Banach 空间的逼近紧性与度量投影算子的连续性及其应用

陈述涛¹ Henryk Hudzik² Wojciech Kowalewski² 王玉文^{1*} Marek Wisła²

(1. 哈尔滨师范大学数学与计算机科学学院, 曾远荣泛函研究中心, 哈尔滨 150080; 2. Faculty of Mathematics and Computer Science, Adam Mickiewicz University, Umultowska 87, 61-614 Poznań, Poland)

摘要 首先给出赋范线性空间中的非空集合 C 的逼近紧性的等价描述. 如所周知, 如果 C 是 Banach 空间 X 中的一个逼近紧的半 Chebyshev 闭集, 那么由 X 到 C 的度量投影算子 π_C 是连续的. 当 X 是中点局部一致凸的 Banach 空间, 利用 Banach 空间几何的技巧证得: C 的逼近紧性对投影算子 π_C 的连续性也是必要的. 利用这个一般结论给出: 当 T 是由逼近紧且严格凸的 Banach 空间 X 到中点局部一致凸 Banach 空间 Y 的有界线性算子时, T 有连续的 Morse-Penrose 度量广义逆 T^+ 的充分必要条件.

关键词 逼近紧性 连续性 度量投影算子 中点局部一致凸

MSC(2000) 主题分类 46B20

1 引言

设 X 为一个实赋范线性空间. 令 $B(X)$ 和 $S(X)$ 为 X 中的闭单位球和单位球面, 令 $B(x, r)$ 为以 x 为中心、半径为 $r > 0$ 的闭球.

定义 1^[1, 2] X 的一个非空子集 C 是逼近紧的, 是指对任意的 $\{x_n\} \subset C$ 和任意的 $y \in X$, 使得如果 $\|x_n - y\| \rightarrow \text{dist}(y, C) := \inf \{\|x - y\| : x \in C\}$, $\{x_n\}$ 就有一个 Cauchy 列. X 是逼近紧的, 如果 X 的任意非空闭凸子集都是逼近紧的.

回忆逼近紧的历史和相关的定义. 这个定义首先由 Jefimow 和 Stechkin^[2] 提出, 作为 Banach 空间的一个性质用以保证任意的 $x \in X$ 都在非空闭凸集 C 中有一个最佳逼近元素. 文献 [3] (虽然没有证明) 中提到 Banach 空间 X 的子集 C 的逼近紧性也保证了投影算子 π_C 的连续性. 完全凸 Banach 空间是由 Fan 与 Glicksberg^[4] 定义的. 文献 [5] 证明了完全凸 Banach 空间是逼近紧的. 而文献 [6] 已经证明了 Banach 空间 X 的逼近紧性等价于 X 是自反的而且具有 Kadec-Klee 性质 (也称 (H) 性质). (H) 性质源于文献 [7], 而在文献 [8] 中提到的性质 H_μ , 即把 (H) 性质中的弱收敛改为测度局部收敛, 与 (H) 性质相关. 由文献 [9] 中的结论, 一个 Banach 空间 X 是逼近紧的必须且只需它有 drop 性质 (由 Rolewicz 在文献 [10]

收稿日期: 2006-11-15; 接受日期: 2007-07-19

国家自然科学基金 (批准号: 10471032, 10671049) 和波兰国家科学研究基金 (批准号: 1P03A1127) 资助项目

*E-mail: wangyuwen1950@yahoo.com.cn

引进). 这时, 我们非常自然地会问在什么 Banach 空间中的非空有界凸闭子集 C 的逼近紧性对于投影算子 π_C 的连续性是必要的? 我们可以证明对于中点局部凸 Banach 空间这个结论是成立的. 本文的主要结论在不恒定方程理论和广义逆理论中有重要应用. 我们会在文章最后一部分给出一个应用实例.

定义 2^[11] X 称为中点局部一致凸 (MLUR), 对任意 $x_0, x_n, y_n \in S(X)$ ($n = 1, 2, \dots$), 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n - 2x_0\| = 0$, 就有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

定义 3^[12] 设 X 为一个赋范线性空间且 $K \subset X$. 由

$$\mathcal{P}_K(x) = \{y \in K : \|x - y\| = d_K(x)\}, \quad \forall x \in X$$

定义的集值映射 $\mathcal{P}_K : X \rightarrow K \cup \{\emptyset\}$ 称为集值度量投影, 这里 $d_K(x) = \inf_{y \in K} \|x - y\|$. 有时也把 $\mathcal{P}_K(x)$ 记为 $\mathcal{P}(K; x)$.

如果对任一 $x \in X$, $\mathcal{P}_K(x) \neq \emptyset$, 则称 K 是迫近的. 如果对任一 $x \in X$, $\mathcal{P}_K(x)$ 至多是单点集, K 则称为半 Chebyshev 的. 如果 K 是迫近的且半 Chebyshev 的, 则称 K 为 Chebyshev 集. 记 π_K 为集值映射的 $\mathcal{P}_K$ 的选择, 这里的单值映射 $\pi_K : \mathcal{D}(\pi_K) \rightarrow K$, $\mathcal{D}(\pi_K) = \{x \in X : \mathcal{P}_K(x) \neq \emptyset\}$, 对任意 $x \in \mathcal{D}(\pi_K)$, $\pi_K(x) \in \mathcal{P}_K(x)$. 特别地, 当 K 是一个 Chebyshev 集, 则对任意 $x \in X$, $\mathcal{D}(\pi_K) = X$, $\mathcal{P}_K(x) = \{\pi_K(x)\}$. 映射 π_K (或 $\pi(K; \cdot)$) 称为由 X 到 K 的度量投影或度量投影算子.

定义 4 (文献 [12], p. 73) X 中集合 G 称为一个太阳集, 如果对 $y_0 \in \mathcal{P}_G(x)$, 任意 $\lambda \in [1, \infty)$, 有

$$y_0 \in \mathcal{P}_G(\lambda x + (1 - \lambda)y_0).$$

命题 5 (文献 [12], 定理 5.1) 令 C 为赋范线性空间 X 中的一个凸集, 令 $x \in X \setminus \overline{C}$, $y_0 \in C$. 我们有: $y_0 \in \mathcal{P}_C(x)$ 当且仅当存在一个泛函 $x^* \in X^*$, 使得

- (i) $\|x^*\| = 1$;
- (ii) $\langle x^*, y_0 - y \rangle \geq 0$ 对所有的 $y \in C$;
- (iii) $\langle x^*, x - y_0 \rangle = \|x - y_0\|$.

命题 6 (文献 [12], p. 73) 在一个光滑赋范线性空间 X 中, 每一个迫近太阳集都是凸的.

命题 7 (文献 [12], p. 67) 设 X 是一个 Banach 空间. X 中每一闭凸集 C 是具有连续度量映射 π_C 的 Chebyshev 集当且仅当

- (i) X 是自反的;
- (ii) 序列 $\{x_n\} \subset S(X)$, $\{x_n^*\} \subset S(X^*)$, $\langle x_n^*, x_n \rangle = 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 若按 $\sigma(X^*, X)$ 拓扑, $x_n^* \rightarrow x_0^*$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, C_{x_0^*} \cap C_{x_n^*}) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_0, C_{x_0^*} \cap C_{x_n^*}) = 0$ 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 对 $n=0, 1, 2, \dots$,

$$C_{x_n^*} = \{x \in X : \langle x_n^*, x \rangle = 1\}.$$

定义 8 (文献 [12], p. 68) 称 X 中的一个凸集 C 具有性质 (P), 如果对任意 $x \in C$, $z \in X$, $x+z \in C$, 存在一个常数 $b = b(x, z) > 0$ 和 $c = c(x, z) > 0$, 使得对所有 $y \in C \cap \text{Int}B(x, b)$, $y + cz \in C$. 如果 $B(X)$ 具有性质 (P), 则称 X 具有性质 (P).

命题 9 (文献 [12], p. 68) 如果 X 具有性质 (P), 且 C 是 X 中的一个具有性质 (P) 的逼近紧凸集, 则集值投影 $\mathcal{P}_C$ 是连续的.

命题 10(文献 [12], 定理 5.1) 对光滑一致凸 Banach 空间 X 中任意集合 C , 下列各项是等价的:

- (i) C 是凸且闭的;
- (ii) C 是弱闭 Chebyshev 集;
- (iii) C 逼近紧 Chebyshev 集.

命题 11^[6] 一个 Banach 空间 X 是逼近紧的当且仅当 X 是自反的且具有性质 (H).

2 主要定理

首先引入一个 Banach 空间中逼近紧集的等价条件, 以便用于主要结果的证明 (定理 13).

引理 12 X 中的一个非空集 C 是逼近紧的当且仅当对任意 $y \in X$ 和任意 $\{x_n\} \subset C$, $\{y_n\} \subset X$, 如果

- (i) $y_n \rightarrow y$, 当 $n \rightarrow \infty$;
- (ii) 当 $n \rightarrow \infty$, $\|x_n - y_n\| \rightarrow \text{dist}(y, C)$, 则 $\{x_n\}$ 有一个 Cauchy 子列.

证明 必要性. 假设 C 是逼近紧的. 对任意 $y \in X$ 和任意的 $\{x_n\} \subset C$, $\{y_n\} \subset X$, 使得 (i) $y_n \rightarrow y$, $n \rightarrow \infty$; (ii) $\|x_n - y_n\| \rightarrow \text{dist}(y, C)$, $n \rightarrow \infty$. 那么

$$\text{dist}(y, C) \leq \|x_n - y\| \leq \|x_n - y_n\| + \|y_n - y\| \rightarrow \text{dist}(y, C), \quad n \rightarrow \infty,$$

则有 $\|x_n - y\| \rightarrow \text{dist}(y, C)$, $n \rightarrow \infty$. 由假设, $\{x_n\}$ 有一个 Cauchy 子列.

充分性是显然的.

尽管下面证明的定理是已知的 (已经没有证明的在文献 [3] 中出现), 为了完整, 下面给出其简短证明:

定理 13 设 X 为 Banach 空间, C 是 X 中的一个半 Chebyshev 闭子集. 如果 C 是逼近紧的, 则 C 是 X 的一个 Chebyshev 子集且度量投影 π_C 是连续的.

证明 固定 $y \in X$, 取一个最小化序列 $\{x_n\} \subset C$, 使得 $\|x_n - y\| \rightarrow \text{dist}(y, C)$, $n \rightarrow \infty$. 由于 C 在 X 中是逼近紧的, 所以 $\{x_n\}$ 有一个 Chebyshev 子列 $\{x_{n_k}\}$. 由 X 的完备性, 存在 $x \in X$, 使得 $x_{n_k} \rightarrow x$, $n \rightarrow \infty$. 由 C 的闭性有 $x \in C$, 则 $\|x - y\| = \text{dist}(y, C)$ 且 $x \in C$, 即 $x \in \mathcal{P}_C(y)$. 这样 C 在 X 中是逼近的. 但是 C 也是 X 中一个半 Chebyshev 子集, 所以 C 也是 X 中的一个 Chebyshev 子集.

现在我们来证明 π_C 的连续性. 对 X 中任意 $x_0 \in X \setminus C$ 和任意 $\{x_n\}$, $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$). 由于 C 是一个 Chebyshev 子集, 度量投影 $\pi_C(x_n)$ 和 $\pi_C(x)$ 存在. 由距离函数的连续性, 有

$$\|x_n - \pi_C(x_n)\| = \text{dist}(x_n, C) \rightarrow \text{dist}(x_0, C) = \|x_0 - \pi_C(x_0)\|, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

假设 $\pi_C(x_n) \not\rightarrow \pi_C(x_0)$, $n \rightarrow \infty$. 不失一般性, 可以假设

$$\|\pi_C(x_n) - \pi_C(x_0)\| \geq d, \quad (2)$$

对所有的 $n \geq 1$ 和某个 $d > 0$.

由引理 12, (1) 式和 C 的逼近紧性, 序列 $\{\pi_C(x_n)\}$ 有一个 Cauchy 子列, 仍旧用 $\{\pi_C(x_{n_k})\}$ 表示. 由于 X 是一个 Banach 空间, 所以 $\pi_C(x_{n_k}) \rightarrow \bar{x} \in C$, $k \rightarrow \infty$. 由范数的连续性, 有

$$\|x_{n_k} - \pi_C(x_{n_k})\| \rightarrow \|x_0 - \bar{x}\|, \quad n \rightarrow \infty.$$

这样又由 (1) 式, 有

$$\|x_0 - \pi_C(x_0)\| = \|x_0 - \bar{x}\| = \text{dist}(x_0, C).$$

由于 C 是 X 的一个 Chebyshev 子集, 所以 $\bar{x} = \pi_C(x_0)$, 即

$$\pi_C(x_{n_k}) \rightarrow \pi_C(x_0), \quad k \rightarrow \infty.$$

这与条件 (2) 矛盾. 所以我们推断

$$\pi_C(x_n) \rightarrow \pi_C(x_0), \quad n \rightarrow \infty,$$

即 π_C 是连续的.

推论 14 如果 X 是一个具有性质 H 的自反 Banach 空间, 那么对 X 中的每个半 Chebyshev 闭凸集 C , 度量投影 π_C 是从 X 到 C 连续的.

证明 此推论可由命题 11 和定理 13 证得.

定理 15 令 X 为一个中点局部一致凸的 Banach 空间, 且 C 是 X 中的一个闭凸集, 则 C 是 Chebyshev 集, 且度量投影 π_C 是连续的当且仅当 C 在 X 中是逼近紧的.

证明 必要性. 假设 C 是 Chebyshev 凸集且度量投影 π_C 是由 X 到 C 连续的.

取任意 $y \in X$ 和任意 $\{x_n\} \subset C$, 假设 $\{y_n\} \subset X$, 使得 (i) $y_n \rightarrow y, n \rightarrow \infty$; (ii) $\|x_n - y_n\| \rightarrow \text{dist}(y, C), n \rightarrow \infty$. 由引理 12, 我们想证明 $\{x_n\}$ 有一个 Cauchy 子列.

由假设, 度量投影 $\pi_C : X \rightarrow C$ 是连续的, 所以有

$$\pi_C(y_n) \rightarrow \pi_C(y) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3)$$

我们推断, 由距离函数的连续性,

$$\|y_n - \pi_C(y_n)\| = \text{dist}(y_n, C) \rightarrow \text{dist}(y, C) = \|y - \pi_C(y)\|, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

我们断言存在一个 $\{n\}$ 的子列 $\{n_k\}$, 使得

$$\|x_{n_k} - \pi_C(y_{n_k})\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (5)$$

现在假设 (5) 式是正确的, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 > 1$, 使得对任意的 $k \geq N_1$,

$$\|x_{n_k} - \pi_C(y_{n_k})\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6)$$

由

$$\pi_C(y_{n_k}) \rightarrow \pi_C(y) \quad (k \rightarrow \infty),$$

存在 $N_2 > 1$, 使得对所有的 $k, l \geq N_2$,

$$\|\pi_C(y_{n_k}) - \pi_C(y_{n_l})\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (7)$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 由 (6) 和 (7) 式, 我们推断

$$\|x_{n_k} - x_{n_l}\| \leq \|x_{n_k} - \pi_C(y_{n_k})\| + \|\pi_C(y_{n_k}) - \pi_C(y_{n_l})\| + \|\pi_C(y_{n_l}) - x_{n_l}\| < \varepsilon,$$

这表示 $\{x_k\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个 Cauchy 列, 必要性得证.

现在证明条件 (5).

假设条件 (5) 是错的, 那么不失一般性, 我们假设对所有 $n \geq 1$ ($d < \frac{\|y\|}{2}$)

$$\|x_n - \pi_C(y_n)\| > 2d > 0.$$

由 (3) 式得到 $N_3 \geq 1$, 使得对所有的 $n \geq N_3$,

$$\|\pi_C(y) - \pi_C(y_n)\| < d,$$

则对所有的 $n \geq N_3$, 有

$$\|x_n - \pi_C(y)\| \geq \|x_n - \pi_C(y_n)\| - \|\pi_C(y) - \pi_C(y_n)\| > d.$$

不失一般性, 假设 $N_3 = 1$. 由刚才证明的条件可推出

$$\{x_n\} \subset C \setminus B(\pi_C(y), d). \quad (8)$$

由命题 5, 存在一个泛函 $x^* \in X^*$, 使得 (i) $\|x^*\| = 1$; (ii) 对所有的 $v \in C$, $\langle x^*, \pi_C(y) - v \rangle \geq 0$; (iii) $\langle x^*, y - \pi_C(y) \rangle = \|y - \pi_C(y)\|$. 不失一般性可以假设 $\pi_C(y) = \theta$. 否则, 对任意 $x \in X$, 可以把 x 换作 $x - \pi_C(y)$. 定义超平面

$$H_t = \{x \in X : \langle x^*, x \rangle = t\}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

则实超平面 $H_0 = \{x \in X : \langle x^*, x \rangle = 0\}$ 把 C 与球 $B(y, \|y\|)$ 分离开, H_0 通过 $\pi_C(y) = \theta$, 且支撑 $B(y, \|y\|)$ (见文献 [12], p. 65). 设

$$H_+ = \bigcup_{t \geq 0} H_t \text{ 且 } H_- = \bigcup_{t \leq 0} H_t,$$

则

$$C \subset H_- \text{ 且 } B(y, \|y\|) \subset H_+.$$

我们有下列 X 的拓扑分解直和:

$$X = H_0 \oplus \{ty : t \in \mathbb{R}\}, \quad (9)$$

即任意 $x \in X$, x 有一个唯一的分解

$$x = x_0 + t_x y, \quad (10)$$

这里

$$x_0 = x - \frac{\langle x^*, x \rangle}{\|y\|} y \in H_0 \text{ 且 } t_x = \frac{\langle x^*, x \rangle}{\|y\|} \in \mathbb{R}.$$

这样对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$H_t = H_0 + \left\{ t \frac{y}{\|y\|} \right\}. \quad (11)$$

定义

$$B = B(y, \|y\|) \setminus \left[\text{int} B \left(\theta, \frac{d}{2} \right) \right]. \quad (12)$$

断言

$$\alpha = \inf [\langle x^*, x \rangle = t_x \|y\| : \forall x \in B] > 0. \quad (13)$$

如果 (13) 式不正确, 即 $\alpha = 0$, 取一系列正数 $\{t_n\}$, 使得 $\{t_n\} \subset (0, \frac{d}{2})$ 且 $t_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 注意到, 由 $d < \frac{\|y\|}{2}$, $\{t_n y\} \subset (\theta, \frac{d}{2} y) = \{x \in X : x = ty, t \in (0, \frac{d}{2})\} \subset [\theta, y]$, 这里

$$[\theta, y] = \{x \in X : x = ty, t \in [0, 1]\},$$

则有 $t_n y \rightarrow \theta, n \rightarrow \infty$. 对任意 $n \geq 1$, 取

$$w_n \in H_{t_n} \cap B = H_{t_n} \cap \left\{ B(y, \|y\|) \setminus \left[\text{int} B \left(\theta, \frac{d}{2} \right) \right] \right\}, \quad (14)$$

由分解式 (11), 对任意的 $n \geq 1$, 有

$$w_n = w_n^0 + t_n y \text{ 且 } w_n^0 \in H_0.$$

取 $z_n = -w_n^0 + t_n y$, 则看到 $z_n \in H_{t_n} \cap \{B(y, \|y\|) \setminus [\text{int} B(\theta, \frac{d}{2})]\}$ 且对所有的 $n \geq 1$,

$$\frac{w_n + z_n}{2} = t_n y.$$

所以 $\|w_n + z_n - 2\theta\| = \|2t_n y\| = t_n \|2y\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. 由于 X 是中点局部一致凸的, 故推断

$$w_n - z_n \rightarrow \theta (n \rightarrow \infty),$$

也就是 $w_n^0 \rightarrow \theta, n \rightarrow \infty$. 那么就有 $w_n = w_n^0 + t_n y \rightarrow \theta (n \rightarrow \infty)$. 另一方面, 由 $w_n \in B(y, \|y\|) \setminus B(\theta, \frac{d}{2})$ 有 $\|w_n\| \geq \frac{d}{2}$, 矛盾. 这样就证明了 $\alpha > 0$. 定义

$$H_\alpha^+ = \{x \in X : \langle x^*, x \rangle \geq \alpha\},$$

有 $B \subset H_\alpha^+$.

分别由 (12) 和 (8) 式, 有

$$B(y, \|y\|) = B \cup \left[\text{int} B \left(\theta, \frac{d}{2} \right) \right] \text{ 且 } \{x_n\} \subset C \setminus B(\theta, d). \quad (15)$$

对任意 $x \in B(y, \|y\|)$, 有 $x \in B$ 或 $x \in \text{int} B(\theta, \frac{d}{2})$. 如果 $x \in B$, 那么 $x \in H_\alpha^+$ 且 $\{x_n\} \subset C \subset H_-$. 这样可以推断对任意 $n \geq 1$,

$$\|x - x_n\| \geq \text{dist}(H_\alpha^+, H_-) \geq \text{dist}(\theta, H_\alpha^+) = \alpha > 0. \quad (16)$$

如果 $x \in \text{int} B(\theta, \frac{d}{2})$, 注意到 $\{x_n\} \subset C \setminus B(\theta, d)$, 有对所有 $n \geq 1$,

$$\|x - x_n\| \geq \frac{d}{2}. \quad (17)$$

因为 $y_n \rightarrow y$ 且 $\|x_n - y_n\| \rightarrow \text{dist}(y, C), n \rightarrow \infty$, 则

$$\|x_n - y\| \rightarrow \text{dist}(y, C) = \|y - \pi_C(y)\| = \|y\| (n \rightarrow \infty),$$

由假设 (不失一般性) $\pi_C(y) = \theta$. 对任意的 $n \geq 1$, 可以假设

$$\|x_n - y\| \leq \|y\| + r,$$

这里 $r = \min \{\frac{d}{2}, \alpha\} > 0$. 这样很容易看出

$$\text{dist}(\{x_n\}, B(y, \|y\|)) < r.$$

因为 $r = \min \{\frac{d}{2}, \alpha\}$, 这与 (16) 和 (17) 式矛盾. 这样证明 (5) 式是正确的. 必要性的假设证毕.

充分性. 由于 X 是 MLUR, 故 X 是严格凸的. 因此, 闭凸子集 C 是一个半 Chebyshev 子集. 如果 C 是逼近紧的, 那么由定理 2.1, C 是 Chebyshev 集且 π_C 是连续的.

3 应用

设 X 和 Y 为 Banach 空间, T 为一个由 X 到 Y 的线性算子. 设 $D(T)$, $R(T)$, $N(T)$ 分别为 T 的定义域、值域和零空间. 如果 $N(T) \neq \{\theta\}$ 或 $R(T) \neq Y$, 则算子方程 $Tx = y$ 一般为不适定的. 作为应用, 我们通常寻找方程的最佳逼近解 (b.a.s) (见文献 [13]).

$x_0 \in D(T)$ 称为算子方程 $Tx = y$ 的最佳逼近解, 如果

$$\|Tx_0 - y\| = \inf \{\|Tx - y\| : x \in D(T)\}$$

且

$$\|x_0\| = \min \left\{ \|v\| : v \in D(T), \|Tv - y\| = \inf_{x \in D(T)} \|Tx - y\| \right\},$$

这里 $y \in Y$ (见文献 [13]).

为研究方程 $Tx = y$ 的 b.a.s., 王辉和王玉文^[14] 引进了 T 的 Moore-Penrose 度量广义逆的概念.

定义 16(文献 [14], 定义 2.1) 设 T 是由 X 到 Y 的一个线性算子, 设 $\overline{N(T)}$ 和 $\overline{R(T)}$ 分别为 X 和 Y 中的 Chebyshev 子空间. 如果存在一个齐性映射 $T^+ : Y \rightarrow X$, 使得

- (i) $TT^+T = T$, 在 $D(T)$ 上; (ii) $T^+TT^+ = T^+$, 在 $D(T^+)$ 上;
(iii) $T^+T = I_{D(T)} - \pi_{\overline{N(T)}}$, 在 $D(T)$ 上; (iv) $TT^+ = \pi_{\overline{R(T)}}$, 在 $D(T)$ 上.

则 T^+ 称为 T 的 Moore-Penrose 度量广义逆, 这里 $I_{D(T)}$ 是 $D(T)$ 上的恒等映射, 且 $D(T^+) = D^+ := R(T) \dot{+} F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$.

F_Y 是 Y 的对偶映射, 它的定义是

$$F_Y(y) = \{y^* \in Y^* : \langle y^*, y \rangle = \|y^*\|^2 = \|y\|^2\}, \forall y \in Y$$

(见文献 [15, 16]). $F_Y^{-1}(R(T)^\perp) = \{y \in Y : F_Y(y) \cap R(T)^\perp \neq \emptyset\}$.

由于 T^+ 是非线性算子, 寻找使 T^+ 连续的必要和充分条件是一个很重要的问题. 在这部分里, 我们用本文的主要结果来讨论这个问题.

由于引用的原因, 我们列出文献 [14] 和 [17] 中的一些已知的结果.

命题 17(文献 [14], 定理 2.1) 设 X 和 Y 是严格凸 Banach 空间, T 是由 X 到 Y 的线性算子, 则存在一个 Moore-Penrose 度量广义逆 T^+ 当且仅当

$$D(T) = N(T) \dot{+} C(T),$$

这里 $C(T) = D(T) \cap F_X^{-1}(N(T)^\perp)$.

命题 18(文献 [17], 引理 2.2) 设 X 为一个 Banach 空间, L 为一个 Chebyshev 子空间, 则对任意的 $x \in X$, 存在唯一的分解

$$x = \pi_L(x) + x_2, \quad x_2 \in F_X^{-1}(L^\perp),$$

即

$$X = L \dot{+} F_X^{-1}(L^\perp).$$

命题 19(文献 [14], 定理 3.2) 设 X, Y 和 T 的定义同命题 17 中一样. 假设

$$D(T) = N(T) \dot{+} C(T) \text{ 且 } D^+ = R(T) \dot{+} F_Y^{-1}(R(T)^\perp),$$

这里 $C(T) = D(T) \cap F_X^{-1}(N(T)^\perp)$. 如果 T^+ 是一个由 D^+ 到 $D(T)$ 的齐性算子, 下列各命题等价:

- (i) T^+ 是 T 的一个 Moore-penrose 度量广义逆;
(ii) 对任意 $y \in D^+$, $x_0 = T^+y$ 是算子方程 $Tx = y$ 的唯一最佳逼近解;
(iii) 对任意 $y \in D^+$, $x_0 = T^+y$ 是度量投影方程 $Tx = \pi_{\overline{R(T)}}y$ 的最小范数解, 即

$$T^+y = \pi(T^{-1}\pi(\overline{R(t)}; y); \theta),$$

这里 $\pi(T^{-1}\pi(\overline{R(t)}; y); \theta)$ 是 θ 到集合

$$T^{-1}\pi(\overline{R(t)}; y)$$

上的度量投影, 且 $\pi(\overline{R(t)}; y) = \pi_{\overline{R(T)}}y$.

命题 20(文献 [14], 定理 4.1) 假设 X 和 Y 为自反严格凸 Banach 空间, 且具有性质 (H), T 是一个由 X 到 Y 的稠定的线性算子. 设

$$C(T) = D(T) \cap F_X^{-1}(N(T)^\perp), \quad D^+ = R(T) \dot{+} F_Y^{-1}(R(T)^\perp),$$

则存在一个由 D^+ 到 $C(T)$ 的连续 Moore-Penrose 度量广义逆 T^+ , 使得 $\overline{R(T)} \subset D^+$ 和 $\overline{N(T)} \subset D(T)$ 当且仅当 T 是一个有闭值域的闭算子.

由命题 11, 命题 20 中的关于 X 和 Y 的条件与 X 和 Y 是逼近紧且严格凸 Banach 空间是等价的. 如果 T 是由 X 到 Y 的一个具有闭值域的有界线性算子且 $D(T) = X$. 那么由命题 20 和 18, 存在着一个由 $Y = R(T) \dot{+} F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$ 到 $C(T) = F_X^{-1}(N(T)^\perp)$ 的连续 Moore-Penrose 广义逆 T^+ . 本文始终令 X 具有命题 20 中的条件. 假设 Y 是一个中点局部凸的 Banach 空间 (在这种情形下, Y 一般不是逼近紧的. 如存在不是逼近紧的但仍是中点局部凸的 Orlicz 空间, 见文献 [8, 4]). 我们借助定理 15 来寻找 T 的连续的 Moore-Penrose 度量投影 T^+ 的充要条件.

定理 21 假设 X 是一个逼近紧且严格凸的 Banach 空间, Y 是一个中点局部凸 Banach 空间. 假设 T 是由 X 到 Y 的有界线性算子, $D(T) = X$, 则下列结论等价:

- (i) 存在一个连续的 Moore-Penrose 度量广义逆 T^+ 且 $D(T^+) = Y$;
- (ii) 对任意的 $y \in Y$, 存在算子方程 $Tx = y$ 的唯一最佳逼近解 $x_0 \in X$, 且 x_0 关于 y 是连续相依的;
- (iii) 值域 $R(T)$ 是逼近紧的.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 对任意的 $y \in Y = D(T^+)$, 取 $x_0 = T^+y$, 则由命题 19, x_0 是 $Tx = y$ 的唯一最佳逼近解. 由 T^+ 的连续性, x_0 关于 y 连续相依.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 对任意的 $y \in Y$, 由 (ii), 存在方程 $Tx = y$ 的一个最佳逼近解 x_0 . 由定义有

$$\|y - Tx_0\| = \inf \{\|y - Tx\| : x \in X\} = d_{R(T)}(y).$$

所以 $Tx_0 \in \mathcal{P}_{R(T)}(y)$, 即 $\mathcal{P}_{R(T)}(y) \neq \emptyset, \forall y \in Y$, 则 $R(T)$ 是迫近的. 另一方面, Y 的凸性说明 $R(T)$ 也是一个半 Chebyshev 集, 所以 $R(T)$ 是 Chebyshev 子空间.

设 $\pi_{R(T)}$ 是由 Y 到 $R(T)$ 上的度量算子. 对任意的 $\{y_n\} \subset Y, y_n \rightarrow y_0 (n \rightarrow \infty)$. 设 x_n^0 分别为方程 $Tx = y_n$ 对 $n = 0, 1, 2, \dots$ 的唯一 b.a.s.. 由 (ii), $y_n \rightarrow y_0$ 表明 $x_n^0 \rightarrow x_0^0 (n \rightarrow \infty)$. 注意到 $\pi_{R(T)}(y_n) = Tx_n^0 (n = 0, 1, 2, \dots)$. T 的连续性说明 $\pi_{R(T)}(y_n) = Tx_n^0 \rightarrow Tx_0^0 = \pi_{R(T)}(y_0) (n \rightarrow \infty)$. 这样度量投影 $\pi_{R(T)}$ 是由 Y 到 $R(T)$ 连续的. 由定理 15 的必要性, Y 是一个 MLUR Banach 空间, 知 $R(T)$ 是逼近紧的.

(iii) $\Rightarrow$ (i) 由 Y 是 MLUR 的, 且 $R(T)$ 是逼近紧的, 及定理 15 的充分性, 得 $R(T)$ 是一个 Chebyshev 子空间且度量投影 $\pi_{R(T)}$ 是连续的. 由命题 18, 有

$$Y = R(T) \dot{+} F_Y^{-1}(R(T)^\perp). \quad (18)$$

X 是逼近紧的且严格凸的, 由命题 11, X 是自反严格凸且具有性质 (H), 所以 $N(T)$ 也是一个 Chebyshev 子空间. 由命题 18,

$$X = N(T) \dot{+} F_X^{-1}(N(T)^\perp). \quad (19)$$

因为 $D(T) = X$, 又由命题 17 和 (18) 及 (19) 式, 存在 Moore-Penrose 度量广义逆 T^+ . 由命题 19,

$$T^+y = \pi(T^{-1}\pi(R(T); y); \theta), \quad \forall y \in Y, \quad (20)$$

这里 $\pi(R(T); y) = \pi_{R(T)}(y)$.

由 $\pi_{R(T)}$ 的连续性, 为了证明 T^+ 的连续性, 需要证明对任意的 $\{y_n\} \subset R(T), y_n \rightarrow y_0 \in R(T)$, 有

$$T^+y_n = \pi(T^{-1}y_n; \theta) \rightarrow \pi(T^{-1}y_0; \theta) = T^+y_0, \quad n \rightarrow \infty.$$

因为 T 是 X 到 $R(T)$ 的满射且连续的线性算子, 且由文献 [10] 中开映像定理及 $R(T)$ 在 Y 中是闭的, 可知存在 $l \geq 1$, 使得对任意 $y, z \in R(T), x \in T^{-1}y$, 存在 $w \in T^{-1}z$, 使得

$$\|x - w\| \leq l \|y - z\|. \quad (21)$$

由文献 [18] 中定理 2.2.1, 真凸泛函

$$\rho(y) = \inf \{\|x\| : x \in T^{-1}y\}, y \in R(T)$$

是下半连续的. 对任意的 $y \in R(T)$, 由 (20) 式, $T^+y = \pi(T^{-1}y; \theta) \in T^{-1}y$, 所以

$$\|T^+y\| = \inf \{\|x\| : x \in T^{-1}y\} = \rho(y).$$

在 (21) 式中, 取 $x = T^+y, z = \theta$, 存在一个 $w \in T^{-1}\theta = N(T)$, 使得

$$\rho(y) = \|T^+y\| \leq \|w\| + l \|y\| < \infty, y \in R(T),$$

就有 $R(T)$ 是 $\rho(y)$ 的一个有效域. 由 $R(T)$ 上的 $\rho(y)$ 的下半连续性和文献 [15] 中命题 6, $\rho(y)$ 在 $R(T)$ 上连续. 对任意 $\{y_n\} \subset R(T), y_n \rightarrow y_0 \in R(T)$, 有

$$\|T^+y_n\| = \rho(y_n) \rightarrow \rho(y_0) = \|T^+y_0\|, n \rightarrow \infty.$$

取 $x_n = T^+y_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 则

$$\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|, n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

由于 X 是逼近紧的且严格凸的, 由命题 11, X 是具有性质 (H) 自反且严格凸的 Banach 空间. 由 (22) 式, 为了证明 $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$), 只需证

$$x_n \xrightarrow{w} x_0, n \rightarrow \infty. \quad (23)$$

假设 (23) 式不正确. 由 X 是自反的, 且 $\{x_n\}$ 是有界的, 不失一般性, 可以假设

$$x_n \xrightarrow{w} \bar{x} \neq x_0, n \rightarrow \infty. \quad (24)$$

由 $D(T) = X, R(T)$ 是闭的, T^* 是有定义的, $D(T^*) = Y^*$. 对任意的 $w^* \in Y^*$, 有

$$\langle w^*, y_n \rangle = \langle w^*, Tx_n \rangle = \langle T^*w^*, x_n \rangle, n = 1, 2, \dots$$

设 $n \rightarrow \infty$, 由 (24) 式, 可得 $\langle w^*, y_0 \rangle = \langle T^*w^*, \bar{x} \rangle$, 但是 $\langle w^*, y_0 \rangle = \langle w^*, Tx_0 \rangle = \langle T^*w^*, x_0 \rangle$. 所以

$$\langle T^*w^*, x_0 - \bar{x} \rangle = 0, \text{ 对任意 } w^* \in Y^*.$$

由 Banach 闭值域定理, $x_0 - \bar{x} \in R(T^*)^\perp = N(T)$, 即 $Tx_0 = T\bar{x}$. 也即 $\bar{x} \in T^{-1}Tx_0 = T^{-1}y_0$. 由于范数是弱下半连续的, 又由 (23) 和 (24) 式,

$$\|\bar{x}\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x_0\|.$$

因为 X 是严格凸的, 且 $T^{-1}y_0$ 是凸闭集, 所以它是半 Chebyshev 集, 因此, $T^{-1}y_0$ 的最小范数元素是唯一的, $x_0 = \bar{x}$. 这与 (24) 式矛盾. 所以 (23) 式是正确的.

参 考 文 献

- 1 Braess D. Nonlinear Approximation Theory. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1980

- 2 Jefimow N W, Stechkin S B. Approximative compactness and Chebyshev sets. *Soviet Mathematics*, **2**: 1226–1228 (1961)
- 3 Oshman E V. Characterization of subspaces with continuous metric projection into a normed linear space. *Soviet Mathematics*, **13**(6): 1521–1524 (1972)
- 4 Fan K, Glicksberg I G. Fully convex normed linear spaces. *Proc Nat Acad Sci*, **41**: 947–953 (1955)
- 5 Hudzik H, Wang B X. Approximative compactness in Orlicz spaces. *J Approx Theory*, **95**: 82–89 (1998)
- 6 Hudzik H, Kowalewski W, Lewicki G. Approximative compactness and full rotundity in Musielak-Orlicz space and Lorentz-Orlicz spaces. *Zeitschrift für Analysis Undihre Anwendungen*, **25**: 163–192 (2006)
- 7 Radon J. Theories und anwendungen der absolut additiven mengenfunktionen. *Sitz Akad Wiss Wien*, **122**: 1295–1438 (1913)
- 8 Riesz F. Sur la convergence en moyenne I, II. *Acta Sci Math*, **4**(29): 58–64 (1928)
- 9 Montesinos V. Drop property equals reflexivity. *Studia Math*, **87**: 93–100 (1987)
- 10 Rolewicz S. On drop property. *Studia Math*, **85**: 25–35 (1987)
- 11 Diestel J. Geometry of Banach spaces—selected topics. In: *Lecture Notes in Math*, Vol 485. New York: Springer-Verlag, 1975
- 12 Singer I. The Theory of Best Approximation and Functional Analysis. New York: Springer-Verlag, 1970
- 13 Nashed M Z. Generalized Inverses and Applications. New York: Academic Press, 1976
- 14 Wang H, Wang Y W. Metric generalized inverse of linear operator in Banach space. *Chinese Ann Math Ser B*, **24**(4): 509–520 (2003)
- 15 Barbu V, Precupanu Th. Convexity and Optimization in Banach Spaces. Bucuresti: Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, 1978
- 16 Hudzik H, Wang Y W, Sha R L. Orthogonally complemented subspaces in Banach spaces. *Nonlinear Anal*, **63**: 1701–1711 (2005)
- 17 Wang Y W, Liu J. Metric generalized inverse for linear manifolds and extremal solutions of linear inclusion in Banach spaces. *J Math Anal Appl*, **302**: 360–371 (2005)
- 18 Aubin J P, Frankowska H. Set-Valued Analysis, System and Control, Foundation and Applications. Boston: Birkhaser, 1990