有限群整群环的正规化子性质

海进科*, 戈升波

青岛大学数学科学学院, 青岛 266071

E-mail: haijinke2002@aliyun.com, key1@vip.sina.com

收稿日期: 2013-08-02; 接受日期: 2014-12-22; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11171169) 资助项目

摘要 Hertweck 的反例说明, 一个有限群即使它的一个正规子群和它对应的商群具有正规化子性质, 该有限群也未必有正规化子性质. 本文证明如下主要结果: 设 G 是一个有限群, N 是 G 的一个正规子群且 $\mathbb{Z}(G/N)$ 的中心单位是平凡单位. 如果 N 的 Sylow 2-子群是 N 的一个直因子, 则 G 有正规化子性质.

关键词 正规化子性质 整数环 中心单位

MSC (2010) 主题分类 20C05, 16S34, 20C10

1 引言

设 G 是一个有限群且 $\mathbb{Z}G$ 是 G 在整数环 $\mathbb{Z}$ 上的整群环. 用 $U(\mathbb{Z}G)$ 表示 $\mathbb{Z}G$ 单位群. 一个长期存在的问题 (参见文献 [1, 问题 43]) 是, 对任意有限群 G , 是否总有 $N_{U(\mathbb{Z}G)}(G) = G\mathcal{Z}(U(\mathbb{Z}G))$, 其中 $\mathcal{Z}(U(\mathbb{Z}G))$ 表示 $U(\mathbb{Z}G)$ 的中心, $N_{U(\mathbb{Z}G)}(G)$ 表示 G 在 $U(\mathbb{Z}G)$ 中的正规化子. 若该等式对有限群 G 成立, 则称有限群 G 具有正规化子性质. 该等式的第一个肯定结果是由 Coleman [2] 给出的有限幂零群有正规化子性质. 后来, Jackowski 和 Marciniak [3] 推广了该结果并证明了具有正规 Sylow 2-子群的有限群有正规化子性质. Mazur [4–6] 发现正规化子问题与著名的同构问题有着密切的联系. Hertweck [7] 构造了正规化子问题的一个反例, 并基于 Mazur 发现的两个问题之间的联系成功地构造了同构问题的一个反例. 尽管如此, 研究什么样的有限群具有正规化子性质仍是人们感兴趣的问题.

近年来, 一些作者给出了正规化子问题的许多肯定的结果, 例如, Li 等人 [8] 证明了有限 Blackburn 群具有正规化子性质; Lobão 和 Milies [9] 证明了 Frobenius 群具有正规化子性质; Lobão 和 Sehgal [10] 给出了完全单项群的正规化子性质. 另外, 关于正规化子问题的其他肯定的结果可参见文献 [11–15].

对任意 $u \in N_{U(\mathbb{Z}G)}(G)$, 用 φ_u 表示由 u 通过共轭诱导的有限群 G 的自同构, 即 $\varphi_u(g) = u^{-1}gu$, 其中 $g \in G$, 则 G 的所有这样的自同构构成了 $\text{Aut}(G)$ 的一个子群, 记为 $\text{Aut}_{\mathbb{Z}}(G)$. 显然, $\text{Inn}(G) \leq \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(G)$. 一个问题 (参见文献 [3, 问题 3.7]) 是, 对任意有限群 G , 是否总有 $\text{Aut}_{\mathbb{Z}}(G) = \text{Inn}(G)$, 容易验证这个问题等价于上面提到的正规化子问题, 本文将用这种等价形式来研究正规化子问题.

设 $\sigma \in \text{Aut}(G)$, 若 σ 在 G 的每个 Sylow 子群上的限制等于某个内自同构的限制, 则称 σ 为 G 的一个 Coleman 自同构. 这个概念是由 Hertweck 和 Kimmerle [16] 引进的. 群 G 的所有 Coleman 自同

构成 $\text{Aut}(G)$ 的一个子群, 记为 $\text{Aut}_{\text{Col}}(G)$. 显然有 $\text{Inn}(G) \leq \text{Aut}_{\text{Col}}(G)$, 记

$$\text{Out}_{\text{Col}}(G) = \frac{\text{Aut}_{\text{Col}}(G)}{\text{Inn}(G)}, \quad \text{Out}_{\mathbb{Z}}(G) = \frac{\text{Aut}_{\mathbb{Z}}(G)}{\text{Inn}(G)}.$$

由著名的 Coleman 引理^[2] 知, $\text{Out}_{\mathbb{Z}}(G) \leq \text{Out}_{\text{Col}}(G)$. 另外, 由 Krempa 的一个结果知, $\text{Out}_{\mathbb{Z}}(G)$ 是一个初等 Abel 2- 群. 这样, 如果我们能够在某些条件下证明 $\text{Out}_{\text{Col}}(G)$ 是一个奇阶群, 则 $\text{Out}_{\mathbb{Z}}(G) = 1$, 即 G 具有正规化子性质.

注意到 Hertweck 构造的正规化子问题的反例中的有限群是一个亚 Abel 群. 我们知道, 任意 Abel 群具有正规化子性质. 可见 Hertweck 的反例说明, 具有正规化子性质的有限群的扩张未必有正规化子性质. 自然地要问在什么条件下具有正规化子性质的有限群的扩张仍具有正规化子性质. 本文将证明下面这个主要结果:

定理 1.1 设 G 是一个有限群, $N \leq G$ 且 $\mathbb{Z}(G/N)$ 的中心单位是平凡单位. 如果 N 的 Sylow 2- 子群是 N 的一个直因子, 则 G 有正规化子性质.

作为定理 1.1 的直接结果, 我们下面的推论:

推论 1.2 设 G 是一个有限群, $N \leq G$ 且 $\mathbb{Z}(G/N)$ 的中心单位是平凡单位. 如果 N 是一个 2- 群, 则 G 有正规化子性质.

推论 1.3 设 G 是一个有限群, $N \leq G$ 且 $\mathbb{Z}(G/N)$ 的中心单位是平凡单位. 如果 N 是一个奇阶群, 则 G 有正规化子性质.

本文所考虑的群都是有限群. 设 $\sigma \in \text{Aut}(G)$, $M \leq G$, 我们用 $\sigma|_M$ 表示 σ 在 M 上的限制. 进一步, 设 $M \leq G$ 且 $M^\sigma = M$, 则用 $\sigma|_{G/M}$ 表示由 σ 诱导的商群 G/M 上的自同构. 设 $g \in G$, 我们用 $\text{conj}(g)$ 表示由 g 通过共轭诱导的 G 的内自同构, 即对任意 $x \in G$, $x^{\text{conj}(g)} = g^{-1}xg$. 用 $\pi(G)$ 表示 $|G|$ 的所有素因子构成的集合. 其他记号是标准的, 参见文献 [1, 16, 17].

2 预备知识

本节给出一些证明定理 1.1 要用到的基本结果.

引理 2.1^[1, 定理 6.1] 设 G 是一个有限群, 则 $\mathbb{Z}G$ 的中心单位是平凡单位当且仅当对任意 $x \in G$ 以及任意与 $|G|$ 互素的正整数 j , 有 $x^j \sim x$ 或 $x^j \sim x^{-1}$.

引理 2.2^[1, 性质 9.5] 设 $u \in N_{U(\mathbb{Z}G)}(G)$, 记 ψ_u 为由 u 诱导的 G 的自同构, 则 $\psi_u^2 \in \text{Inn}(G)$.

引理 2.3 设 G 是一个有限群, $\mathbb{Z}G$ 的中心单位是平凡单位, 则 G 有正规化子性质.

证明 设 $u \in N_{U(\mathbb{Z}G)}(G)$, 下面仅证 $u \in G\mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G))$. 由引理 2.2 知, 存在 $g \in G$ 使得 u^2g 是 $\mathbb{Z}G$ 的中心单位. 因中心单位是平凡的, 所以, $u^2 \in G$, 即 u 是有限阶的. 再由 Passman 的定理推出 $u \in \pm G$. 证毕. $\square$

引理 2.4^[9, 引理 1] 设 $u \in N_{U(\mathbb{Z}G)}(G)$, 则对任意 $g \in G$, $u^{-1}gu$ 和 g 在 G 中共轭.

引理 2.5^[18, 引理 2] 设 p 是一个素数, φ 是有限群 G 的一个 p - 方幂阶自同构. 若存在 G 的一个正规子群 N 使得 φ 稳定 N 中每个元且 φ 诱导了 G/N 上的恒等映射, 则 φ 诱导了 $G/O_p(Z(N))$ 上的恒等映射. 进一步, 若 φ 稳定 G 的某个 Sylow p - 子群中的每个元素, 则 $\varphi \in \text{Inn}(G)$.

引理 2.6 设 G 是一个有限群, $N \leq G$, σ 是 G 的一个 p - 方幂阶自同构, 这里 p 是一个素数. 若 σ 稳定 N 且存在某个 $x \in G$ 使得 $\sigma|_N = \text{conj}(x)|_N$, 则存在某个 p - 元 $y \in G$ 使得 $\sigma|_N = \text{conj}(y)|_N$.

证明 设 $o(\sigma) = p^i$, $o(x) = p^j t$, 其中 $i, j, t \in \mathbb{N}$ 且 $(p, t) = 1$. 记 $k = \max\{i, j\}$. 因为 $(p^k, t) = 1$, 所以存在 $m, n \in \mathbb{Z}$ 使得 $mp^k + nt = 1$. 令 $y = x^{nt}$, 则易知 y 是一个 p -元. 对任意 $z \in N$, 因为 $z = z^{\sigma^{mp^k}} = z^{x^{mp^k}}$, 所以, $z^\sigma = z^x = z^{x^{mp^k+nt}} = (z^{x^{mp^k}})^{x^{nt}} = z^{x^{nt}} = z^y$, 从而, $\sigma|_N = \text{conj}(y)|_N$. $\square$

引理 2.7 [16, 性质 1] 设 G 是一个有限群, 则 $|\text{Aut}_{\text{Col}}(G)|$ 的每个素因子属于 $\pi(G)$.

引理 2.8 [16, 推论 1] 设 $N \trianglelefteq G$, p 是一个素数且不整除 G/N 的阶, 则下面的结论成立:

(1) 如果 $\sigma \in \text{Aut}_{\text{Col}}(G)$ 是 p -方幂阶的, 那么, $\sigma|_N \in \text{Aut}_{\text{Col}}(N)$;

(2) 如果 $\text{Out}_{\text{Col}}(N)$ 是 p' -群, 那么, $\text{Out}_{\text{Col}}(G)$ 也是 p' -群.

引理 2.9 设 P 是 G 的 Sylow p -子群. 如果 $P \trianglelefteq G$, 那么, $\text{Out}_{\text{Col}}(G)$ 是 p' -群.

证明 显然, p 不整除 G/P 的阶. 因此, 由文献 [16, 推论 16] 得 $\text{Out}_{\text{Col}}(P) = 1$. 再由引理 2.8(2) 知, $\text{Out}_{\text{Col}}(G)$ 是 p' -群. $\square$

3 定理 1.1 的证明

定理 1.1 的证明 要证 G 有正规化子性质, 仅需证明 $\text{Aut}_{\mathbb{Z}}(G) \subseteq \text{Inn}(G)$ 即可. 设 $\sigma \in \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(G)$, 则存在 $u \in N_{U(\mathbb{Z}G)}(G)$ 使得对所有 $g \in G$, 我们有 $g^\sigma = u^{-1}gu$. 设

$$\epsilon: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z} \left(\sum_{g \in G} r_g g \mapsto \sum_{g \in G} r_g \right)$$

是 $\mathbb{Z}G$ 到 $\mathbb{Z}$ 的增广映射, 其中对所有 $g \in G$ 有 $r_g \in \mathbb{Z}$. 因为 u 是 $\mathbb{Z}G$ 中的单位, 所以, $\epsilon(u) = 1$ 或 $\epsilon(u) = -1$. 注意到 $\sigma = \text{conj}(u) = \text{conj}(-u)$, 所以, 不失一般性, 我们可设 $\epsilon(u) = 1$.

对于商群 G/N 中的元及子群, 我们采用 bar 约定, 即对任意 $g \in G$, 我们记 $\bar{g} := gN$; 对任意 $U \leq G$, 我们记 $\bar{U} := UN/N$, 特别地, 记 $\bar{G} := G/N$.

设

$$\rho: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}\bar{G} \left(\sum_{g \in G} r_g g \mapsto \sum_{g \in G} r_g \bar{g} \right)$$

是从 $\mathbb{Z}G$ 到 $\mathbb{Z}\bar{G}$ 的自然态射.

断言 3.1 记号如上, 存在 $g_1 \in G$ 使得 $\rho(u) = \bar{g}_1$ 且 $\sigma|_{\bar{G}} = \text{conj}(g_1)|_{\bar{G}}$.

因 $u \in N_{U(\mathbb{Z}G)}(G)$, 所以, $\rho(u) \in N_{U(\mathbb{Z}\bar{G})}(\bar{G})$. 由引理 2.4, σ 稳定 N 且 σ 诱导了 $\bar{G}$ 上的自同构, 记为 $\sigma|_{\bar{G}}$. 因对任意 $g \in G$ 有 $g^\sigma = u^{-1}gu$, 于是,

$$\bar{g}^{\sigma|_{\bar{G}}} = \overline{u^{-1}gu} = \rho(u)^{-1} \bar{g} \rho(u). \quad (3.1)$$

从而, $\sigma|_{\bar{G}}$ 为由 $\rho(u)$ 诱导的 $\bar{G}$ 的自同构, 即 $\sigma|_{\bar{G}} \in \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(\bar{G})$. 由引理 2.3 知, $\sigma|_{\bar{G}} \in \text{Inn}(\bar{G})$. 于是, 存在 $y \in G$ 使得 $\sigma|_{\bar{G}} = \text{conj}(\bar{y})|_{\bar{G}}$. 对任意 $\bar{g} \in \bar{G}$, 我们有 $\bar{g}^{\sigma|_{\bar{G}}} = \bar{g}^{\rho(u)} = \bar{g}^{\bar{y}}$. 因此, $\rho(u)\bar{y}^{-1} \in \mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}\bar{G}))$. 由于 $\mathbb{Z}(\bar{G})$ 的中心单位是平凡的, 这样存在 $\bar{G}$ 的中心元 $\bar{z}$ 使得 $\rho(u)\bar{y}^{-1} = \bar{z}$. 记 $\bar{g}_1 := \bar{z}\bar{y}$. 因此, $\rho(u) = \bar{g}_1$ 且 $\sigma|_{\bar{G}} = \text{conj}(g_1)|_{\bar{G}}$, 断言 3.1 得证.

设 $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ 是 N 在 G 中的一个陪集代表元集, 其中 g_1 是断言 3.1 中给出的. 把 $g_1, g_2, \dots, g_r$ 看成 $\mathbb{Z}N$ -自由模 $\mathbb{Z}G$ 的一组基, 于是, u 唯一的表示为

$$u = \sum_{i=1}^r \alpha_i g_i, \quad (3.2)$$

其中 $\alpha_i \in \mathbb{Z}N$, $i = 1, 2, \dots, r$. 用 ρ 作用在 (3.2) 的两边, 我们得到

$$\rho(u) = \sum_{i=1}^r \epsilon(\alpha_i) \bar{g}_i. \quad (3.3)$$

由断言 3.1, 我们得到

$$\bar{g}_1 = \sum_{i=1}^r \epsilon(\alpha_i) \bar{g}_i. \quad (3.4)$$

因为 $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_r$ 是 $\mathbb{Z}$ -线性无关的, 所以, 由 (3.4) 得

$$\epsilon(\alpha_1) = 1, \quad \epsilon(\alpha_i) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, r. \quad (3.5)$$

断言 3.2 记号如上, 对任意 $n \in N$ 和 $g \in G$, G 通过 $(ng_1) \cdot g := g^{-1}(ng_1)g^\sigma$ 在 Ng_1 上有作用. 因为 $u^{-1}gu = g^\sigma$ 及 $u = \sum_{i=1}^r \alpha_i g_i$, 所以, 我们有

$$u = g^{-1} \sum_{i=1}^r \alpha_i g_i g^\sigma. \quad (3.6)$$

用 ρ 作用 (3.6) 两端且考虑到 (3.5) 得 $\bar{g}_1 = \rho(u) = \rho(g^{-1} \sum_{i=1}^r \alpha_i g_i g^\sigma) = \overline{g^{-1}g_1g^\sigma}$. 因此, $g^{-1}g_1g^\sigma \in Ng_1$. 因为 $N \trianglelefteq G$, 所以存在 $n' \in N$ 使得 $g^{-1}n = n'g^{-1}$. 从而,

$$(ng_1) \cdot g = g^{-1}(ng_1)g^\sigma = n'g^{-1}g_1g^\sigma \in Ng_1.$$

进一步, 对任意 $n \in N$ 和 $x, y \in G$, 易检查 $(ng_1) \cdot 1 = ng_1$ 及 $((ng_1) \cdot x) \cdot y = (ng_1) \cdot (xy)$. 这证明了 G 通过上述定义在 Ng_1 上有作用.

断言 3.3 对任意 $n \in N$ 及 $g \in G$, ng_1 和它在 g 下的像 $(ng_1) \cdot g$ 在 $\alpha_1 g_1$ 中具有相同的 $\mathbb{Z}$ -系数.

因 $\alpha_1 \in \mathbb{Z}N$, 我们可设 $\alpha_1 = \sum_{n \in N} r(n)n$, 其中 $r(n) \in \mathbb{Z}$. 类似地, 我们可设 $\alpha_i = \sum_{n \in N} r_i(n)n$, 其中 $r_i(n) \in \mathbb{Z}$ 对任意 $n \in N$ 及 $i \in \{2, 3, \dots, r\}$. 由 (3.2) 和 (3.6), 我们得到

$$\sum_{n \in N} r(n)ng_1 + \sum_{i=2}^r \sum_{n \in N} r_i(n)ng_i = \sum_{n \in N} r(n)g^{-1}ng_1g^\sigma + \sum_{i=2}^r \sum_{n \in N} r_i(n)g^{-1}ng_i g^\sigma. \quad (3.7)$$

我们断言 $g^{-1}ng_1g^\sigma$ 不能出现在 (3.7) 右边第二部分 $\sum_{i=2}^r \sum_{n \in N} r_i(n)g^{-1}ng_i g^\sigma$ 中. 否则, 假设存在 $n' \in N$ 及 $i \in \{2, 3, \dots, r\}$ 使得 $g^{-1}ng_1g^\sigma = g^{-1}n'g_i g^\sigma$. 则我们得到 $ng_1 = n'g_i$, 这推出 g_1 和 g_i 属于 N 在 G 中的相同陪集, 矛盾.

另外, 由断言 3.2 知, G 通过 $(ng_1) \cdot g := g^{-1}(ng_1)g^\sigma$ 在 Ng_1 上有作用, 因此 $Ng_1 = (Ng_1) \cdot g$, 即 $\{ng_1 \mid n \in N\} = \{g^{-1}ng_1g^\sigma \mid n \in N\}$.

这样通过 (3.7) 和以上的事实得到

$$\alpha_1 g_1 = \sum_{n \in N} r(n)ng_1 = \sum_{n \in N} r(n)g^{-1}ng_1g^\sigma. \quad (3.8)$$

由 (3.8) 易知, ng_1 和 $g^{-1}ng_1g^\sigma$ (即 $(ng_1) \cdot g$) 在 $\alpha_1 g_1$ 中具有相同的 $\mathbb{Z}$ -系数 $r(n)$, 断言 3.3 得证.

断言 3.4 设 $p \in \pi(G)$, 则对 G 的任意 p -子群 P , 存在 $n \in N$ 使得 $\sigma \text{conj}(g_1^{-1})|_P = \text{conj}(n)|_P$.

因为 P 是 G 的子群, 由断言 3.2 知, P 在 Ng_1 上也有作用. 设 $S_1, S_2, \dots, S_t$ 是这个作用下的所有不同的 P -轨道. 记 $l_j := |S_j|$, $j = 1, 2, \dots, t$. 设 $\alpha_1 = \sum_{n \in N} r(n)n$, 其中 $r(n) \in \mathbb{Z}$. 对任意 P -轨道 S_j ,

取元素 $n_j g_1 \in S_j, j = 1, 2, \dots, t$. 由断言 3.3 知, 相同的 P -轨道的元素在 $\alpha_1 g_1$ 里具有相同的 $\mathbb{Z}$ -系数. 因此, 一方面, 我们有

$$\epsilon(\alpha_1 g_1) = \sum_{j=1}^t r(n_j) l_j. \quad (3.9)$$

另一方面, 因 $\epsilon(\alpha_1) = 1$, 于是,

$$\epsilon(\alpha_1 g_1) = \epsilon(\alpha_1) = 1. \quad (3.10)$$

因此, 由 (3.9) 和 (3.10), 我们得到

$$\sum_{j=1}^t r(n_j) l_j = 1. \quad (3.11)$$

因 P 是一个 p -群, 所以, 对任意 $j = 1, 2, \dots, t$, 有 l_j 整除 $|P|$. 特别地, 当 $l_j \neq 1$ 时, p 整除 l_j . 因此, 由 (3.11), 存在 $j_0 \in \{1, 2, \dots, t\}$ 使得 $l_{j_0} = 1$ 且 $r(n_{j_0}) \neq 0$. 结果 $n_{j_0} g_1$ 是 P 在 $N g_1$ 上作用的一个稳定点. 因此, 对任意 $g \in P$, 我们有 $g^{-1}(n_{j_0} g_1) g^\sigma = (n_{j_0} g_1) \cdot g = n_{j_0} g_1$. 另外, $g^\sigma = (n_{j_0} g_1)^{-1} g (n_{j_0} g_1)$. 这样得到 $\sigma|_{P = \text{conj}(n_{j_0} g_1)}|_P$. 故 $\sigma \text{conj}(g_1^{-1})|_{P = \text{conj}(n_{j_0})}|_P$, 断言 3.4 得证.

断言 3.5 $\sigma \text{conj}(g_1^{-1})|_N$ 是 N 的一个 Coleman 自同构.

对任意 $x \in N$, 我们有 $x^\sigma = u^{-1} x u$. 因 $u \in N_{U(\mathbb{Z}G)}(G)$, 由引理 2.4 得到 $u^{-1} x u$ 和 x 在 G 中共轭. 于是, 存在 $g \in G$ 使得 $x^\sigma = x^g$. 而 N 是 G 的正规子群, 因此, 我们得到 $x^\sigma \in N$. 这推出 σ 在 N 上的限制, 即 $\sigma|_N$ 是 N 的一个自同构. 结果 $\sigma \text{conj}(g_1^{-1})|_{N \in \text{Aut}(N)}$. 这样下面仅证 $\sigma \text{conj}(g_1^{-1})|_{N \in \text{Aut}_{\text{Col}}(N)}$. 设 $p \in \pi(N)$, P 是 N 的一个 Sylow p -子群. 则由断言 3.4, 存在 $n \in N$ 使得

$$\sigma \text{conj}(g_1^{-1})|_{P = \text{conj}(n)}|_P. \quad (3.12)$$

通过 Coleman 自同构的定义和 (3.12) 得 $\sigma \text{conj}(g_1^{-1})|_{N \in \text{Aut}_{\text{Col}}(N)}$, 断言 3.5 得证.

断言 3.6 σ 是 G 的一个内自同构.

设 P 是 G 的一个 Sylow 2-子群, 则由断言 3.4, 存在 $n \in N$ 使得 $\sigma \text{conj}(g_1^{-1})|_{P = \text{conj}(n)}|_P$. 记 $\gamma := \sigma \text{conj}((n g_1)^{-1})$, 则

$$\gamma|_{P = \text{id}}|_P. \quad (3.13)$$

由断言 3.1, 我们得到

$$\gamma|_{G/N} = \text{id}|_{G/N}. \quad (3.14)$$

因 $\sigma \in \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(G)$, 所以, $\gamma = \sigma \text{conj}((n g_1)^{-1}) \in \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(G)$. 由引理 2.2, $\gamma^2 \in \text{Inn}(G)$. 因此, 不失一般性, 我们不妨设 γ 是 2-方幂阶自同构.

注意到 $\gamma = \sigma \text{conj}((n g_1)^{-1}) = \sigma \text{conj}(g_1^{-1}) \text{conj}(n^{-1})$. 另外由断言 3.5 知, $\sigma \text{conj}(g_1^{-1})|_{N \in \text{Aut}_{\text{Col}}(N)}$. 因此, $\gamma|_{N = \sigma \text{conj}(g_1^{-1}) \text{conj}(n^{-1})|_{N \in \text{Aut}_{\text{Col}}(N)}}$. 因 γ 是 2-方幂阶的, 所以, $\gamma|_N$ 也是 2-方幂阶的. 而 $N = N_2 \times N_{2'}$, 其中 N_2 是 N 的 Sylow 2-子群及 $N_{2'}$ 是 N 的 $2'$ -子群. 由引理 2.9 得到 $\gamma|_N \in \text{Inn}(N)$. 这样存在 $x \in N$ 使得

$$\gamma|_{N = \text{conj}(x)}|_N. \quad (3.15)$$

因 $\gamma|_N$ 是 2-方幂阶的, 由引理 2.6, 我们可假设 x 是 N 的 2-元素, 因此, $x \in N_2$. 注意到 N_2 是 N 的一个直因子及 $N \trianglelefteq G$, 我们得到 $N_2 \leq P$. 这样, 对任意 $y \in N_2$, 由 (3.13) 和 (3.15) 知, $y = y^{\gamma|_N} = y^x$, 这推出 x 是 N_2 的一个中心元. 通过 (3.15) 和 $N = N_2 \times N_{2'}$, 我们有

$$\gamma|_N = \text{id}|_N. \quad (3.16)$$

这样根据引理 2.5, 由 (3.13)、(3.14) 和 (3.16) 知, $\gamma \in \text{Inn}(G)$, 于是, $\sigma \in \text{Inn}(G)$, 断言 3.6 得证. 从而也完成定理 1.1 的证明. $\square$

致谢 对审稿人的仔细审阅深表感谢.

参考文献

- 1 Sehgal S K. Units in Integral Group Rings. Harlow: Longman Scientific and Technical Press, 1993
- 2 Coleman D B. On the modular group ring of a p -group. Proc Amer Math Soc, 1964, 5: 511–514
- 3 Jackowski S, Marciniak Z S. Group automorphisms inducing the identity map on cohomology. J Pure Appl Algebra, 1987, 44: 241–250
- 4 Mazur M. Automorphisms of finite groups. Comm Algebra, 1994, 22: 6259–6271
- 5 Mazur M. On the isomorphism problem for infinite group rings. Expo Math, 1995, 13: 433–445
- 6 Mazur M. The normalizer of a group in the unit group of its group ring. J Algebra, 1999, 212: 175–189
- 7 Hertweck M. A counterexample to the isomorphism problem for integral group rings. Ann Math, 2001, 154: 115–138
- 8 Li Y, Sehgal S K, Parmenter M M. On the normalizer property for integral group rings. Comm Algebra, 1999, 27: 4217–4223
- 9 Lobão T P, Milies C P. The normalizer property for integral group rings of Frobenius groups. J Algebra, 2002, 256: 1–6
- 10 Lobão T P, Sehgal S K. The normalizer property for integral group rings of complete monomial groups. Comm Algebra, 2003, 31: 2971–2983
- 11 Hertweck M. Class-preserving Coleman automorphisms of finite groups. Monatsh Math, 2002, 136: 1–7
- 12 Hertweck M. Local analysis of the normalizer problem. J Pure Appl Algebra, 2001, 163: 259–276
- 13 Juriaans S O, Miranda J M, Robério J R. Automorphisms of finite groups. Comm Algebra, 2004, 32: 1705–1714
- 14 Li Y. The normalizer property of a metabelian group in its integral group ring. J Algebra, 2002, 256: 343–351
- 15 Marciniak Z S, Roggenkamp K W. The normalizer of a finite group in its integral group ring and Cech cohomology. In: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Algebra-Representation Theory, Algebra-Representation Theory. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001, 159–188
- 16 Hertweck M, Kimmerle W. Coleman automorphisms of finite groups. Math Z, 2002, 242: 203–215
- 17 Robinson D J S. A Course in the Theory of Groups. New York: Springer-Verlag, 1996
- 18 Hertweck M. Class-preserving automorphisms of finite groups. J Algebra, 2001, 241: 1–26

Normalizer property for integral group rings of finite groups

HAI JinKe & GE ShengBo

Abstract Hertweck’s counterexample demonstrates that the normalizer property need not necessarily hold for a finite group even if the normalizer property holds both for a normal subgroup and the corresponding quotient group of it. In this paper, we shall prove the following main result. Let G be a finite group with a normal subgroup N such that all central units of $\mathbb{Z}(G/N)$ are trivial. If the Sylow 2-subgroup of N is a direct product factor of N , then the normalizer property holds for G .

Keywords normalizer property, integral group rings, central units

MSC(2010) 20C05, 16S34, 20C10

doi: 10.1360/012015-13