Can a Hodge cycle be written as a sum of algebraic cycles?

Hodge猜想

付保华

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

E-mail: bhfu@math.ac.cn

2016-12-15收稿, 2017-02-16修回, 2017-02-21接受, 2017-04-20网络版发表

摘要 作为七大千禧问题之一, Hodge猜想旨在建立光滑射影代数簇的拓扑与其代数簇之间的一个联系. 这个猜想自1950年提出以来, 几乎没有大的突破. 本文简要介绍了这个猜想以及一些代数几何中与之相关的结果与猜测.

关键词 Hodge猜想, 代数闭链, 周群

19世纪末20世纪初, 拓扑学家们发展了同调理论与上同调理论来研究某些数学对象的拓扑. 特别地, 对于任何一个紧定向微分流形 M , 由此可以得到一个分次的上同调环 $H^*(M, \mathbb{Z})$. 这个环具有很好的函子性质、Poincaré对偶性质以及Künneth公式. 后来De Rham发现可以用 M 上的微分形式来很好地解释复系数的上同调环 $H^*(M, \mathbb{C}) \simeq H^*(M, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$.

M 上的一个微分 p -形式是指在局部坐标上具有如下形式的表达式:

$$\sum_{i_1, \dots, i_p} f_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

其中 $f_{i_1, \dots, i_p}$ 是复值可微函数. 我们记 Ω_M^p 为可以黏合成 M 上的整体微分 p -形式的集合. 微分算子自然地给出一个映射

$$\begin{aligned} d^p : \Omega_M^p &\rightarrow \Omega_M^{p+1} \\ d^p \left(\sum_{i_1, \dots, i_p} f_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right) \\ &= \sum_j \sum_{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \end{aligned}$$

容易验证 $d^p \circ d^{p-1} = 0$. De Rham的工作证明了 $H^p(M, \mathbb{C}) = \frac{\text{Ker } d^p}{\text{Im } d^{p-1}}$, 因此复系数上同调环里面的元素都可以用一些闭的微分形式来表示.

如果 X 是一个复流形(即局部上同构于 $\mathbb{C}^n$ 中的开集), 则在其局部复坐标 $(z_1, \dots, z_n)$ 下, 每个微分形式可以写成如下的表达式:

$$\sum_{i_k \in I, j_l \in J} g_{I,J} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

我们称这样的微分形式为 X 上的 (p, q) -形式. 我们记 $H^{p,q}(X)$ 为 $H^{p+q}(X, \mathbb{C})$ 中所有可以用 (p, q) -形式来表示的同调类构成的子空间.

Hodge的奠基性工作^[1]证明了: 如果 X 具有一个与复结构相容的Riemann度量(即 X 为一个Kähler流形), 则有如下的Hodge分解:

$$H^k(X, \mathbb{C}) = H^{k,0}(X) \oplus H^{k-1,1}(X) \oplus \dots \oplus H^{0,k}(X). \quad (1)$$

这是一个深刻的定理, 其证明依赖于紧流形上椭圆微分算子的性质. 这个定理对于之后数学的发展有着深远的影响.

下面我们考虑一类特殊的Kähler流形: 光滑射影复代数簇. 复射影空间 $\mathbb{CP}^N$ 参数化 $\mathbb{C}^{N+1}$ 中

引用格式: 付保华. Hodge猜想. 科学通报, 2017, 62: 1346–1349

Fu B H. Hodge conjecture (in Chinese). Chin Sci Bull, 2017, 62: 1346–1349, doi: 10.1360/N972015-01397

所有过原点的复直线. 这是一个复流形, 其上的Fubini-Study度量使其成为一个Kähler流形. 容易看到 $\mathbb{CP}^N = \mathbb{C}^N \cup \mathbb{C}^{N-1} \dots \mathbb{C}^1 \cup \mathbb{C}^0$, 由此可以得到 $\mathbb{CP}^N$ 的上同调环同构于 $\mathbb{Z}[h]/h^{N+1}$, 并且 $H^{p,q}(\mathbb{CP}^N) \simeq \mathbb{C}$ 当且仅当 $p = q \leq N$. 如果复流形 X 可以嵌入到 $\mathbb{CP}^N$ 中作为解析子集, 则根据Zhou^[2]的定理, X 是 $\mathbb{CP}^N$ 上的一些齐次多项式的零点集, 我们称这样的复流形为光滑射影复代数簇. 这是复代数几何中研究的主要对象. $\mathbb{CP}^N$ 上的Fubini-Study度量自然地诱导出 X 上的一个Kähler度量, 因此 $H^*(X, \mathbb{C})$ 上具有Hodge分解(见公式(1)).

研究代数簇的一个自然的想法是考察其上的子代数簇. 对于一个光滑射影复代数簇 $X \subset \mathbb{CP}^N$, 我们记 $\mathcal{A}^p(X)$ 为 X 中所有余维数为 p 的(可能奇异的)不可约射影代数子簇所生成的自由阿贝尔群. 我们称 $\mathcal{A}^p(X)$ 中的元素为 X 上的余 p -维的代数链, 它们都可以写成如下的形式和 $\sum_j n_j [Z_j]$, 其中 $n_j \in \mathbb{Z}$, $Z_j \subset X$ 为 X 中的余 p -维的不可约闭代数子簇. 每个代数链的基本类给出了同调群 $H_{2n-2p}(X, \mathbb{Z})$ 中的一个元素, 而后者通过Poincaré对偶确定了 $H^{2p}(X, \mathbb{Z})$ 中的一个元素, 由此我们得到一个群同态:

$$\text{cl}^p : \mathcal{A}^p(X) \rightarrow H^{2p}(X, \mathbb{Z}).$$

我们记 cl^p 的像集为 $H^{2p}(X, \mathbb{Z})_{\text{alg}}$ 并称其中的元素为代数类. 这些类都是从代数的方法构造出来的, 而Hodge问的问题是如何从分析的角度来刻画这些代数类. 由于每个代数子簇在一般点上是一个光滑复子流形, 其基本类对应的复系数的上同调中的元素是 (p, p) -形成的, 所以

$$H^{2p}(X, \mathbb{Z})_{\text{alg}} \subseteq j^{-1}(H^{p,p}(X)),$$

这里 $j : H^{2p}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2p}(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_k H^{k, 2p-k}(X)$ 为自然映射. Hodge在其ICM的报告中^[3]问是不是这个必要条件就足以刻画出代数类, 即 $H^{2p}(X, \mathbb{Z})_{\text{alg}}$ 是不是等于 $j^{-1}(H^{p,p}(X))$?

Atiyah与Hirzebruch在1962年的文章^[4]中构造了 $H^{2p}(X, \mathbb{Z})$ 中的一些不在 $H^{2p}(X, \mathbb{Z})_{\text{alg}}$ 中的挠元(这样的元素自动地被 j 映为0), 由此否定了整系数的Hodge问题. 那么是不是除了挠元之外, 整系数的Hodge问题有可能是对的呢? Kollár在1990年^[5]给出了该问题的一个反例($\mathbb{CP}^4$ 中的一些高次数的光滑超曲面). 进而人们考虑有理系数的情况. 我们记

$$\text{Hdg}^p(X) = H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{(p,p)}(X),$$

并称其中的元素为Hodge类. 由前述讨论我们知道 $H^{2p}(X, \mathbb{Q})_{\text{alg}} \subseteq \text{Hdg}^p(X)$. Hodge的问题最后演变为Hodge猜想: 每个Hodge类都可以由代数链来表示, 即 $H^{2p}(X, \mathbb{Q})_{\text{alg}} = \text{Hdg}^p(X)$.

Hodge始终称此为问题, 而定性为猜想是后人添加的. 迄今为止, 仍然没有决定性的证据说明该论断一定是对的. 但是构造反例可能与证明一样难. 正如Beauville在其文章^[6]中写道: 现阶段唯一合理的赌注是我们距离该问题的解决或否定还很遥远.

如Hodge^[3]所述, 他的工作以及问题是受到Lefschetz的工作的启发. Lefschetz之前证明了的整系数Hodge猜想在 $p = 1$ 的情况下是对的. 由此可以得到Hodge猜想对于 $\dim X \leq 3$ 都是对的. 然而对于高维情况我们只有零星结果(比如对于某些阿贝尔簇以及某些超曲面), 甚至对于两个曲面乘积的情况都完全不清楚(而Hodge猜想如果有反例的话, 很可能在曲面乘积的情况下就存在). Hodge猜想的难点在于我们只有很少的办法来构造代数闭链(本质上只有取某些凝聚层的陈类), 从而导致很难判断一个Hodge类是不是代数的. 迄今为止支持Hodge猜想的一个深刻证据是由Cattani-Deligne-Kaplan^[7]证明的如下结果: 如果 $X \rightarrow B$ 为一族光滑射影代数簇, 则纤维 X_b 的拓扑是不变的, 但是 $H^*(X_b, \mathbb{C})$ 的Hodge分解是随着 b 而变化的. 文献[7]证明了对于 X_{b_0} 上的任意固定Hodge类 β , 则所有 $b \in B$ 使得 β 在 X_b 上仍然是Hodge类的点所构成的集合是 B 中的一个代数子集. 该结果是Hodge猜想的推论, 而文献[7]避开了Hodge猜想来证明了该结论, 从而为Hodge猜想提供了一些证据.

Hodge猜想在紧Kähler流形的范畴有个自然的推广. Voisin^[8]给出了一个反例说明Hodge猜想对于一般紧Kähler流形是错的. 因此在Hodge猜想中, 射影簇的条件是非常关键的.

Hodge猜想是关于复代数簇的. Grothendieck^[9]在1968年对任何域上的代数簇提出了一系列的标准猜想. 这些猜想的证明将说明(motive)母题构成一个阿贝尔范畴, 由此可以证明Weil猜想(该猜想后来被Deligne用别的方法证明). 在复数域上, 这些标准猜想是要么已知的要么是由Hodge猜想所蕴含的. 然而即使在复数域上, 标准猜想仍然没有太大的进展.

相对于Hodge猜想,更多的人倾向于相信标准猜想是对的.

Hodge猜想刻画出了映射 cl^p 的像.而映射 cl^p 的核对于代数几何更加重要.由于 $\mathcal{A}^p(X)$ 太大了,我们需要取某些等价类,其中一种比较好的等价关系是有理等价. X 的余 p -维的周群 $\mathrm{CH}^p(X)$ 定义为 $\mathcal{A}^p(X)$ 模掉有理等价关系.可以证明映射 cl^p 在有理等价下是不变的,从而诱导出映射(仍然记为 cl^p) $\mathrm{CH}^p(X) \rightarrow H^{2p}(X, \mathbb{Z})$.由Mumford的例子^[10]我们知道,周群 $\mathrm{CH}^p(X)$ 可以非常大(可以不是有限维,甚至

不能被任何代数簇所参数化),因此 $\mathrm{Ker}(\mathrm{cl}^p)$ 可以非常大.非常出人意料的是, Bloch-Beilinson猜想^[11]存在一个具有很好的函子性质的滤链

$$\begin{aligned}\mathrm{CH}_{\mathbb{Q}}^p(X) &= F^0\mathrm{CH}^p(X) \supset F^1\mathrm{CH}^p(X) \\ &\supset \cdots \supset F^{p+1}\mathrm{CH}^p(X) = 0\end{aligned}$$

使得 $F^1\mathrm{CH}^p(X) = \mathrm{Ker}(\mathrm{cl}^p) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$,并且商 F^i/F^{i+1} 都是由 X 的数值母题唯一确定的.由这个猜想我们可以得到许多关于周群的精确信息(比如可以得到曲面上的Bloch猜想),但是该猜想的证明依然是遥不可及.

参考文献

- 1 Hodge W V D. The Theory and Applications of Harmonic Integrals. England: Cambridge University Press, 1941. ix+281
- 2 Chow W L. On compact complex analytic varieties. Amer J Math, 1949, 71: 893–914
- 3 Hodge W V D. The topological invariants of algebraic varieties. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass. 1950, 1: 182–192
- 4 Atiyah M, Hirzebruch R. Analytic cycles on complex manifolds. Topology 1, 1962, 25–45
- 5 Trento examples. Classification of irregular varieties (Trento, 1990), 134–139, Lecture Notes in Math, 1515, Berlin: Springer, 1992
- 6 Beauville A. La congettura di Hodge. Matematica. Einaudi, 2008, 2: 705–730
- 7 Cattani E, Deligne P, Kaplan A. On the locus of Hodge classes. J Amer Math Soc, 1995, 2: 483–506
- 8 Voisin C A. Counterexample to the Hodge conjecture extended to Kähler varieties. Int Math Res, 2002, 20: 1057–1075
- 9 Grothendieck A. Standard conjectures on algebraic cycles. Algebraic Geometry, 1969
- 10 Mumford D. Rational equivalence of 0-cycles on surfaces. J Math Kyoto Univ, 1968, 9: 195–204
- 11 Jannsen U. Motivic sheaves and filtrations on Chow groups. Motives (Seattle, WA, 1991), 245–302, Proc Sympos Pure Math, 55, Part 1, Amer Math Soc, Providence, RI, 1994

付保华

博士,毕业于北京大学,于2003年获法国尼斯大学数学博士学位,主要从事代数几何的研究.2009年入选中国科学院“百人计划”,2012年入选中组部“青年拔尖人才计划”并获国家杰出青年科学基金.2015年入选教育部“长江奖励计划”青年学者.

Hodge conjecture

FU BaoHua

Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China
E-mail: bhfu@math.ac.cn

As one of the seven Millennium Prize Problems, Hodge conjecture aims to establish a connection between the topology and the subvarieties of a smooth projective complex variety. It predicts that any Hodge cycle in the cohomology of a smooth projective complex variety can be represented (via the Poincaré duality) by a combination of subvarieties. In 1962, Atiyah and Hirzebruch constructed a counter-example to the integral Hodge conjecture. In 2002, Voisin constructed a counterexample to the Hodge conjecture extended to Kähler varieties. Until now, only very few cases are verified for the rational Hodge conjecture, including divisors (due to Lefschetz) and some abelian varieties. Over an arbitrary base field, Grothendieck proposed a series of standard conjectures, as a vast generalization of Hodge conjecture, but again, there is only few progress on these conjectures. From another viewpoint, the Hodge conjecture predicts the image of the cycle map from Chow groups to the cohomology groups, while the kernel of the cycle map is in general huge and infinite dimensional (due to Mumford). A very important conjecture of Bloch-Beilinson predicts the existence of a functorial filtration on the kernel. Together with Hodge conjecture, this provides us a satisfactory (but yet conjectural) understanding of the mysterious Chow groups.

Hodge conjecture, Algebraic cycles, Chow groups

doi: 10.1360/N972015-01397