基于 Spectral Tetris 算法的框架的最佳稀疏性

李登峰^{①*}, 刘子胜^②

① 武汉纺织大学数学与计算机学院, 武汉 430200;

② 西安交通大学数学与统计学院, 西安 710049

E-mail: dffi2003@aliyun.com, liuzisheng0710@163.com

收稿日期: 2014-04-14; 接受日期: 2014-07-08; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 61071189) 和武汉纺织大学学科创新团队建设 (批准号: 201401023) 资助项目

摘要 当信号维数较大时, 使用稀疏框架分解信号就能减少大量的加法和乘法运算, 所以, 研究稀疏框架很有意义. 本文介绍有限框架的稀疏性, 并研究基于 Spectral Tetris 算法构造的框架的稀疏性. 首先, 给出基于 Spectral Tetris 算法的框架的最佳稀疏性; 其次, 得到基于 Spectral Tetris 算法的可剖分紧框架的最佳稀疏性.

关键词 框架 稀疏框架 可剖分紧框架 稀疏性

MSC (2010) 主题分类 42C15, 42C40

1 引言

1946 年, Gabor^[1] 利用基本信号提出了信号处理技术, 成为与时频方法相伴的谱分析范例. 1952 年, Duffin 和 Schaeffer^[2] 在研究非调和 Fourier 级数时, 通过抽象 Gabor 的基本思想提出了 Hilbert 空间上框架概念. 直到 1986 年, Daubechies 等人^[3] 的突破性研究才使框架理论的研究及应用得到广泛关注. 现在, 框架在理论和应用上都起着十分重要的作用, 已广泛应用于图像处理^[4]、滤波器理论^[5] 和数字通信^[6] 等领域. 框架是 Hilbert 空间中一列元, 它具有类似于基的性质, 即空间中的任意元都可由空间中的框架表示. 但与基不同的是, 框架表示不唯一 (称为冗余性), 且表示是稳定的, 即元素用框架展开系数的 l^2 模与元素的模等价. 虽然框架对信号的分解具有稳定性, 且它的冗余性使得应用起来更加灵活和自由, 但当信号维数较大及框架非零元素较多时, 计算信号的框架度量 (信号与框架元素之间的内积) 就需要大量的加法和乘法运算. 这样, 在有限的计算预算下, 框架对信号的分解就显得较困难. 为解决这个问题, 一些学者提出了有限框架 (有限维 Hilbert 空间中的框架) 的稀疏性. 这种稀疏性框架可大量减少计算框架度量的加法和乘法运算. 框架的稀疏性是近几年活跃的研究方向, 它与目前的研究热点 — 压缩感知具有密切关系. 因此, 本文主要关注有限框架, 探讨具有少量非零元的框架, 即稀疏性框架.

框架的构造具有较长历史, 但构造的仅是一致紧框架, 这些框架都是为特定应用服务的. 因此, 构造的仅是某一特定类的框架, 如调和框架^[7,8] 等. 最近, 文献 [9] 提出一种新的构造有限一致紧框架算法, 即 Spectral Tetris 算法, 简称 ST 算法, 它是第一个系统构造一致紧框架的算法. 随后, 文献 [10–12] 改进和发展了 ST 算法, 尤其可根据给定的框架算子来构造相应的一致框架 (每个元的范数为 1 的框架), 使得此算法更具灵活. 本文主要研究由 ST 算法构造的框架稀疏性.

英文引用格式: Li D F, Liu Z S. The optimal sparsity of frames based on Spectral Tetris algorithm (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 1091–1098, doi: 10.1360/N012014-00068

全文结构如下: 第 2 节列出全文将要用到的一些基本事实, 并介绍构造一致紧框架的算法 — ST 算法; 第 3 节阐述稀疏框架的背景和稀疏框架的定义; 第 4 节给出由 ST 算法构造的框架稀疏性的两个结果和证明.

2 框架和 ST 算法的基本事实

2.1 框架的基本理论

本文约定自然数集为 $\mathbb{N}$, n 维 Euclid 空间为 $\mathbb{R}^n$.

定义 2.1.1 给定 $N \geq n$, 并设 $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的点列. 如果存在常数 $0 < A \leq B < \infty$, 使得

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^N |\langle x, \varphi_i \rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

则称 $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的框架, 其中 (2.1) 中的 A 和 B 称为框架 Φ 的下、上界, 约定为最优界, 即 A 为下界中的上确界, B 为上界中的下确界. 如果 $A = B$, 则称框架 Φ 为 A -紧框架; 如果 $A = B = 1$, 则称框架 Φ 为 Parseval 框架; 如果存在一个常数 c , 使得框架 Φ 的每个元范数 $\|\varphi_i\| = c$, 则称 Φ 为等范框架. 特别地, $c = 1$ 的紧框架称为一致紧框架.

在研究框架 $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 时, 我们可以通过分析其相应的框架系数 $\{\langle x, \varphi_i \rangle\}_{i=1}^N$ 来讨论其性质. 分析算子、合成算子和框架算子是分析框架时常用的算子, 它们的定义如下:

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow l_2(\{1, 2, \dots, N\}), \quad x \mapsto \{\langle x, \varphi_i \rangle\}_{i=1}^N$$

称为框架 $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 的分析算子, 它的伴随 T^* 称为合成算子, 满足

$$T^*: l_2 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad T^*(\{c_i\}_{i=1}^N) = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i.$$

框架 $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 写成矩阵形式为 $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$, 其中框架的元素作为矩阵的列向量. 在后面称这个矩阵为框架 Φ 的合成矩阵.

定义 2.1.2 设 $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的框架, 算子

$$S = T^*T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad Sx = \sum_{i=1}^N \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i \quad (2.2)$$

称为框架 Φ 的框架算子.

借助框架算子 S , 可以表示 $\mathbb{R}^n$ 中的任何元, 即 $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \sum_{j=1}^N \langle x, S^{-1}\varphi_j \rangle \varphi_j = \sum_{j=1}^N \langle x, \varphi_j \rangle S^{-1}\varphi_j,$$

其中 $\{S^{-1}\varphi_j\}_{j=1}^N$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 上的框架, 称其为框架 $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ 的典则对偶框架. 实际上, 上式中框架 $\{S^{-1}\varphi_j\}_{j=1}^N$ 也可用其他框架代替, 这就是框架 $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 的对偶框架^[13].

2.2 ST 算法

ST 算法作为一种构造一致紧框架的算法对框架构造很有意义. 使用 ST 算法构造一致紧框架时要求框架算子的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 2$, 且满足 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = N$, $\frac{N}{n} \geq 2$ (n 为空间维数, N 为框架元素个数).

设 $\{e_j\}_{j=1}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基. ST 算法的具体步骤如下:

STF (spectral tetris frames)

指标:

- (1) 维数 n ;
- (2) 框架元素数 N 且 $N \geq 2n$;
- (3) 要构造框架的框架算子特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 2$, $\sum_{j=1}^n \lambda_j = N$.

算法:

- (1) set $i = 1$;
- (2) for $j = 1, \dots, n$ do;
- (3) repeat;
- (4) if $\lambda_j < 1$ then;
- (5) $\varphi_i = \sqrt{\frac{\lambda_j}{2}}e_j + \sqrt{1 - \frac{\lambda_j}{2}}e_{j+1}$;
- (6) $\varphi_{i+1} = \sqrt{\frac{\lambda_j}{2}}e_j - \sqrt{1 - \frac{\lambda_j}{2}}e_{j+1}$;
- (7) $i = i + 2$;
- (8) $\lambda_{j+1} = \lambda_{j+1} - (2 - \lambda_j)$;
- (9) $\lambda_j = 0$;
- (10) else;
- (11) $\varphi_i = e_j$;
- (12) $i = i + 1$.
- (1) $\lambda_j = \lambda_j - 1$;
- (13) end;
- (14) until $\lambda_j = 0$;
- (15) end.

由上面算法得到 STF 的定义如下:

定义 2.2.1 设 $L = \{l_i : 1 \leq i \leq \mu, i \in \mathbb{N}, \text{ 且 } \mu \text{ 是 } i \text{ 的最大值, 满足 } l_\mu = n\}$, 其中 $l_i = \min\{\mathbb{N} \ni l > l_{i-1} : \sum_{j=1}^l \lambda_j \in \mathbb{N}\}$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ 满足 $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \lambda_j \geq 2, N = \sum_{j=1}^n \lambda_j \in \mathbb{N}$, 则由 ST 算法构造的框架 $\Phi = \text{STF}(n, N, \{\lambda_j\}_{j=1}^n) \in \mathbb{R}^{n \times N}$ 为

$$\Phi = \begin{pmatrix} \underbrace{1 \cdots 1}_{m_1 \uparrow} & a_1 & a_1 & & & & & & \\ & b_1 & -b_1 & \underbrace{1 \cdots 1}_{m_2 \uparrow} & a_2 & a_2 & & & \\ & & & b_2 & -b_2 & 1 \cdots & & & \\ & & & & & & \cdots 1 & a_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & & & & & b_{n-1} & -b_{n-1} & \underbrace{1 \cdots 1}_{m_n \uparrow} \end{pmatrix},$$

其中当 $j \notin L$ 时, $a_j = \sqrt{\frac{r_j}{2}}$, $b_j = \sqrt{1 - \frac{r_j}{2}}$, $r_j \in [0, 1)$ 且 $m_j \in \mathbb{N}$ 及它的定义如下:

$$\begin{cases} \lambda_j = m_j + r_j, & j - 1 \in L, \\ \lambda_j = 2 - r_{j-1} + m_j + r_j, & j - 1 \notin L; \end{cases}$$

当 $j \in L$ 时, 2×2 矩阵 $B_j = \begin{pmatrix} a_j & a_j \\ b_j & -b_j \end{pmatrix}$ 由 1×1 矩阵 $B_j = (1)$ 代替.

现在看一个具体例子. 构造 4×11 的矩阵 Φ , 使得 $\Phi\Phi^* = \frac{11}{4}I$. 根据上面算法可得

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{3}{8}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{8}} & -\sqrt{\frac{5}{8}} & 1 & \sqrt{\frac{2}{8}} & \sqrt{\frac{2}{8}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{6}{8}} & -\sqrt{\frac{6}{8}} & 1 & \sqrt{\frac{1}{8}} & \sqrt{\frac{1}{8}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{7}{8}} & -\sqrt{\frac{7}{8}} & 1 \end{bmatrix}.$$

近两年来, 人们改进和发展了 ST 算法^[10-12]. 改进和发展后的 ST 算法不一定要要求框架算子的特征值大于等于 2, 例如, 大于等于 $2 - \frac{1}{n}$ 也可有效工作. 本文就探讨这种情形下框架的稀疏性.

3 稀疏框架

为了引出框架的稀疏性, 我们先从信号的稀疏表示说起. 一个信号中如果只有少数元是非零的, 则称该信号是稀疏的. 通常时域内的自然信号都是非稀疏的, 但在某些变换域可能是稀疏的. 众所周知, 长度为 N 的一维离散时间信号 y , 可以表示为一个标准正交基的线性组合 $y = \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i$ 或 $y = \Phi x$, 其中 $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$, φ_i 为列向量, 列向量 x 是 y 的加权系数序列, $x_i = \langle y, \varphi_i \rangle = \varphi_i^T y$. 可见 x 是信号 y 的等价表示. 如果 x 只有很少的大系数, 则称信号 y 是可压缩的. 如果 x 只有 k 个元素不为零, 则称 x 为信号 y 的 k 稀疏表示. 另外, 由于正交基要求较高, 所以, 这就加大了选择稀疏表示信号正交基的难度, 从而, 人们转而采用冗余稀疏表示, 如框架表示.

稀疏信号处理方法的基本原理是, 当选择合适的基或框架后, 信号可由少量的非零系数表示出. 假如一个信号仅有 k 个是可表示的, 意思就是, 表示这个信号的基或框架是 k 稀疏的. 如果信号可以这样被稀疏表示出, 那么, 通过使用 l_1 的极小化方法可使它们恢复.

一般来说, 数据处理正面临低机载计算和小带宽预算的问题. 当信号维数较大时, 信号分解到测量框架的过程中需要大量的加法和乘法运算. 这时, 对于低机载数据处理是不可行的, 而且存储框架合成矩阵所需要的空间会很大, 因此需要对存储方法进行改进. 如果每个框架向量仅包含较少的非零元, 即在单位向量的基础上, 框架合成矩阵既稀疏又能降低数据处理的复杂度, 那么, 这就是我们所期望的. 因此需要对框架的整体进行研究, 我们可将框架元素中的非零元看作一种稀疏测量. 这一想法也可看作是存在一个正交变换, 把框架变换成具有稀疏性的矩阵, 从而转化为对稀疏矩阵进行研究.

根据以上分析, 文献 [14] 提出如下稀疏框架的定义:

定义 3.1 设 $n, N > 0$, $\{e_j\}_{j=1}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基, $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上框架. 如果对每一个 $i \in \{1, \dots, N\}$, 存在 $J_i \subseteq \{1, \dots, n\}$ 使得

$$\varphi_i \in \text{span}\{e_j : j \in J_i\} \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^N |J_i| = k, \quad (3.1)$$

则称框架 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 关于基 $\{e_j\}_{j=1}^n$ 是 k 稀疏的, 其中 $|J_i|$ 表示集合 J_i 中元素个数.

我们注意到, 文献 [10] 也定义了一种如下的稀疏框架概念:

定义 3.2 设 $n, N > 0$, $\{e_j\}_{j=1}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基, $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上框架. 如果对每个 $i \in \{1, \dots, N\}$ 存在 $J_i \subseteq \{1, \dots, n\}$ 使得 $\varphi_i \in \text{span}\{e_j : j \in J_i\}$, 则称框架 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 是 $\max\{|J_i| : i = 1, \dots, N\}$ 稀疏的.

显然, 两个定义的区别如下: (3.1) 可以看作序列 $\{|J_i| : i = 1, \dots, N\}$ 的 l_1 范数, 而定义 3.2 中定义的是 l_∞ 范数.

最佳稀疏框架的定义^[14]如下:

定义 3.3 设 F 为 $\mathbb{R}^n$ 中的某一类框架. 令 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N \in F$, $\{e_j\}_{j=1}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基. 如果框架 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 关于基 $\{e_j\}_{j=1}^n$ 是 k_1 稀疏的且不存在关于基 $\{e_j\}_{j=1}^n$ 是 k_2 稀疏的框架, 其中 $k_2 < k_1$, 那么, 称框架 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 关于基 $\{e_j\}_{j=1}^n$ 为 F 中的最佳稀疏框架, k_1 为最佳稀疏值.

某一类框架的最佳稀疏框架并不唯一^[14].

4 基于 ST 算法的框架最佳稀疏性

$\mathbb{R}^n$ 上框架算子特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的一致框架全体记为 $F(N; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 由 ST 算法构造的一致框架全体记为 $\text{STF}(N; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 其中 N 为框架元素个数.

基于前面的讨论, 本节给出框架算子的特征值大于等于 $2 - \frac{1}{n}$ 的框架类 $\text{STF}(N; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 在 $F(N; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 中的稀疏性. 为了叙述和证明结果, 首先列出下面的两个定义:

定义 4.1 给定 $n, N > 0$ 及有限序列 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. 如果对集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的任意置换 π , 它的部分和集合 $\{\sum_{j=1}^s \lambda_j : s = 1, 2, \dots, n\}$ 包含的整数个数至少与集合 $\{\sum_{j=1}^s \lambda_{\pi(j)} : s = 1, 2, \dots, n\}$ 包含的整数个数一样多, 那么, 称有限序列 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为有序组块. 有序组块 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的最大块数 $\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 定义为集合 $\{\sum_{j=1}^s \lambda_{\sigma(j)} : s = 1, 2, \dots, n\}$ 中整数个数, 其中 σ 是集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的置换且使得 $\lambda_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(2)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)}$ 为有序组块.

最大块数的概念可转化为框架合成矩阵的特殊分解性质.

定义 4.2 设 $n, N > 0$ 且 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的框架. 如果存在剖分 $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m = \{1, 2, \dots, N\}$ 使得对 $\forall k_1 \in I_p, k_2 \in I_q, p \neq q$ 有 $\text{supp } \varphi_{k_1} \cap \text{supp } \varphi_{k_2} = \emptyset$ 且 m 是最大的, 则称 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 的合成矩阵具有 m 块分解, m 称为分解数.

下面引理将框架算子的特征值序列的最大块数与相应的框架分解数联系起来.

引理 4.3 设 $n, N > 0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 2 - \frac{1}{n}$ 且满足 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = N$, 则在 $F(N; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 中的任意框架的合成矩阵至多有 $\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 阶分解.

证明 假定 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 有 v 块分解, 则由定义 4.2 知, v 为最大的分解数, $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_v$ 为 $\{1, 2, \dots, N\}$ 相应的剖分, 即对 $\forall k_1 \in I_{i_1}, k_2 \in I_{i_2}, i_1 \neq i_2$ 有 $\text{supp } \varphi_{k_1} \cap \text{supp } \varphi_{k_2} = \emptyset, I_{i_1} \cap I_{i_2} = \emptyset$.

令 S_j 为 $\{\varphi_i\}_{i \in I_j}$ 的公共支撑集, $j = 1, 2, \dots, v$, 即对某个 $i \in I_j$ 有 $S_j = \bigcup_{i=1}^{I_j} \text{supp } \varphi_i$. 注意到 $k \in S_j$ 当且仅当 $k \in \text{supp } \varphi_i$. 令 r_k 为框架 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 合成矩阵的第 k 行. 这样, $S_1, S_2, \dots, S_v$ 为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的剖分.

现在证明每一个剖分 S_j 对应的特征值的和为整数, 即证明如下等式:

$$|I_j| = \sum_{k \in I_j} \|\varphi_k\|^2 = \sum_{k \in S_j} \|r_k\|^2 = \sum_{k \in S_j} \lambda_k. \quad (4.1)$$

因为 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 由单位范数向量组成, 因此, 对某一个取定的 j , $|I_j| = \sum_{k \in I_j} \|\varphi_k\|^2$, $\sum_{k \in S_j} \|r_k\|^2 = \sum_{k \in S_j} \lambda_k$. 注意到 $\sum_{k \in I_j} \|\varphi_k\|^2 = \sum_{k \in S_j} \lambda_k$, 所以, (4.1) 成立. 通过适当的列置换, 我们可以将 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 的合成矩阵 T^* 写成 $T^* = [T_1^*, T_2^*, \dots, T_v^*]$, 则框架算子 $T^*T = \sum_{j=1}^v T_j^*T_j$ 是块对角的, $T_j^*T_j$ 为第 j 块. 因此, 它的特征值恰好为每一个矩阵 $T_j^*T_j$ 的特征值, (4.1) 适用所有 $j = 1, 2, \dots, v$, 从而推出 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的最大块数为 v . 所以, 框架类 $F(N; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 中的任意框架 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 的合成矩阵至多有 $\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 阶分解. 证毕. $\square$

本文的第一个结果为下面的定理:

定理 4.4 设 $n, N > 0$, 序列 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 2 - \frac{1}{n}$ 为有序组块且满足 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = N$, 那么, 在框架类 $F(N; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 中, 由 ST 算法在标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 下构造的框架 $\text{STF}(N; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 的最佳稀疏值为 $N + 2[n - \mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)]$.

证明 假设 $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N \in F(N; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 为由 ST 算法构造的框架, 则根据引理 4.3 知, 它的合成矩阵 T^* 有 μ 阶分解.

现在令 $k_0 = 0, k_1, \dots, k_\mu \in \mathbb{N}$. 下面所选择的 k_s 要满足 $m_s := \sum_{j=1}^{k_s} \lambda_j$ 为整数, 其中 $s = 1, 2, \dots, \mu$. 另外, 假设 $m_0 = 0$. 显然, $k_\mu = n, m_\mu = N$. 注意到 ST 算法构造的框架 $\text{STF}(m_1; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k_1})$ 与 $\text{STF}(N; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 的构造步骤是一致的, 其中 $\text{STF}(m_1; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k_1})$ 构造的是框架 Φ 的合成矩阵 T^* 的前 m_1 个框架向量, 且 m_1 个框架向量中的任意向量的前 k_1 个元的支撑集与后面所构造的向量都没有交集. 所以, Φ 的合成矩阵 T^* 的前 m_1 个框架向量的构造形式如下所示:

$$T^* = \begin{bmatrix} \odot & \odot & \cdots & \odot & ? & ? & \cdots & ? \\ \odot & \odot & \cdots & \odot & ? & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \odot & \odot & \cdots & \odot & ? & ? & \cdots & ? \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ? & ? & \cdots & ? \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ? & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{0 & 0 & \cdots & 0}_{m_1} & ? & ? & \cdots & ? \end{bmatrix},$$

其中 “ $\odot$ ” 代表由 ST 算法构造出的元素. 从 k_2 到 k_μ 重复这一构造步骤, 我们会得到一个具有 μ 阶分解的合成矩阵 T^* . 这样, 由以上的构造过程知, 框架向量相应的剖分为 $\bigcup_{s=1}^\mu \{\varphi_{m_{s-1}+1}, \dots, \varphi_{m_s}\}$.

下面计算由 ST 算法所生成的合成矩阵的非零元个数. 对任意固定的 $s \in \{1, \dots, \mu\}$, 我们计算剖分向量 $\varphi_{m_{s-1}+1}, \dots, \varphi_{m_s}$ 的非零元的个数. ST 算法确保从第 $k_{s-1} + 1$ 行到第 $k_s - 1$ 行, 每行与后面一行的支撑集的交为 2, 因此, 存在 $2[k_s - 1 - (k_{s-1} + 1) + 1] = 2[k_s - (k_{s-1} + 1)]$ 个具有两个非零元的框架向量, 剩余的 $(m_s - m_{s-1}) - 2(k_s - k_{s-1} - 1)$ 个框架向量仅有一个非零元, 这里用到 $m_s - m_{s-1} = m_s - (m_{s-1} + 1) + 1$. 所以, 合成矩阵 T^* 中框架向量的非零元总数为

$$\sum_{s=1}^\mu [(m_s - m_{s-1}) + 2(k_s - k_{s-1} - 1)] = \sum_{s=1}^\mu (m_s - m_{s-1}) + 2 \left[\sum_{s=1}^\mu (k_s - k_{s-1}) - \sum_{s=1}^\mu 1 \right] = N + 2(n - \mu).$$

证毕. $\square$

为了建立本文第二个结果, 我们需要主要紧框架和可剖分紧框架的定义:

定义 4.5 ^[15] 给定 N 和 n 且 $N \geq n$. 如果 $\mathbb{R}^n$ 中的框架 $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 没有真子列是紧框架, 则称 Φ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的主要紧框架. 如果存在 Φ 的一个真子列 Φ_1 , 它包含 p 个框架元仍然是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧框架, 则称框架 Φ 是 (N, p) -可剖分的, 此时, 整数 p 满足 $n \leq p \leq N - n$.

对于由 ST 算法生成的一致紧框架, 我们下面的定理:

定理 4.6 设 $n, N \in \mathbb{N}$, $\lambda = \frac{N}{n} \geq 2 - \frac{1}{n}$. 如果 Φ 是 $\mathbb{R}^n$ 中由 ST 算法生成的一致紧框架, 则 Φ 要么是主要一致紧框架, 要么可分解为

$$\Phi = [\Phi_1, \underbrace{E_n, E_n, \dots, E_n}_{L \uparrow}], \quad (4.2)$$

其中 Φ_1 是具有 $N - nL$ 个元的主要一致紧框架, $E_n = \{e_j\}_{j=1}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的标准正交基.

在条件 $\lambda = \frac{N}{n} \geq 2$ 下, 定理 4.6 的证明完全类似文献 [15] 中的证明, 这里省略它.

本文的第二个结果为下面的定理:

定理 4.7 设 $n, N > 0$, 给定框架算子的特征值 $\lambda_i \geq 2 - \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则在框架类 $F(N; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 中, 由 ST 算法在标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 下构造的可剖分一致紧框架 $\text{STF}(N; \frac{N}{n}, \frac{N}{n}, \dots, \frac{N}{n})$ 的最佳稀疏值为

$$N + 2(n - \gcd(N - nL, n)), \quad (4.3)$$

其中 L (如同 (4.2) 所示) 为可分离出的单位矩阵的个数, $\gcd$ (greatest common divisor) 表示最大公约数.

证明 假设 $\Phi \in F$ 为由 ST 算法构造的可剖分一致紧框架, 则由定理 4.6 知,

$$\Phi = [\Phi_1, \underbrace{E_n, E_n, \dots, E_n}_{L \uparrow}], \quad (4.4)$$

其中 $E_n = \{e_i\}_{i=1}^n$, 框架 Φ_1 是具有 $N - nL$ 个元的主要一致紧框架. 因此, 框架 Φ 的稀疏值可分为两部分来计算, 框架 Φ_1 的稀疏值和 $\underbrace{E_n, E_n, \dots, E_n}_{L \uparrow}$ 的稀疏值.

显然, $\underbrace{E_n, E_n, \dots, E_n}_{L \uparrow}$ 的稀疏值为 nL . 因此, 我们需求框架 Φ_1 的稀疏值.

令 $K = N - nL$ 且框架 Φ_1 的合成矩阵为 T_1^* . 假设 n 与 K 不互质且 $P = \gcd(K, n)$, 那么可令 $K = PK'$, $n = Pn'$, 则

$$\gcd(K', n') = \gcd\left(\frac{K}{P}, \frac{n}{P}\right) = \frac{1}{P} \gcd(K, n) = \frac{1}{P} \cdot P = 1,$$

从而, K' 与 n' 互质. 因此, ST 算法构造的合成矩阵 T_1^* 是由 P 个 M 块矩阵构成, 即

$$T_1^* = \begin{bmatrix} M & & & \\ & M & & \\ & & \ddots & \\ & & & M \end{bmatrix},$$

其中 M 是由 ST 算法输出的合成矩阵块. 由 ST 算法知, 每个 M 由 n' 维空间中的 K' 个向量构成. 因为 K' 与 n' 互质, 所以, 由定理 4.4 知, M 的稀疏值为 $K' + 2(n' - 1)$, 从而, 矩阵 T_1^* 的稀疏值为

$$P(K' + 2(n' - 1)) = PK' + 2P(n' - 1) = K + 2(n - P) = K + 2(n - \gcd(K, n)).$$

显然, 当 n 与 K 互质时, 合成矩阵 T_1^* 的稀疏值为 $K + 2(n - 1)$.

因此, (4.4) 的最佳稀疏值为

$$K + 2(n - \gcd(K, n)) + nL = N - nL + 2(n - \gcd(N - nL, n)) + nL = N + 2(n - \gcd(N - nL, n)).$$

证毕. □

参考文献

- 1 Gabor D. Theory of communications. J Inst Elec Engrg, 1946, 93: 429–457
- 2 Duffin R J, Schaeffer A C. A class of nonharmonic Fourier series. Trans Amer Math Soc, 1952, 72: 341–366
- 3 Daubechies I, Grossmann A, Meyer Y. Painless nonorthogonal expansions. J Math Phys, 1986, 27: 1271–1283
- 4 Chan R H, Riemensehneider S D, Shen L X, et al. Tight frame: An efficient way for high-resolution image reconstruction. Appl Comput Harmon Anal, 2004, 17: 91–115
- 5 Bolcskei H, Hlawatsch F, Feichtinger H G. Frame theoretic analysis of oversampled filter banks. IEEE Trans Signal Process, 1998, 46: 3256–3268
- 6 Heath R W, Paulraj A J. Linear dispersion codes for MIMO systems based on frame theory. IEEE Trans Signal Process, 2002, 50: 2429–2441
- 7 Casazza P G, Kovačević J. Uniform tight frames with erasures. Adv Comput Math, 2003, 18: 387–430
- 8 Casazza P G, Leon M T. Existence and construction of finite tight frames. J Concr Appl Math, 2006, 4: 277–289
- 9 Casazza P G, Fickus M, Mixon D G, et al. Constructing tight fusion frames. Appl Comput Harmon Anal, 2011, 30: 175–187
- 10 Calderbank R, Casazza P G, Heinecke A, et al. Sparse fusion frames: Existence and construction. Adv Comput Math, 2011, 35: 1–31
- 11 Casazza P G, Fickus M, Heinecke A, et al. Spectral tetris fusion frame constructions. J Fourier Anal Appl, 2012, 18: 828–851
- 12 Casazza P G, Heinecke A, Kornelson K, et al. Necessary and sufficient conditions to perform spectral tetris. Linear Algebra Appl, 2013, 438: 2239–2255
- 13 Li D F, Xue M Z. Bases and Frames in Banach Spaces. Beijing: Science Press, 2007
- 14 Casazza P G, Heinecke A, Krahmer F, et al. Optimally sparse frames. IEEE Trans Inform Theory, 2011, 57: 7279–7287
- 15 Lemvig J, Miller C, Okoudjou K A. Prime tight frames. Adv Comput Math, doi: 10.1007/S10444-013-9309-0, 2013

The optimal sparsity of frames based on Spectral Tetris algorithm

LI DengFeng & LIU ZiSheng

Abstract When a signal dimension is large, we are able to decrease a lot of additions and multiplications by using sparse frame to decompose the signal. Therefore, the study of the sparse frame is very meaningful. The sparsity of finite frames are introduced, and the sparse property of the frames which are constructed by Spectral Tetris algorithm is investigated in this paper. We first give optimal sparsity of Spectral Tetris frames, and then obtain optimal sparsity of divisible Spectral Tetris tight frames.

Keywords frame, sparse frame, divisible tight frame, sparsity

MSC(2010) 42C15, 42C40

doi: 10.1360/N012014-00068