 所以最后两条假定也成立. 证毕.

例 12 (修改的 Sierpinski 三角形) 设 u 和 v 是 $\mathbb{R}^2$ 中的两个向量. 对任意的 $l, n \in \mathbb{N}$, 设 $(1-r)(1-\frac{1}{2^n}) \geq \frac{1}{2}$, 令 K 是下述 IFS 的吸引子 (如图 1 所示):

$$S_1(x) = \frac{1}{2^l}x + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^l}\right)v, \quad S_2(x) = \frac{1}{2^n}x + (1-r)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)u,$$

$$S_3(x) = \frac{1}{2}x, \quad S_4(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}v, \quad S_5(x) = rx + (1-r)u,$$

则 $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$, 这里 $s = \dim K$ 是方程

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{ls} + \left(\frac{1}{2}\right)^{ns} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^s + r^s - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+1)s} - \left(\frac{1}{2}\right)^{ns} r^s = 1$$

的唯一解.

证明 记 $\Sigma_1 = \{1, 2\}, \Sigma_2 = \{3, 4, 5\}, B_1 = \{3, 4\}, B_2 = \{5\}$ 和 $V = \{pv+qu : p > 0, q > 0, p+q < 1\}$. 则 u 和 v 及原点 0 分别是 S_5 和 S_4 及 S_3 的不动点. 进一步, V 是该 IFS 的不变开

集, $\{S_1, S_2\}$ 和 $\{S_3, S_4, S_5\}$ 关于 V 都满足开集条件. 由 S_i 的定义, 不难验证 $S_1(V) \cap S_3(V) = S_1S_3(V)$ 和 $S_1S_3 = S_3S_4^l$, 即 $n_{13} = 3$ 和 $I_{13} = 44 \cdots 4$ (长为 l); $S_1(V) \cap S_4(V) = S_1S_4(V)$ 和 $S_1S_4 = S_4S_3^l$, 即 $n_{14} = 4$ 和 $I_{14} = 33 \cdots 3$ (长为 l); $S_2(V) \cap S_5(V) = S_2S_5(V)$ 和 $S_2S_5 = S_5S_3^n$, 即 $n_{25} = 5$ 和 $I_{25} = 33 \cdots 3$ (长为 n), 满足我们的假定 $\mathcal{H}$. 注意到 $C_1 = \{3, 4\}$ 和 $C_2 = \{5\}$, 得 $s = \dim K$ 是方程

$$\left(\frac{1}{2^l}\right)^s + \left(\frac{1}{2^n}\right)^s + 2\left(\frac{1}{2}\right)^s + r^s - \left(\frac{1}{2^l}\right)^s \left[\left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s\right] - \left(\frac{1}{2^n}\right)^s r^s = 1$$

的唯一解. 证毕.

例 13 设 $r^l + 2r \leq 1$ 及 $0 < r_i < 1/3, i=3, 4$, 其中 l 是一个正整数. 令 K 为平面上的 IFS (如图 2 所示)

$$\begin{aligned} S_0(x) &= r^l x + \frac{1}{2}(1 - r^l, 1 - r^l), & S_1(x) &= \frac{1}{2}x, & S_2(x) &= rx + (1 - r, 1 - r), \\ S_3(x) &= r_3x + (0, 1 - r_3), & S_4(x) &= r_4x + (1 - r_4, 0) \end{aligned}$$

的吸引子, 则 $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$, 其中 $s = \dim K$ 是方程

$$r^{ls} + \left(\frac{1}{2}\right)^s + r^s + r_3^s + r_4^s - \left(\frac{1}{2}\right)^s r^{ls} = 1$$

的唯一解.

证明 注意到 $A = (0, 0), B = (1, 1), C = (0, 1), D = (1, 0)$ 分别是 S_1, S_2, S_3, S_4 的不动点. 只需验证这里的 IFS 满足我们的假定 $\mathcal{H}$, 其中 $\Sigma_1 = \{0\}, \Sigma_2 = \{1, 2, 3, 4\}, B_0 = \{1\}, n_{01} = 1, I_{01} = 2 \cdots 2$ 的长度是 l , 而 V 是正方形 $\square ABCD$ 的内点集. 详细的计算留给读者.

图 2

在文献 [6] 中, Ngai 和 Wang 引进了所谓的有限型条件并建立了一套计算满足有限型条件的有重叠 IFS 生成的吸引子的 Hausdorff 维数的方法. 它们包括了许多可以计算吸引子的维数的 IFS, 而我们的方法并不包含在他们的范围中.

先回顾一下定义在 $\mathbb{R}$ 上的迭代函数系 $S_0, \dots, S_m$ 满足有限型条件的定义. 设 $r_0, \dots, r_m$ 是这些映射的压缩比, $r = \min r_i$. 对于 $\{0, \dots, m\}$ 中的整数构成的序列 $i = i_1, \dots, i_k$, 记 $r_i = r_{i_1} \cdots r_{i_k}$ 和 $S_i = S_{i_1} \cdots S_{i_k}$. 令 Γ_k 为全部有序组 $s = (r_i, S_i(0), k)$ 构成的集合, 其中 i 使得 $r_i \leq r^k$ 且对 i 的任何真子序列 j 有 $r^k < r_j$. 对于这种有序组 s , 定义映射 S_s 为 $S_s(x) = r_i x + S_i(0)$. 对于开集 V , 定义

$$V(s) = \{t \in \Gamma_k : S_s(V) \cap S_t(V) \neq \emptyset\}.$$

关键的一点是, 对于 $s \in \Gamma_k$ 和 $t \in \Gamma_n$, 我们定义 $V(s) \equiv V(t)$, 如果存在 $\tau(x) = r^{n-k}x + b$, 使得 $S_t = \tau \circ S_s$ 且 $\{S_{t'} : t' \in V(t)\} = \{\tau \circ S_{s'} : s' \in V(s)\}$. 称这个 IFS 满足有限型条件, 如果存在有界非空开集 V , 使得 $S_i(V) \subseteq V (i = 0, \dots, m)$, 而且在关于 V 的等价关系 “ $\equiv$ ” 下只有有限个等价类.

如果一个 IFS 满足有限型条件, 易证存在有理数 $t_1, \dots, t_m$, 使得 $r_j = r_0^{t_j}, j = 1, \dots, m$. 所以, 上述例子不满足有限型条件. 另一方面, 满足有限型条件的 IFS 也不一定满足我们的假定 $\mathcal{H}$. 例如 $\mathbb{R}$ 上的 IFS: $S_1(x) = x/2 + 1/7, S_2(x) = x/4$ 和 $S_3(x) = x/8 + 7/8$.

致谢 感谢 N. Nguyen 在准备本文的过程中提出的有益建议. 作者也感谢审稿人提出的建议, 这使得本文更易阅读.

参考文献

- 1 Edgar G A. A fractal puzzle. *Math Intelligence*, **13**: 44–50 (1991)
- 2 Lalley S P. β -expansions with deleted digits for Pisot numbers. *Trans Amer Math Soc*, **349**: 4355–4365 (1997)
- 3 Rao H, Wen Z Y. A class of self-similar fractals with overlap structure. *Adv in Appl Math*, **20**: 50–72 (1998)
- 4 Strichartz R S, Wang Y. Geometry of self-affine tiles I. *Indiana Univ Math J*, **48**: 1–23 (1999)
- 5 Veerman J J P, Stosic B D. On the dimensions of certain incommensurably constructed sets. *Experiment Math*, **9**: 413–423 (2000)
- 6 Ngai S M, Wang Y. Hausdorff dimension of overlapping self-similar sets. *J London Math Soc*, **63**(2): 655–672 (2001)
- 7 Moran M. Hausdorff measure of infinitely generated self-similar sets. *Monatsh Math*, **122**: 387–399 (1996)
- 8 Mauldin R, Urbanski M. Dimension and measures in infinite function systems. *Proc London Math Soc*, **73**: 105–154 (1996)
- 9 Falconer K J. The Geometry of Fractal Sets. Cambridge: Cambridge University Press, 1985
- 10 Lau K, Ngai S M. Multifractal measure and a weak separation condition. *Adv Math*, **141**: 45–96 (1999)
- 11 Zerner M. Weak separation properties for self-similar sets. *Proc Amer Math Soc*, **124**: 3529–3539 (1996)
- 12 Lau K, Wang X Y. Iterated function system with a weak separation condition. *Studia Math*, **161**: 249–268 (2004)