基于动理学的低耗散通量分裂格式

献给林群教授 80 华诞

陈艺冰^{①②}, 江松^{①*}, 刘娜^{②③}

① 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094;

② 计算物理重点实验室, 北京 100088;

③ 中物院高性能数值模拟软件中心, 北京 100088

E-mail: chen_yibing@iapcm.ac.cn, jiang@iapcm.ac.cn, liu_na@iapcm.ac.cn

收稿日期: 2014-11-09; 接受日期: 2015-03-11; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11101047) 和中物院科学技术发展基金 (批准号: 2013A0202011) 资助项目

摘要 通量分裂格式具有简单、稳健等特点而备受大型工程应用 CFD 软件青睐, 但传统的通量分裂格式往往引入过多数值耗散, 特别对于接触间断和稀疏波等区域难以给出令人满意的解. 本文首先借鉴 Toro-Vazquez 通量分裂方法的思想, 将控制方程的通量分裂成对流项和压力项, 随后, 采用基于通量分裂的动理学方法分别进行离散. 其中对流项采用迎风型格式离散, 从而提高了接触间断处的分辨率. 压力项首先采用 NOK (non-oscillation kinetic) 格式进行离散, 而后为了进一步提高格式精度增加了碰撞项, 最终得到一种新的低耗散通量分裂格式 (LDK 格式). 新算法不仅形式简单而且稳健, 而且与传统通量分裂方法相比, 在接触间断具有更高的分辨率, 稀疏波具有更高精度. 数值算例给出了新方法与传统多种常用数值算法的比较结果, 证实了新方法的良好效果.

关键词 可压缩流 通量分裂 低耗散 动理学

MSC (2010) 主题分类 65M08, 74S10, 74H15

1 引言

迎风型格式是求解可压缩流体力学问题的主要方法之一, 主要包括 Godunov 型格式和通量分裂格式两大类. Godunov 型格式的基础是 Riemann 问题的近似解, 根据构造近似 Riemann 解的思想不同, 可以分为两大类: 一类采用不完整的近似 Riemann 解法器; 另一类采用完整的近似 Riemann 解法器. 所谓不完整的近似 Riemann 解, 即忽略流场中的部分特征结构, 例如, 这类方法中的典型代表 HLL^[1] (Harten-Lax-van Leer) 就忽略了接触间断波, 因此在接触间断处的分辨率很低. 完整的近似 Riemann 解, 顾名思义, 就是考虑了所有的特征结构, 因此通常比较精确, 但形式也复杂得多. 这类的方法的典型代表是 HLLC^[2] (restoration of the contact surface in the Harten-Lax-van Leer Riemann solver), 该算法在许多问题的数值模拟中体现了很好的效果. 但正如 Toro^[3]所指出的: 对于大双曲系统来说, 特别一旦考虑非守恒项时, 构造出完整的近似 Riemann 解法器是困难甚至不可能的.

与 Godunov 方法相比, 通量分裂格式更简单、计算耗费也更低, 这两个特点对大型实际应用 CFD 软件特别有吸引力. 这类格式的典型代表是 20 世纪 80 年代提出的 van Leer 格式^[4] 和 Steger-Warming

英文引用格式: Chen Y B, Jiang S, Liu N. Kinetic-theory-based low diffusion flux vector splitting scheme (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1217–1230, doi: 10.1360/N012014-00240

格式^[5], 这两个格式不仅简单而且稳健. 但与采用不完整近似 Riemann 解的 Godunov 方法类似, 通量分裂格式往往会在计算中带来过多的数值耗散, 特别对接触间断、稀疏波等难以给出令人满意的解, 这极大影响了方法的应用价值. 近年来, 有许多工作致力于改善这一缺陷. 早期比较重要的工作包括 AUSM 系列格式^[6,7] 和 Zha-Bilgen 格式^[8] 等. 这些算法明显地提高了原通量分裂格式在接触间断的分辨率, 但带来的副作用是削弱了稳健性, 例如, 在激波附近往往会带来非物理振荡. 2012 年, Toro 和 Vázquez^[9] 提出了新的一种通量分裂方法 (以下简称 TV 格式), 该算法在改善接触间断分辨率的同时能够很好地捕捉激波. 但该算法依然未能突破传统通量分裂算法的局限, 如对稀疏波的计算中依然带来过多的数值耗散.

从某种程度而言, 动理学方法可以看成是一类基于 Boltzmann 方程的通量分裂算法^[10]. 从不同的简化 Boltzmann 方程出发可以得到不同种类的动理学格式. 目前, 常见的有两大类动理学格式: 基于无碰撞 Boltzmann 方程的 KFVS (kinetic flux vector splitting) 格式^[11] 和基于 BGK 模型的 BGK 格式^[12]. 前者从算法和计算效果方面与 van Leer 格式都很接近, 因此也继承了传统通量分裂算法的优点: 简单、稳健, 但同时也是一种数值耗散比较大的格式. 后者可以看成是在 KFVS 格式基础上增加一个反耗散项, 从而很好地抑制了数值耗散. 但需要指出, 即使在线性常系数情形, BGK 格式也无法退化到完全迎风格式, 这意味着它无法精确捕捉静态的接触间断. 此外, 传统的动理学方法, 包括 KFVS 和 BGK 方法, 在求解描述可压缩流的 Euler 方程时在接触间断附近都会产生非物理的压力和速度振荡. 文献 [13] 对该振荡的产生原因进行了细致地分析, 并在理想气体状态方程情形对 KFVS 格式给出一种修正的方法, 可以抑制原格式在接触间断附近的压力和速度振荡; 随后, 文献 [14] 将其进一步推广到一般状态方程情形, 得到一种无振荡动理学格式 (NOK 格式). 但这种修正方法并无法改善 KFVS 型格式耗散过大的缺陷, 并且直接推广应用于 BGK 格式也受到限制. 本文将致力于在 NOK 格式的基础上进一步设计低耗散的通量分裂格式.

本项工作拟从动理学格式出发, 结合 TV 格式的思想, 构造低耗散的动理学 (LDK) 格式. 本文结构如下: 第 2 节给出控制方程和记号; 第 3 节简要回顾从通量分裂出发得到的动理学格式, 包括 KFVS、NOK 和 BGK 格式; 第 4 节介绍基于动理学的低耗散通量分裂格式; 第 5 节将给出新算法与目前常见的典型算法比较的数值算例; 最后第 6 节给出结论.

2 控制方程与记号

以一维情形为例, 描述可压缩流体力学问题的 Euler 方程组可以写成

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial F(\vec{W})}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

其中

$$\vec{W} = (\rho, \rho U, \rho E)^T, \quad F(\vec{W}) = (\rho U, \rho U^2 + P, \rho EU + PU)^T.$$

这个系统必须增加状态方程才能封闭:

$$P = P(\rho, e). \quad (2.2)$$

在理想气体情形,

$$p = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)\left(\rho E - \frac{1}{2}\rho U^2\right), \quad (2.3)$$

其中 ρ, U, P, E, e 和 γ 分别是密度、流体速度、压力、总能、内能和理想气体多方指数.

假设空间计算网格是一致的, 即空间网格长度为 Δx , 时间步长为 Δt , 则标准的有限体积格式可以写成

$$\vec{W}_j^{n+1} = \vec{W}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}). \quad (2.4)$$

对上述格式而言, 求解的关键主要在于如何构造数值通量 $F_{j+\frac{1}{2}}$.

3 通量分裂动理学格式

本节将简单回顾基于通量分裂的动理学格式, 它将是下一节构造低耗散动理学格式的基础. 关于从通量分裂角度推导动理学格式的详细过程可参见文献 [10].

从统计力学角度而言, 假设每个计算网格中的粒子处于平衡态, 则这些粒子近似地满足 Maxwell-Boltzmann 分布函数:

$$g = \rho \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda(u-U)^2}, \quad (3.1)$$

其中 U 是流体速度, $\lambda = \frac{m}{2kT}$, m 是分子质量, k 是 Boltzmann 常数, T 是温度. 粒子速度的值域是 $(-\infty, \infty)$. 一个计算网格中的粒子可以按分为两类, 一类是速度为正的粒子, 一类是速度为负的粒子, 则穿过单元边界的粒子有两部份, 一部分是左边单元速度为正的粒子, 另一部分是右边单元速度为负的粒子. 因此, 数值通量由这些穿过单元边界粒子之间的相互作用机制所决定.

首先定义

$$\tilde{g} = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda(u-U)^2} \quad (3.2)$$

和

$$\langle \cdots \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cdots) \tilde{g} du, \quad \langle \cdots \rangle_+ = \int_0^{+\infty} (\cdots) \tilde{g} du, \quad \langle \cdots \rangle_- = \int_{-\infty}^0 (\cdots) \tilde{g} du, \quad (3.3)$$

并记

$$\langle u^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n \tilde{g} du, \quad (3.4)$$

则有

$$\langle u^{n+2} \rangle = U \langle u^{n+1} \rangle + \frac{n+1}{2\lambda} \langle u^n \rangle. \quad (3.5)$$

易知

$$\langle u^0 \rangle = 1, \quad \langle u^1 \rangle = U. \quad (3.6)$$

构造通量分裂的动理学格式首先需要将单元里的粒子分裂为两部分, 则有

$$\langle u^0 \rangle_+ = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(-\sqrt{\lambda}U), \quad \langle u^0 \rangle_- = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\lambda}U), \quad (3.7)$$

以及

$$\langle u^1 \rangle_+ = U \langle u^0 \rangle_+ + \frac{e^{-\lambda U^2}}{2\sqrt{\pi\lambda}}, \quad \langle u^1 \rangle_- = U \langle u^0 \rangle_- - \frac{e^{-\lambda U^2}}{2\sqrt{\pi\lambda}}. \quad (3.8)$$

类似地, 可以将控制方程的通量分裂为两部分:

$$\begin{pmatrix} \rho U \\ \rho U^2 + P \\ \rho EU + PU \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho U^2 + P \\ \rho EU + PU \end{pmatrix}^+ + \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho U^2 + P \\ \rho EU + PU \end{pmatrix}^- \triangleq F^+ + F^-,$$

其中

$$F^+ = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U \\ \rho E \end{pmatrix} \langle u^1 \rangle_+ + \begin{pmatrix} 0 \\ P \langle u^0 \rangle_+ \\ \frac{1}{2} P \langle u^1 \rangle_+ + \frac{1}{2} P U \langle u^0 \rangle_+ \end{pmatrix},$$

$$F^- = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U \\ \rho E \end{pmatrix} \langle u^1 \rangle_- + \begin{pmatrix} 0 \\ P \langle u^0 \rangle_- \\ \frac{1}{2} P \langle u^1 \rangle_- + \frac{1}{2} P U \langle u^0 \rangle_- \end{pmatrix}.$$

KFVS 格式求解的是无碰撞 Boltzmann 方程, 因此, 数值通量可以简单地写成

$$F_{j+\frac{1}{2}} = F_j^+ + F_{j+1}^-. \quad (3.9)$$

对于 BGK 格式, 则还需要考虑碰撞项, 首先根据守恒律计算平衡态,

$$\begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \bar{U} \\ \bar{\rho} \bar{E} \end{pmatrix}_{j+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U \\ \rho E \end{pmatrix}_j^+ + \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U \\ \rho E \end{pmatrix}_{j+1}^-,$$

则平衡态时的数值通量为

$$F_{j+\frac{1}{2}}^E = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \bar{U} \\ \bar{\rho} \bar{U}^2 + \bar{P} \\ \bar{\rho} \bar{E} \bar{U} + \bar{P} \bar{U} \end{pmatrix}.$$

BGK 格式的数值通量可以看作是平衡态和非平衡态之间的线性组合:

$$F_{j+\frac{1}{2}} = \eta F_{j+\frac{1}{2}}^K + (1 - \eta) F_{j+\frac{1}{2}}^E, \quad (3.10)$$

其中 $\eta \in [0, 1]$. 平衡态可以看作是在 KFVS 格式上增加的一个反耗散机制, η 的选取会对计算结果有重要的影响, 当 η 趋近于 1 时, 格式的耗散性增强, 反之则格式的耗散性减少. 由于格式的耗散性减少会影响格式的稳定性, 因此 η 不能无限趋于 0. Xu^[15] 给出了一个能够兼顾格式耗散型和稳定性的经验参数:

$$\eta = e^{\frac{-1}{C_1 + \min(1, C_2 \frac{|P_R - P_L|}{P_R + P_L})}}, \quad (3.11)$$

其中 $C_1 = 0.05$, $C_2 = 5$. 该参数兼顾了平衡态和非平衡态, 在耗散性与稳定性之间获得一个很好的平衡, 因此在实际计算中得到了广泛使用.

在上述 KFVS 和 BGK 格式的计算中, 通常取

$$\lambda_j = \frac{\rho_j}{2P_j}, \quad \lambda_{j+1} = \frac{\rho_{j+1}}{2P_{j+1}}.$$

但这种取法不满足文献 [13] 给出的避免接触间断处非物理速度和压力振荡的必要条件, 即

$$\lambda_j = \lambda_{j+1} \triangleq \lambda_{j+\frac{1}{2}}. \quad (3.12)$$

根据此必要条件, 文献 [14] 给出了一种通用的修正方式:

$$\lambda_{j+\frac{1}{2}} = \min \left\{ \frac{1}{c_j^2}, \frac{1}{c_{j+1}^2} \right\}, \quad (3.13)$$

其中 c 是声速. 这种修正方式可以适用于一般状态方程, 具有较广泛的应用范围.

4 基于动理学格式的低耗散通量分裂格式

本节介绍从动理学出发构造低耗散通量分裂 (LDK) 格式, 共分为三步.

4.1 分裂控制方程

首先借鉴 TV 格式的思想, 将通量分裂为对流项和压力项, 即

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}(\vec{W})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}(\vec{W})}{\partial x} = 0, \quad (4.1)$$

其中

$$\vec{A}(\vec{W}) = U \left(\rho, \rho U, \frac{1}{2} \rho U^2 \right)^T \quad (4.2)$$

和

$$\vec{P}(\vec{W}) = (0, P, \rho e U + P U)^T. \quad (4.3)$$

对应的有限体积格式可以写成:

$$\vec{W}_j^{n+1} = \vec{W}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\vec{A}_{j+\frac{1}{2}} - \vec{A}_{j-\frac{1}{2}}] - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\vec{P}_{j+\frac{1}{2}} - \vec{P}_{j-\frac{1}{2}}]. \quad (4.4)$$

4.2 离散对流项

为了减少接触间断处的数值耗散, 采用迎风型格式离散对流项, 即取

$$\vec{A}_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} U_{j+\frac{1}{2}} \left(\rho, \rho U, \frac{1}{2} \rho U^2 \right)_j^T, & U_{j+\frac{1}{2}} > 0, \\ U_{j+\frac{1}{2}} \left(\rho, \rho U, \frac{1}{2} \rho U^2 \right)_{j+1}^T, & U_{j+\frac{1}{2}} < 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

上述格式与 TV 格式相同, 但如何确定 $U_{j+\frac{1}{2}}$ 则是完全不同的途径. 本文从动理学角度出发来构造这一项. 一种直观的想法是采用 BGK 格式构造平衡态的算法, 即

$$U_{j+\frac{1}{2}} = \frac{(\rho U)_{j+\frac{1}{2}}}{\rho_{j+\frac{1}{2}}}. \quad (4.6)$$

但正如文献 [13] 指出的一样, 采用这样的格式会导致即使 $U_j = U_{j+1} \triangleq \text{const}$, $P_j = P_{j+1}$, 但只要 $\rho_j \neq \rho_{j+1}$, 就一定会有 $U_{j+\frac{1}{2}} \neq \text{const}$, 从而会在接触间断附近产生振荡. 因此, 必须对计算 $U_{j+\frac{1}{2}}$ 的算法进行修正. 事实上, 由于

$$\rho_{j+\frac{1}{2}} = \rho_j \langle u^0 \rangle_{j,+} + \rho_{j+1} \langle u^0 \rangle_{j+1,-}, \quad (\rho U)_{j+\frac{1}{2}} = \rho_j \langle u^1 \rangle_{j,+} + \rho_{j+1} \langle u^1 \rangle_{j+1,-},$$

以及 (同传统的动理学格式一样) $\lambda = \frac{\rho}{2P}$, 经过简单变换, 有

$$\rho \langle u^1 \rangle_{\pm} = \rho U \langle u^0 \rangle_{\pm} \pm \rho \frac{e^{-\lambda U^2}}{2\sqrt{\pi\lambda}} = \rho U \langle u^0 \rangle_{\pm} \pm P \frac{e^{-\lambda U^2}}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\lambda}.$$

然后再按文献 [13] 所提的避免振荡的必要条件进行修正, 得

$$(\rho U)_{j+\frac{1}{2}} = \rho_j U_j \langle u^0 \rangle_{j,+} + \rho_{j+1} U_{j+1} \langle u^0 \rangle_{j+1,-} + P_j \frac{e^{-\lambda_{j+\frac{1}{2}} U_j^2}}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\lambda_{j+\frac{1}{2}}} - P_{j+1} \frac{e^{-\lambda_{j+\frac{1}{2}} U_{j+1}^2}}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\lambda_{j+\frac{1}{2}}}, \quad (4.7)$$

其中 λ 取值同 (3.13).

至此得到了对流项的数值离散格式.

4.3 离散压力项

压力项首先采用 KFVS 型格式进行离散, 正如上一节所示, 有

$$P_{j+\frac{1}{2}} = P_j \langle u^0 \rangle_{j,+} + P_{j+1} \langle u^0 \rangle_{j+1,-}$$

和

$$(\rho e U)_{j+\frac{1}{2}} = (\rho e)_j \langle u^1 \rangle_{j,+} + (\rho e)_{j+1} \langle u^1 \rangle_{j+1,-},$$

以及

$$(PU)_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} P_j \langle u^1 \rangle_{j,+} + \frac{1}{2} P_{j+1} \langle u^1 \rangle_{j+1,-} + \frac{1}{2} P_j U_j \langle u^0 \rangle_{j,+} + \frac{1}{2} P_{j+1} U_{j+1} \langle u^0 \rangle_{j+1,-}.$$

需要指出的是, 如果仅仅到此为止, 那么其计算效果与 TV 格式效果相当, 即在接触间断处的分辨率确实比传统的通量分裂格式有明显改善, 但依然在稀疏波等光滑区带来过多的耗散. 为了更进一步提高精度, 结合 BGK 格式的思想, 对压力项考虑碰撞效应以增加反耗散机制. 在理想气体情形, 由于

$$\rho e U = \frac{PU}{\gamma - 1},$$

令 $\bar{P}\bar{U} = P_{j+\frac{1}{2}} U_{j+\frac{1}{2}}$, 则 PU 项的新离散取为

$$(PU)_{j+\frac{1}{2}}^{\text{new}} = \eta (PU)_{j+\frac{1}{2}} + (1 - \eta) \bar{P}\bar{U},$$

其中 $\eta \in [0, 1]$. 需要指出, 同 BGK 格式一样, 当 η 趋于 1 时, 格式耗散增强, 反之则降低, 因此, η 不能无限趋于 0, 否则会影响格式的稳定性. 实际计算中我们仍采用 (3.11), 至此得到了压力项的数值离散格式. 这样, 我们就完成了低耗散通量分裂 (LDK) 格式的构造.

5 数值算例

为了考察 LDK 格式的特点, 与当前常用算法进行比较是必要的. 由于 Toro 在文章中给出了一种效果更好的加权 TV 格式 (TV-AWS), 因此, 本文最终选择与 TV-AWS 格式、NOK 格式、BGK 格式和 HLLC 格式进行比较. 下面给出与文献 [9] 中的六个标准算例比较的结果, 然后给出两个极具挑战性的典型算例: Collela-Woodward 算例和 Shu-Osher 算例. 以下所有算例状态方程均采用理想气体状态方程, 所有格式采用的 CFL 数均为 0.9, 算例 1-6 的计算区域为 $[0,1]$. 为了更好地与现有格式进行对比, 将所有的格式分为两组, 第一组是 NOK 格式、TV-AWS 格式和 LDK 格式; 第二组是 BGK 格式、HLLC 格式和 LDK 格式.

算例 1 定常接触间断问题.

初值为

$$(\rho, U, P) = \begin{cases} (1.4, 0.0, 1.0), & x < 0.5, \\ (1.0, 0.0, 1.0), & x > 0.5. \end{cases} \quad (5.1)$$

计算时刻为 $t = 0.1$.

计算结果见图 1. 很显然, NOK 在接触间断附近引入过多的数值耗散; BGK 很大程度降低了这

图 1 算例 1 的计算结果

种耗散, 但由于无法退化到完全迎风, 因此无法精确求解这种定常接触间断问题, 另外, 正如文献 [13] 所指出的, BGK 在接触间断附近存在压力振荡, 仅仅依靠调整 η 并无法彻底消除振荡, 并且这个现象在后面的算例中普遍存在. 另外三种格式 TV-AWS、HLLC 和 LDK 则可以精确地求解这类问题.

算例 2 Sonic Glitch 问题.

初值为

$$(\rho, U, P) = \begin{cases} (1.0, 0.75, 1.0), & x < 0.3, \\ (0.125, 0.0, 0.1), & x > 0.3. \end{cases} \quad (5.2)$$

计算时刻为 $t = 0.2$.

这是一个普通的激波管问题, 包括稀疏波、接触间断和激波. 许多传统的 Godunov 方法在稀疏波处会出现一个假的间断, 即所谓 Sonic Glitch 问题. 计算结果见图 2. 首先, 所有的格式都能很好地克服 sonic glitch 问题, 表现出了很好的性质. 从图 2(a) 可以看出, 无论是稀疏波、接触间断还是激波处, TV-AWS 和 NOK 格式都基本一致, 说明文献 [9] 对传统通量分裂格式的改进并非所有情形都能工作. 另一方面, 可以看出 LDK 格式明显优于这两个格式, 并与 BGK 和 HLLC 相当.

图 2 算例 2 的计算结果

算例 3 低密度问题.

初值为

$$(\rho, U, P) = \begin{cases} (1.0, -2.0, 0.4), & x < 0.5, \\ (1.0, 2.0, 0.4), & x > 0.5. \end{cases} \quad (5.3)$$

计算时刻为 $t = 0.15$.

这是一个双稀疏波问题, 在中间会产生一个低密度区. 图 3 的结果表明, 在这个问题上, NOK 格式、BGK 格式和 LDK 格式无论密度还是压力都能给出比较准确的解, 其中 BGK 格式和 LDK 格式计算结果接近, 更优于 NOK 格式, 而 TV-AWS 格式和 HLLC 格式都未能准确地给出速度的解.

算例 4 强激波问题.

初值为

$$(\rho, U, P) = \begin{cases} (1.0, 0.0, 1000.0), & x < 0.5, \\ (1.0, 0.0, 0.01), & x > 0.5. \end{cases} \quad (5.4)$$

计算时刻为 $t = 0.012$. 由于初始间断处两侧压力差很大, 会产生一个很强的激波. 图 4 表明, 所有格式

图 3 算例 3 的计算结果

图 4 算例 4 的计算结果

都能很好地适应这样的强激波, 在接触间断处, TV-AWS 格式优于 NOK 格式, 而 LDK 格式优于 TV-AWS 格式, LDK 格式与 BGK 格式和 HLLC 格式相近.

算例 5 双激波问题.

初值为

$$(\rho, U, P) = \begin{cases} (5.99924, 19.5975, 460.984), & x < 0.4, \\ (5.99924, -6.19633, 46.095), & x > 0.4. \end{cases} \quad (5.5)$$

计算时刻为 $t = 0.035$.

这个问题的解包括两个反向激波和一个接触间断, 结果见图 5, 其结论与算例 4 类似.

算例 6 非孤立静态接触间断问题.

初值为

$$(\rho, U, P) = \begin{cases} (1.0, -19.59745, 1000), & x < 0.8, \\ (1.0, -19.59745, 0.01), & x > 0.8. \end{cases} \quad (5.6)$$

计算时刻为 $t = 0.012$. 在这个问题的解中, 接触间断与激波位置很接近, 通常的通量格式对接触间断处分辨率很差, 如图 6 中的 NOK 格式所表现得一样. 而 TV-AWS 格式确实很好地克服这一缺陷. LDK 格式、BGK 格式和 HLLC 格式也均能很好地求解这一问题, 其效果接近.

图 5 算例 5 的计算结果

图 6 算例 6 的计算结果

算例 7 Shu-Osher 问题^[16].

初值为

$$(\rho, U, P) = \begin{cases} (3.85714, 2.62936, 10.33333), & x < -4.0, \\ (1.0 + 0.2\sin(5x), 0.0, 1.0), & x > -4.0. \end{cases} \quad (5.7)$$

计算时刻为 $t = 1.8$. 这个问题涉及复杂的不同波之间的相互作用, 往往用来考察格式的稳健性和精度. 从图 7 可以明显地看到, NOK 格式和 LDK 格式效果相近, 都引入了比较大的数值耗散. 另外三种格式明显比前两种好, LDK 格式略优于 BGK 格式和 HLLC 格式.

算例 8 Colella-Woodward 问题^[17].

初值为

$$(\rho, U, P) = \begin{cases} (1.0, 0.0, 1000), & x < 0.1, \\ (1.0, 0.0, 0.01), & 0.1 < x < 0.9, \\ (1.0, 0.0, 100), & x > 0.9. \end{cases} \quad (5.8)$$

计算时刻为 $t = 0.038$.

这个问题的两端都是固壁, 因此涉及不同种类的波与固壁, 以及不同的波之间的相互作用, 对格式稳健性是一个挑战. 对此问题, 所有的格式都能很好工作, 说明稳健性都较好. 从图 8 可以看出其结论与算例 7 是类似的: TV-AWS 格式在接触间断处获得比 NOK 格式更好的分辨率, 而另外三种格式明显优于前两种格式, 其中 LDK 格式在部分区域略优于 BGK 格式和 HLLC 格式.

图 7 算例 7 的计算结果

图 8 算例 8 的计算结果

6 结论与讨论

本项工作借鉴 Toro-Vazquez 通量分裂方法的思想, 从动理学角度出发设计了一种新的低耗散动理学格式. 新方法不仅保持原 NOK 方法简单、稳健的优点, 而且克服了该方法在接触间断和光滑区耗散过大的缺陷. 本文还系统给出当前常用的几种格式的比较结果, 以考察各类方法的特点. 其中 NOK 格式是基于动理学思想的通量分裂格式, 它具有传统的通量分裂格式的鲜明特点: 简单、稳健, 但在接触间断和稀疏波附近引入过大的数值耗散; TV-AWS 格式是 Toro 等人提出的新型的通量分裂格式, 明显提高了接触间断附近的分辨率, 但依然无法改善稀疏波的精度. HLLC 考虑了解所有的特征结构, 是目前公认最好的完全的近似 Riemann 解法器之一, 但它依然存在缺陷: 如算例 3 所展示的一样, 在该算例上它无法精确地描述速度场. BGK 格式是目前最成功的动理学格式, 它克服了传统通量分裂型的动理学格式的不足, 明显降低了接触间断和稀疏波区的数值耗散, 但该格式在接触间断附近存在的非物理振荡难以自然地消除. 本文新提出的 LDK 格式从通量分裂思想出发, 借鉴了 NOK 格式、TV-AWS 和 BGK 格式的思想, 得到了一种低耗散动理学格式, 众多的数值算例证实该方法不仅保持了原 NOK 格式的优点: 简单和稳健, 而且明显提高了对接触间断和稀疏波的数值模拟精度, 有望得到更广泛的应用.

参考文献

- 1 Harten A, Lax P D, van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Rev*, 1983, 25: 35–61
- 2 Toro E F, Spruce M, Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock Waves*, 1994, 4: 25–34
- 3 Tokareva S A, Toro E F. HLLC-type Riemann solver for the Baer-Nunziato equations of compressible two-phase flow. *J Comput Phys*, 2010, 229: 3573–3604
- 4 van Leer B. Flux-vector splitting for the Euler equations. In: *Eighth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics Lecture Notes in Physics*, vol. 170. Berlin: Springer-Verlag, 1982, 507–512
- 5 Steger J L, Warming R F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods. *J Comput Phys*, 1981, 40: 263–293
- 6 Liou M S. A sequel to AUSM: AUSM+. *J Comput Phys*, 1996, 129: 364–382
- 7 Liou M S, Steffen C J. A new flux splitting scheme. *J Comput Phys*, 1993, 107: 23–39
- 8 Zha G C, Bilgen E. Numerical solutions of Euler equations by using a new flux vector splitting scheme. *Internat J Numer Methods Fluids*, 1993, 17: 115–144
- 9 Toro E F, Vázquez-Cendón M E. Flux splitting schemes for the Euler equations. *Comput Fluids*, 2012, 70: 1–12
- 10 Xu K. Gas-kinetic theory-based flux splitting method for ideal magnetohydrodynamics. *J Comput Phys*, 1999, 153: 334–352
- 11 Pullin D I. Direct simulation methods for compressible inviscid ideal gas flow. *J Comput Phys*, 1980, 34: 231–244
- 12 Prendergast K H, Xu K. Numerical hydrodynamics from gas kinetic theory. *J Comput Phys*, 1993, 109: 53–66
- 13 Chen Y B, Jiang S. Modified kinetic flux vector splitting schemes for compressible flows. *J Comput Phys*, 2009, 228: 3582–3604
- 14 Chen Y B, Jiang S. A non-oscillatory kinetic scheme for multi-component flows with the equation of state for a stiffened gas. *J Comput Math*, 2011, 6: 661–683
- 15 Xu K. Gas-kinetic schemes for unsteady compressible flow simulations. VKI Report. [Http://www.math.ust.hk/makxu](http://www.math.ust.hk/makxu), 1998
- 16 Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *J Comput Phys*, 1988, 77: 439–471
- 17 Colella P, Woodward P R. The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations. *J Comput Phys*, 1984, 54: 174–201

Kinetic-theory-based low diffusion flux vector splitting scheme

CHEN YiBing, JIANG Song & LIU Na

Abstract Flux vector splitting (FVS) schemes are simple and robust. These two advantages are very attractive for large engineering application CFD softwares. However, traditional FVS schemes often introduce over diffusions and cannot give satisfied solutions for the contact discontinuities and rarefaction waves. In this article, following the idea of Toro-Vazquez, we firstly divide the flux into two parts: convective terms and pressure terms. Then the flux vector splitting kinetic scheme is used to construct the numerical scheme for both terms. Upwind scheme is chosen to discretize the convective terms to improve the resolution near the contact discontinuities. NOK scheme is utilized to discretize the pressure terms, and the collision terms are also added to improve the accuracy. Finally, a new low diffusion kinetic (LDK) flux vector splitting scheme is obtained. This new scheme is simple and robust, and has higher resolution near the contact discontinuities and higher accuracy near the rarefaction waves compared with the traditional FVS. Numerical tests shows the comparisons between some current numerical schemes and the new scheme, and demonstrate that this new scheme behaves well in all the test cases.

Keywords compressible flows, kinetic scheme, low diffusion, flux vector splitting scheme

MSC(2010) 65M08, 74S10, 74H15

doi: 10.1360/N012014-00240