有界噪声扰动下平面微分系统周期轨的分支

献给张芷芬教授 90 华诞

马纪英¹, 肖冬梅^{2*}, 许钊泉³

1. 上海理工大学理学院, 上海 200093;

2. 上海交通大学数学科学学院, 上海 200240;

3. 暨南大学数学系, 广州 510632

E-mail: majiying100@126.com, xiaodm@sjtu.edu.cn, xuzhqm@126.com

收稿日期: 2016-07-01; 接受日期: 2016-09-23; 网络出版日期: 2016-12-09; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11371248 和 11501364) 资助项目

摘要 本文研究有界噪声扰动下平面微分系统周期轨的分支问题. 首先介绍平面微分系统周期轨的三类经典分支: 叉型分支、鞍结分支和跨临界分支, 并给出其分支方向以及分支出的周期轨的稳定性. 然后讨论有界噪声扰动下平面微分系统周期轨的分支现象, 考虑该扰动系统极小正向不变集的个数随参数值变化而变化的规律, 证明该系统在一定条件下发生所谓的硬分支现象, 并给出分支参数值的阶数估计. 最后给出具体的例子并进行数值模拟, 形象直观地说明本文结果.

关键词 平面微分系统 有界噪声 极小正向不变集 硬分支

MSC (2010) 主题分类 37H20, 37G15

1 引言

分支现象广泛存在于生物医学和物理工程等实际问题中, 而实际问题经常受到一些随机因素的影响, 其数学建模一般用含有随机参数或者随机作用项的微分方程或映射来描述 (参见文献 [1–5]). 随机微分方程理论是从 20 世纪 50 年代 Itô 随机积分理论建立后, 逐步发展起来. 此后, 德国数学家 Arnold 等将随机微分方程和动力系统联系起来, 创建并发展了随机动力系统理论 (参见文献 [6, 7]). 在随机动力系统的研究中, 已有研究工作考虑的噪声多为无界的服从正态分布的独立随机过程, 参见文献 [8–14]. 但是很多实际问题中随机扰动是有界的, 例如, 测量误差的波动是有界的, 金融市场中股票的价格波动是有界的, 生态系统中随机扰动也往往是有界的 (参见文献 [15, 16]). 近期 Homburg 和 Young [17, 18] 及 Botts 等 [19] 对有界噪声扰动的随机微分方程的分支问题开展了研究. 众所周知, 确定性动力系统主要关心不变集的性质, 而对随机动力系统, 人们关注不变测度的性质. 如果当参数在某参数值附近变化时, 该扰动系统的不变测度 (或其支撑集) 发生不连续变化, 则称这种现象为分支现象, 也称该系统发生了硬分支 (hard bifurcation). Homburg 和 Young 建立了有界噪声扰动的随机微分方程的研究框架, 指出在一定的条件下, 有界噪声扰动的随机动力系统的不变测度的支撑为极小正向不

英文引用格式: Ma J Y, Xiao D M, Xu Z Q. Bifurcation of periodic orbit in planar differential systems with bounded random perturbation (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 155–170, doi: 10.1360/N012016-00131

变集的闭包. 基于这个研究框架, 本文将考虑有界噪声扰动的平面微分系统周期轨的分支问题. 为读者方便起见, 下面简要介绍文献 [17–19] 中关于有界噪声扰动的随机微分方程和硬分支的相关概念和结果.

考虑如下两种类型的随机微分方程 (简记为 RDE):

$$\dot{x} = F(x, a + \xi(t, \omega)) \quad (\text{参数含有噪声}), \quad (1.1)$$

或

$$\dot{x} = F(x, a) + \xi(t, \omega) \quad (\text{可加噪声}), \quad (1.2)$$

其中 $x \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ 是一个紧的、连通的光滑 d 维流形; 参数 $a \in \mathbb{R}^n$; $F: \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathcal{M}$ 是 Lipschitz 映射, 这里 $T\mathcal{M}$ 是流形 $\mathcal{M}$ 的切空间; $\omega \in (\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)$ 表示样本空间中的样本点, $\xi(t, \omega)$ 是一个随机过程, 它表示实际系统中的噪声扰动. 本文讨论有界噪声, 其定义如下:

定义 1.1 ^[17] 设 $\mathbb{T}$ 是随机过程 $\xi(t, \omega)$ 的时间域, 我们称扰动 $\xi(t, \omega)$ 为有界噪声, 如果定义在 $\mathbb{T}$ 上的函数 $\{\xi(\cdot, \omega), \omega \in \Omega_0\}$ 的值域是有界的, 这里 $\{\xi(\cdot, \omega), \omega \in \Omega_0\}$ 称为随机过程的实现 (realization), 又称样本轨道.

对随机微分方程 (1.1) 或 (1.2), 我们有 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. 令 $\mathcal{U}$ 表示噪声的所有实现构成的集合, 考虑有界噪声的扰动, 取 $\mathcal{U} = L^\infty(\mathbb{R}, \overline{B(\varepsilon)})$, 其中 $\overline{B(\varepsilon)}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 ε 的闭球. 这时称噪声项是 ε - 水平的.

定义 $\mathcal{U}$ 上的移位映射 θ_t 如下:

$$\theta_t: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}, \quad \xi(\cdot, \omega) \mapsto \xi(\cdot + t, \omega).$$

假设 $\mathcal{U}$ 上存在 θ_t - 不变的概率 $\mathbb{P}$, 使得 θ_t 关于 $\mathbb{P}$ 是遍历的.

因为 $\xi(\cdot) \in \mathcal{U} = L^\infty(\mathbb{R}, \overline{B(\varepsilon)})$, 故 $\xi(\cdot)$ 是有界可测函数, 又因 F 是 Lipschitz 映射, 则对 $\mathcal{M}$ 上的任意初始点 x 和 $\forall \xi \in \mathcal{U}$, 随机微分方程 (1.1) 或 (1.2) 存在唯一的解流 ^[6, 17]. 设方程 (1.1) 或 (1.2) 生成的解流为

$$\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad (t, a, \xi, x) \mapsto \Phi^t(a, \xi)(x).$$

设方程 (1.1) 或 (1.2) 满足下面两个假设:

(H1) 存在 $r_0 > 0$ 和 $t_0 > 0$ 使得

$$\Phi^t(a, \mathcal{U})(x) \supset B(\Phi^t(a, 0)(x), r_0), \quad \forall t > t_0.$$

(H2) 存在 $t_1 > 0$, 使得对所有的 $t > t_1$ 和 $x \in \mathcal{M}$, $\Phi^t(a)(x)_*\mathbb{P}$ 关于 $\mathcal{M}$ 上的 Riemann 度量绝对连续, 其中 $\Phi^t(a)(x)_*\mathbb{P}$ 是将 $\mathbb{P}$ 从 $\mathcal{U}$ 提升到 $\mathcal{M}$ 的概率, 它在连续函数 $\psi \in C^0(\mathcal{M})$ 上定义如下:

$$(\Phi^t(a)(x)_*\mathbb{P})\psi = \int_{\mathcal{U}} \psi(\Phi^t(a, u)(x)) d\mathbb{P}(u).$$

直观地讲, 假设 (H1) 为了保证扰动的鲁棒性, 假设 (H2) 为了保证噪声没有“突然的尖峰” (参见文献 [17, 19]). 文献 [20] 对随机映射有类似的假设. 在上述假设下, Homburg 和 Young ^[17] 得到了如下结果.

定理 1.2 对带有 ε - 水平的噪声项的随机微分方程 (1.1) 或 (1.2), 设其解流满足假设 (H1) 和 (H2), 则 $\mathcal{M}$ 上有有限多个物理测度 $\mu_1, \dots, \mu_k$, 它们关于 Riemann 度量绝对连续, 并且每个测度 μ_i 的支撑集为某个极小正向不变集的闭包.

这里, 物理测度是指 $\mathcal{M}$ 上的遍历不变测度, 并且其遍历域的体积为正. 而极小正向不变集的定义如下.

定义 1.3^[17] 一个集合 $C \subset \mathcal{M}$ 称为方程 (1.1) 或 (1.2) 的正向不变集, 如果

$$\Phi^t(a, \mathcal{U})C \subset C, \quad \forall t > 0. \quad (1.3)$$

令 $\mathcal{C}$ 表示所有正向不变集构成的集合, 则在 $\mathcal{C}$ 上由包含关系定义一个偏序, 即 $C' \preceq C$, 如果 $C' \subset C$. 我们称 $C \in \mathcal{C}$ 是一个极小正向不变集 (minimal forward invariant, 简记为 MFI), 如果它关于偏序 $\preceq$ 是极小的.

如果 $\mathcal{C}$ 仅包含集合 $\mathcal{M}$ 和 $\emptyset$, 则我们称解流 Φ^t 没有极小正向不变集.

2012 年, Botts 等^[19] 考虑随机扰动的平面微分系统

$$\dot{x} = F_\lambda(x) + \varepsilon \xi_t = F(x, \xi), \quad (1.4)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^2$, λ 是实参数, ξ_t 是某一有界噪声的实现. 设 ξ_t 取值于平面上的闭圆盘 Δ , 进一步假设:

(H3) 集合 Δ 是一个有光滑边界的闭圆盘, 映射 $\Delta \rightarrow T_x X$ ($\xi \mapsto F(x, \xi)$) 是一个微分同胚, 且对所有 $x \in X$, 像集 $F(x, \Delta)$ 是凸集.

在假设 (H1)–(H3) 下, Homburg 和 Young^[17] 证明了系统 (1.4) 的不变测度和极小正向不变集是存在的, 并且不变测度的支撑是极小正向不变集的闭包.

在上述前人研究工作的基础上, 本文考虑由可加噪声扰动的平面随机微分方程

$$\dot{x} = F(\lambda, x) + \varepsilon \xi_t(\omega) \quad (1.5)$$

的分支问题, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$, $\{\xi_t(\omega), \omega \in (\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)\}$ 是一个随机过程, 它代表实际系统中的噪声扰动, $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)$ 为样本空间, ε 表示噪声强度.

若无噪声扰动 (即 $\varepsilon = 0$), 则系统 (1.5) 为

$$\dot{x} = F(\lambda, x), \quad (1.6)$$

称为确定性系统.

当 $\lambda = \lambda_0$ 时, 假设系统 (1.6) 有一个非双曲周期轨 Γ_0 . 当 λ 在值 λ_0 的小邻域内变化时, 系统 (1.6) 在周期轨 Γ_0 的小邻域内可能发生分支.

令 $\mathcal{U}$ 表示噪声的所有可能的实现构成的集合, 我们考虑有界噪声的扰动, 不失一般性, 设 $\xi_t(\omega)$ 取值于平面上的一个闭圆盘 Δ . 进一步, 我们假设系统 (1.5) 满足文献 [17] 中的基本条件, 即 (1) $\xi(\cdot, \omega) \in \mathcal{U}$ 是有界可测函数, F 是 Lipschitz 映射, 则对 $\forall \xi \in \mathcal{U}$ 和 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, 系统 (1.5) 定义了唯一的解流 $\Phi^t(\lambda, \xi)$; (2) 假设 (H1)–(H3) 成立. 此时系统的不变测度是存在的, 且不变测度的支撑是极小正向不变集的闭包 (参见文献 [17, 19]). 本文主要研究系统 (1.5) 极小正向不变集的硬分支, 具体定义如下.

定义 1.4^[19] 我们称随机微分系统发生硬分支, 如果存在某个参数值 λ_{bif} , 当参数 λ 在值 λ_{bif} 的小邻域内变化时, 随机微分系统 (1.5) 的极小正向不变集发生下面情形之一:

(B1) 极小正向不变集的个数发生了变化;

(B2) 极小正向不变集的 Hausdorff 度量发生了不连续变化 (A 和 B 的 Hausdorff 度量为

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b) \right\},$$

其中 A 和 B 是度量空间 (X, d) 的有界集).

以上罗列的是相关概念和已知结果. 本文的基本结构如下: 第 2 节介绍确定性平面系统的三类周期轨分支: 叉型周期轨分支、鞍结周期轨分支和跨临界周期轨分支, 并且给出这些分支的分支方向和分支出周期轨的稳定性; 第 3 节研究该确定性平面系统在有界噪声扰动下的硬分支, 证明相应于确定系统的叉型周期轨分支, 扰动系统 (1.5) 发生既是 (B1) 又是 (B2) 类型的硬分支, 而相应于鞍结周期轨分支和跨临界周期轨分支, 系统 (1.5) 均发生 (B1) 类型的硬分支, 同时给出扰动系统硬分支的分支值估计; 第 4 节对具体的例子给出极小正向不变集硬分支的数值模拟.

2 确定性系统 (1.6) 周期轨的分支

本节介绍确定性平面系统的三类周期轨分支, 并给出分支方向和分支出周期轨的稳定性, 具体内容参见文献 [21, 第四章].

设 $\lambda \in J \subset \mathbb{R}$, $x \in E \subset \mathbb{R}^2$, $F \in C^2(J \times E)$, 其中 J 是有界区间, E 为开集. 考虑系统 (1.6), 假设存在参数 λ_0 ($\lambda_0 \in J$) 使得系统

$$\dot{x} = F(\lambda_0, x) \quad (2.1)$$

有一个周期轨 $\Gamma_0 \subset E$. 在 Γ_0 上任取一点 O , 过 O 点作 Γ_0 的法线, 取法线在 O 点的小邻域内的一段记为 L , 令 n 表示 L 上的点到 O 点的有向距离, 即 $n > 0$ 表示 L 上位于 Γ_0 之外的点, 而 $n < 0$ 表示 L 上位于 Γ_0 内部的点. 在 L 上定义系统 (1.6) 的 Poincaré 映射

$$P: J \times L \rightarrow L, \quad (\lambda, n) \mapsto P(\lambda, n).$$

假设 $P(0, \lambda_0) = 0$, $\frac{\partial P}{\partial n} \Big|_{(0, \lambda_0)} = 1$, 即周期轨 Γ_0 是非双曲的, 则当参数 λ 在值 λ_0 附近变化时, 系统 (1.6) 可能发生周期轨分支.

定理 2.1 (i) 如果

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} \Big|_{(0, \lambda_0)} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial n^2} \Big|_{(0, \lambda_0)} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial n \partial \lambda} \Big|_{(0, \lambda_0)} \neq 0, \quad \frac{\partial^3 P}{\partial n^3} \Big|_{(0, \lambda_0)} \neq 0, \quad (2.2)$$

那么, 当参数 λ 在 λ_0 小邻域变化时, 系统 (1.6) 在 Γ_0 的小邻域内发生叉型周期轨分支;

(ii) 如果

$$\frac{\partial^2 P}{\partial n^2} \Big|_{(0, \lambda_0)} \neq 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \lambda} \Big|_{(0, \lambda_0)} \neq 0, \quad (2.3)$$

那么, 当参数 λ 在 λ_0 小邻域变化时, 系统 (1.6) 在 Γ_0 的小邻域内发生鞍结周期轨分支;

(iii) 如果

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} \Big|_{(0, \lambda_0)} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial n \partial \lambda} \Big|_{(0, \lambda_0)} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial n^2} \Big|_{(0, \lambda_0)} \neq 0, \quad (2.4)$$

那么, 当参数 λ 在 λ_0 小邻域变化时, 系统 (1.6) 在 Γ_0 的小邻域内发生跨临界周期轨分支.

为书写简单起见, 我们将分支值取作 $\lambda_0 = 0$. 首先, 我们分析系统的叉型周期轨分支的方向和分支出的周期轨的稳定性, 由 Poincaré 映射的 Taylor 展式, 容易证得下面结论.

推论 2.2 在定理 2.1 的条件 (2.2) 下, 系统 (1.6) 对所有的 λ ($|\lambda| \ll 1$) 均有周期轨 Γ_0 , 并且

(ia) 当 $\lambda > 0$ 时, Γ_0 是不稳定的, 并且其邻域内无其他周期轨, 而当 $\lambda < 0$ 时, Γ_0 变为稳定的, 同时其邻域内系统有两条不稳定周期轨 Γ_1 和 Γ_2 , 如果

$$\frac{\partial^2 P}{\partial n \partial \lambda} \Big|_{(0, 0)} > 0, \quad \frac{\partial^3 P}{\partial n^3} \Big|_{(0, 0)} > 0;$$

(ib) 当 $\lambda < 0$ 时, Γ_0 是稳定的, 并且其邻域内无其他周期轨, 而当 $\lambda > 0$ 时, Γ_0 变为不稳定的, 同时其邻域内系统有两条稳定周期轨 Γ_1 和 Γ_2 , 如果

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial n \partial \lambda} \right|_{(0,0)} > 0, \quad \left. \frac{\partial^3 P}{\partial n^3} \right|_{(0,0)} < 0;$$

(iia) 当 $\lambda < 0$ 时, Γ_0 是不稳定的, 并且其邻域内无其他周期轨, 而当 $\lambda > 0$ 时, Γ_0 变为稳定的, 同时其邻域内系统有两条不稳定周期轨 Γ_1 和 Γ_2 , 如果

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial n \partial \lambda} \right|_{(0,0)} < 0, \quad \left. \frac{\partial^3 P}{\partial n^3} \right|_{(0,0)} > 0;$$

(iib) 当 $\lambda > 0$ 时, Γ_0 是稳定的, 并且其邻域内无其他周期轨, 而当 $\lambda < 0$ 时, Γ_0 变为不稳定的, 同时其邻域内系统有两条稳定周期轨 Γ_1 和 Γ_2 , 如果

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial n \partial \lambda} \right|_{(0,0)} < 0, \quad \left. \frac{\partial^3 P}{\partial n^3} \right|_{(0,0)} < 0.$$

该推论可以用标准的 Poincaré 映射的 Taylor 展式证明 (参见文献 [21–23]). 类似地, 我们得到系统的鞍结周期轨分支和跨临界周期轨分支的方向和分支出的周期轨的稳定性.

推论 2.3 在定理 2.1 的条件 (2.3) 下, 系统 (1.6) 当 $\lambda = 0$ 时有周期轨 Γ_0 , 并且

(ia) 当 $\lambda > 0$ 时, 系统在 Γ_0 的小邻域内无周期轨, 而当 $\lambda < 0$ 时, 在 Γ_0 的小邻域内存在两条周期轨 Γ_1 和 Γ_2 , 如果 $\left. \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right|_{(0,0)} \frac{\partial^2 P}{\partial n^2} \Big|_{(0,0)} > 0$;

(ib) 当 $\lambda < 0$ 时, 系统在 Γ_0 的小邻域内无周期轨, 而当 $\lambda > 0$ 时, 在 Γ_0 的小邻域内存在两条周期轨 Γ_1 和 Γ_2 , 如果 $\left. \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right|_{(0,0)} \frac{\partial^2 P}{\partial n^2} \Big|_{(0,0)} < 0$.

对上面两种情形, Γ_1 和 Γ_2 具有相反的稳定性.

推论 2.4 在定理 2.1 的条件 (2.4) 下, 系统 (1.6) 对所有的 λ ($|\lambda| \ll 1$) 均有周期轨 Γ_0 , 并且

(ia) 当 $\lambda > 0$ 时, Γ_0 不稳定且在 Γ_0 附近存在稳定周期轨 Γ_1 , 而当 $\lambda < 0$ 时, Γ_0 变为稳定的同时 Γ_1 失去稳定性, 如果 $\left. \frac{\partial^2 P}{\partial n \partial \lambda} \right|_{(0,0)} > 0$;

(ib) 当 $\lambda < 0$ 时, Γ_0 不稳定且在 Γ_0 附近存在稳定周期轨 Γ_1 , 而当 $\lambda > 0$ 时, Γ_0 变为稳定的同时 Γ_1 失去稳定性, 如果 $\left. \frac{\partial^2 P}{\partial n \partial \lambda} \right|_{(0,0)} < 0$.

3 随机扰动系统 (1.5) 的硬分支

在方程 (1.6) 中加入小的有界噪声扰动, 将系统 (1.5) 写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_\lambda(x, y) + \varepsilon \xi_{1t}(\omega), \\ \dot{y} &= g_\lambda(x, y) + \varepsilon \xi_{2t}(\omega), \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 ε 表示噪声强度, 且对样本空间中的任一个样本点 $\omega \in \Omega_0$, 噪声的实现 $(\xi_{1t}(\omega), \xi_{2t}(\omega))$ 取值于单位圆盘 $\Delta = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. 设函数 $f, g \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$, 此时向量场 $F = (f, g)$ 显然是 Lipschitz 映射, 又 $\xi_t = (\xi_{1t}, \xi_{2t})$ 是有界可测函数, 故由引言可知, 对 $\forall \xi \in \mathcal{U}$ 和 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, 方程 (3.1) 定义了唯一的解流. 进一步, 假设 (H1)–(H3) 对方程 (3.1) 成立.

我们首先给出系统 (3.1) 对应于叉型周期轨分支的硬分支定理.

定理 3.1 假设当 $\varepsilon = 0$ 时, 推论 2.2 中的情形 (ib) 成立, 则对小的 $\varepsilon > 0$ 和 λ , 系统存在唯一的极小正向不变集 E_λ , 且 E_λ 同胚于一个环. 随着 λ 增大, 当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时, 系统在分支值 $\lambda_{\text{bif}} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{2}{3}})$ 处发生硬分支. 在 $\lambda = \lambda_{\text{bif}}$ 处, 极小正向不变集 E_λ 从一个环变成两个不相交的环, 该硬分支既是 (B1) 又是 (B2) 类型.

证明 证明过程分为三步. 前两步我们通过分析得到 RDEs (3.1) 的后继函数的边界估计, 第 3 步基于对后继函数的分析, 我们证明分支定理, 同时得到 $\varepsilon \downarrow 0$ 时的分支值 λ_{bif} 估计.

令

$$\begin{aligned} u(\omega) &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \{\xi_{1t}(\omega)\}, & \tilde{u}(\omega) &= \inf_{t \in \mathbb{R}} \{\xi_{1t}(\omega)\}, \\ v(\omega) &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \{\xi_{2t}(\omega)\}, & \tilde{v}(\omega) &= \inf_{t \in \mathbb{R}} \{\xi_{2t}(\omega)\}, \end{aligned}$$

因为 $(\xi_{1t}(\omega), \xi_{2t}(\omega))$ 取值于单位圆盘 $\Delta = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, 故 $u^2(\omega) \leq 1$, $\tilde{u}^2(\omega) \leq 1$, $v^2(\omega) \leq 1$, $\tilde{v}^2(\omega) \leq 1$.

首先, 考虑 $(u(\omega), v(\omega))$ 对应的边界方程组

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_\lambda(x, y) + \varepsilon u(\omega), \\ \dot{y} &= g_\lambda(x, y) + \varepsilon v(\omega). \end{aligned} \quad (3.2)$$

第 1 步 计算方程组 (3.2) 后继函数.

因为当 $\lambda = 0$ 时未扰动系统存在周期轨 Γ_0 , 故对充分小的 ε 和 λ , 我们可以在 Γ_0 的小邻域内引进新的坐标系 (s, n) : 对点 $B = (\varphi_0(s), \psi_0(s)) \in \Gamma_0$, 过点 B 作 Γ_0 的法线, 取法线在 B 点的小邻域内的一段记为 L , 于是点 $B \in \Gamma_0 \cap L$ 将直线 L 分为两部分 L^+ 和 L^- , 其中 L^+ 完全在 Γ_0 外面; 第二个坐标 n 表示 L 上的点到 B 的有向距离, 即 $n > 0$ 表示 L^+ 上的点, 而 $n < 0$ 表示 L^- 上的点. 图 1 给出了坐标 (s, n) 的示意图. 因为沿着 L 的法向量是 $(-\psi'_0(s), \varphi'_0(s))$, 故两坐标之间的关系式如下:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_0(s) - n\psi'_0(s) =: \varphi(s, n), \\ y &= \psi_0(s) + n\varphi'_0(s) =: \psi(s, n). \end{aligned} \quad (3.3)$$

在新坐标系下, “ $s = \text{常数}$ ” 表示经过点 $(\varphi_0(s), \psi_0(s))$ 的法向量, 且 $s = 0$ 和 $s = T$ 表示同一条法线, 而 “ $n = \text{常数}$ ” 表示 Γ_0 邻域内的一条闭曲线, 其中 $n = 0$ 即为 Γ_0 .

图 1 坐标系 (s, n) 和周期轨 Γ_0 的 Poincaré 映射

坐标变换的 Jacobi 行列式为

$$D = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, n)} \right| = \begin{vmatrix} \varphi'_0 - n\psi''_0 & -\psi'_0 \\ \psi'_0 + n\varphi''_0 & \varphi'_0 \end{vmatrix} \\ = (\varphi'_0)^2 + (\psi'_0)^2 - n(\varphi'_0\psi''_0 - \psi'_0\varphi''_0).$$

因为在周期轨 Γ_0 上无奇点, 故 $\exists \alpha > 0$, 使得

$$(\varphi'_0)^2 + (\psi'_0)^2 = f_0^2 + g_0^2 \geq \alpha > 0.$$

因此, $\exists \hat{n} > 0$, 使得对所有的 $|n| < \hat{n}$ 有 $D > 0$. 于是得到坐标变换是可逆的, 并且在由闭曲线 $n = -\hat{n}$ 和 $n = \hat{n}$ 界定的环域内变换是一一映射.

对小的 ε 和 λ , 在 Γ_0 的小邻域内, 对边界方程组 (3.2) 进行坐标变换 (3.3) 得

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} s \\ n \end{pmatrix} = \frac{\partial(s, n)}{\partial(x, y)} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \varphi'_0 & \psi'_0 \\ -\psi'_0 - n\varphi''_0 & \varphi'_0 - n\psi''_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\lambda + \varepsilon u(\omega) \\ g_\lambda + \varepsilon v(\omega) \end{pmatrix}.$$

于是 n 关于 s 的方程为

$$\frac{dn}{ds} = \frac{-f_\lambda(\psi'_0 + n\varphi''_0) + g_\lambda(\varphi'_0 - n\psi''_0) + \varepsilon[-(\psi'_0 + n\varphi''_0)u(\omega) + (\varphi'_0 - n\psi''_0)v(\omega)]}{f_\lambda\varphi'_0 + g_\lambda\psi'_0 + \varepsilon[\varphi'_0u(\omega) + \psi'_0v(\omega)]} \\ =: R(\omega, s, n, \varepsilon). \quad (3.4)$$

如前所述, 设 $f, g \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$, 则对任一给定的样本点 $\omega \in \Omega_0$, 扰动方程 (3.4) 存在唯一的解 $n = n(\omega, s, n_0, \varepsilon)$, 满足初值条件 $n(0) = n_0$, 且该解连续依赖于参数 ε .

为得到后继函数, 我们将 $n = n(\omega, s, n_0, \varepsilon)$ 关于 ε 的 Taylor 展式写为

$$n(\omega, s, n_0, \varepsilon) = n(s, n_0, 0) + \varepsilon n'_\varepsilon(\omega, s, n_0, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

其中 $n(s, n_0, 0) = \Phi_\lambda(s, n_0)$, 与样本点 ω 无关, $\Phi_\lambda(s, n_0)$ 是未扰动系统对应初值条件 $n(0) = n_0$ 的解. 方程 (3.4) 两边对 ε 求导得

$$\frac{dn'_\varepsilon(\omega, s, n_0, \varepsilon)}{ds} = R'_n(\omega, s, n, \varepsilon)n'_\varepsilon(\omega, s, n_0, \varepsilon) + R'_\varepsilon(\omega, s, n, \varepsilon).$$

在上式中令 $\varepsilon = 0$, 则

$$\frac{dn'_\varepsilon(\omega, s, n_0, 0)}{ds} = R'_n(s, \Phi_\lambda(s, n_0), 0)n'_\varepsilon(\omega, s, n_0, 0) + R'_\varepsilon(\omega, s, \Phi_\lambda(s, n_0), 0), \quad (3.5)$$

这是关于 $n'_\varepsilon(\omega, s, n_0, 0)$ 的线性微分方程. 易证 $R'_n(s, \Phi_\lambda(s, n_0), 0)$ 不含有 $u(\omega)$ 或 $v(\omega)$, 从而与样本点 ω 无关. 进一步, 由初始条件 $n(0) = n_0$, 方程 (3.5) 满足下面初值:

$$n'_\varepsilon(\omega, 0, n_0, 0) = 0.$$

因此, 方程 (3.5) 的解是

$$n'_\varepsilon(\omega, s, n_0, 0) = e^{\int_0^s R'_n(\tau, \Phi_\lambda(\tau, n_0), 0) d\tau} \int_0^s e^{-\int_0^\tau R'_n(\eta, \Phi_\lambda(\eta, n_0), 0) d\eta} R'_\varepsilon(\omega, \tau, \Phi_\lambda(\tau, n_0), 0) d\tau. \quad (3.6)$$

我们的目的是得到 $n'_\varepsilon(\omega, s, n_0, 0)$ 关于 $u(\omega)$ 和 $v(\omega)$ 的表达式. 一方面, $R'_n(s, \Phi_\lambda(s, n_0), 0)$ 不含有 $u(\omega)$ 或 $v(\omega)$. 另一方面, 我们可计算得

$$R'_\varepsilon(\omega, s, n, 0) = A(s, n)u(\omega) + B(s, n)v(\omega),$$

其中

$$A(s, n) := \frac{-(\psi'_0 + n\varphi''_0)\psi'_0 g_\lambda - (\varphi'_0 - n\psi''_0)\varphi'_0 g_\lambda}{(f_\lambda \varphi'_0 + g_\lambda \psi'_0)^2},$$

$$B(s, n) := \frac{(\varphi'_0 - n\psi''_0)\varphi'_0 f_\lambda + (\psi'_0 + n\varphi''_0)\psi'_0 f_\lambda}{(f_\lambda \varphi'_0 + g_\lambda \psi'_0)^2},$$

这里 s 和 n 与样本点 ω 无关. 将上式代入 (3.6), 得

$$n'_\varepsilon(\omega, s, n_0, 0) = \tilde{A}_\lambda(s, n_0)u(\omega) + \tilde{B}_\lambda(s, n_0)v(\omega),$$

其中

$$\tilde{A}_\lambda(s, n_0) = e^{\int_0^s R'_n(\tau, \Phi_\lambda(\tau, n_0), 0) d\tau} \int_0^s e^{-\int_0^\tau R'_n(\eta, \Phi_\lambda(\eta, n_0), 0) d\eta} A(\tau, \Phi_\lambda(\tau, n_0)) d\tau,$$

$$\tilde{B}_\lambda(s, n_0) = e^{\int_0^s R'_n(\tau, \Phi_\lambda(\tau, n_0), 0) d\tau} \int_0^s e^{-\int_0^\tau R'_n(\eta, \Phi_\lambda(\eta, n_0), 0) d\eta} B(\tau, \Phi_\lambda(\tau, n_0)) d\tau.$$

因此, $n = n(\omega, s, n_0, \varepsilon)$ 关于 ε 的 Taylor 展式为

$$n(\omega, s, n_0, \varepsilon) = \Phi_\lambda(s, n_0) + \varepsilon(\tilde{A}_\lambda(s, n_0)u(\omega) + \tilde{B}_\lambda(s, n_0)v(\omega)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

这时, 方程组 (3.2) 的 Poincaré 映射为

$$P(\omega, n_0, \varepsilon) = n(\omega, T, n_0, \varepsilon) = \Phi_\lambda(T, n_0) + \varepsilon(\tilde{A}_\lambda(T, n_0)u(\omega) + \tilde{B}_\lambda(T, n_0)v(\omega)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.7)$$

其中 $\Phi_\lambda(T, n_0)$ 是未扰动方程的 Poincaré 映射. 通过计算可得

$$\Phi_\lambda(T, n_0) = P(n_0, \lambda) = n_0 + a_1 \lambda n_0 + a_2 \lambda n_0^2 + a_3 n_0^3 + \mathcal{O}(\lambda^2) + \mathcal{O}(n_0^4),$$

其中

$$a_1 = \left. \frac{\partial^2 P}{\partial n \partial \lambda} \right|_{(0,0)} > 0, \quad a_2 = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^3 P}{\partial n^2 \partial \lambda} \right|_{(0,0)}, \quad a_3 = \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^3 P}{\partial n^3} \right|_{(0,0)} < 0.$$

最后, 我们得到边界方程组 (3.2) 的后继函数为

$$d(\omega, n_0, \varepsilon) = a_1 \lambda n_0 + a_2 \lambda n_0^2 + a_3 n_0^3 + \varepsilon(\hat{A}(\lambda, n_0)u(\omega) + \hat{B}(\lambda, n_0)v(\omega)) + \mathcal{O}(\lambda^2) + \mathcal{O}(n_0^4) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.8)$$

其中

$$\hat{A}(\lambda, n_0) := \tilde{A}_\lambda(T, n_0), \quad \hat{B}(\lambda, n_0) := \tilde{B}_\lambda(T, n_0).$$

第 2 步 后继函数的估计.

为了得到后继函数 (3.8) 的估计, 我们首先进行一个尺度化变换 $n_0 = \varepsilon^{1/3}h$, $\lambda = \varepsilon^{2/3}\bar{\lambda}$. 令 $\tilde{n}_0$ 表示后继函数 $d(\omega, n_0, \varepsilon)$ 的象, 即 $\tilde{n}_0 := d(\omega, n_0, \varepsilon)$, 则在新坐标 h 下, 后继函数的象为

$$\begin{aligned}\tilde{h} &= \varepsilon^{-1/3}\tilde{n}_0 = \varepsilon^{-1/3}d(\omega, n_0, \varepsilon) = \varepsilon^{-1/3}d(\omega, \varepsilon^{1/3}h, \varepsilon) \\ &= \varepsilon^{-1/3}[a_1\varepsilon^{2/3}\bar{\lambda}\varepsilon^{1/3}h + a_2\varepsilon^{2/3}\bar{\lambda}\varepsilon^{2/3}h^2 + a_3\varepsilon h^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^{4/3}\bar{\lambda}^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^{4/3}h^4) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &\quad + \varepsilon(\hat{A}(\varepsilon^{2/3}\bar{\lambda}, \varepsilon^{1/3}h)u(\omega) + \hat{B}(\varepsilon^{2/3}\bar{\lambda}, \varepsilon^{1/3}h)v(\omega))] \\ &= \varepsilon^{2/3}[a_1\bar{\lambda}h + \varepsilon^{1/3}a_2\bar{\lambda}h^2 + a_3h^3 + \varepsilon^{1/3}\mathcal{O}(\bar{\lambda}^2) + \varepsilon^{1/3}\mathcal{O}(h^4) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &\quad + \hat{A}(\varepsilon^{2/3}\bar{\lambda}, \varepsilon^{1/3}h)u(\omega) + \hat{B}(\varepsilon^{2/3}\bar{\lambda}, \varepsilon^{1/3}h)v(\omega)] \\ &=: \tilde{d}(\omega, h, \varepsilon),\end{aligned}$$

即 $\tilde{d}(\omega, h, \varepsilon)$ 是尺度化之后的后继函数. 令

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{d}}(\omega, h, \varepsilon) &:= a_1\bar{\lambda}h + \varepsilon^{1/3}a_2\bar{\lambda}h^2 + a_3h^3 + \hat{A}(\varepsilon^{2/3}\bar{\lambda}, \varepsilon^{1/3}h)u(\omega) + \hat{B}(\varepsilon^{2/3}\bar{\lambda}, \varepsilon^{1/3}h)v(\omega) \\ &\quad + \varepsilon^{1/3}\mathcal{O}(\bar{\lambda}^2) + \varepsilon^{1/3}\mathcal{O}(h^4) + \mathcal{O}(\varepsilon).\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon > 0$, 于是, $\tilde{\tilde{d}}(\omega, h, \varepsilon)$ 与 $\tilde{d}(\omega, h, \varepsilon)$ 有相同的图像和实根. 故下面仅需要分析 $\tilde{\tilde{d}}(\omega, h, \varepsilon)$ 的性质.

取极限 $\varepsilon \downarrow 0$, 则

$$\tilde{\tilde{d}}(\omega, h, \varepsilon) \rightarrow \hat{d}(\omega, h) := a_1\bar{\lambda}h + a_3h^3 + A_0u(\omega) + B_0v(\omega),$$

其中

$$A_0 = \hat{A}(0, 0), \quad B_0 = \hat{B}(0, 0).$$

这是因为, 考虑 $\hat{A}(\lambda, n_0)$ 和 $\hat{B}(\lambda, n_0)$ 关于其分量的 Taylor 展式

$$\begin{aligned}\hat{A}(\lambda, n_0) &= \hat{A}(0, 0) + \hat{A}'_\lambda(0, 0)\lambda + \hat{A}'_h(0, 0)h + \mathcal{O}(|\lambda, h|^2), \\ \hat{B}(\lambda, n_0) &= \hat{B}(0, 0) + \hat{B}'_\lambda(0, 0)\lambda + \hat{B}'_h(0, 0)h + \mathcal{O}(|\lambda, h|^2),\end{aligned}$$

从而得到

$$\hat{A}(\varepsilon^{2/3}\bar{\lambda}, \varepsilon^{1/3}h) \rightarrow \hat{A}(0, 0), \quad \hat{B}(\varepsilon^{2/3}\bar{\lambda}, \varepsilon^{1/3}h) \rightarrow \hat{B}(0, 0), \quad \text{当 } \varepsilon \rightarrow 0.$$

注意到对给定的样本点 $\omega \in \Omega_0$, $u^2(\omega) \leq 1$, $v^2(\omega) \leq 1$, 则 $u^2(\omega) + v^2(\omega) \leq 2$. 取极坐标

$$u(\omega) = r(\omega) \cos \theta(\omega), \quad v(\omega) = r(\omega) \sin \theta(\omega),$$

我们有

$$A_0u(\omega) + B_0v(\omega) = A_0r(\omega) \cos \theta(\omega) + B_0r(\omega) \sin \theta(\omega) = r(\omega) \sqrt{A_0^2 + B_0^2} \sin(\alpha + \theta(\omega)), \quad (3.9)$$

其中 $\sin \alpha = \frac{A_0}{\sqrt{A_0^2 + B_0^2}}$, 且 $0 \leq r(\omega) \leq \sqrt{2}$. 故 $\hat{d}(\omega, h)$ 的边界函数为

$$\hat{d}_\pm(h) = a_1\bar{\lambda}h + a_3h^3 \pm c, \quad (3.10)$$

其中 $c = \sqrt{2}\sqrt{A_0^2 + B_0^2}$ 为正参数.

第 3 步 分支分析.

当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时, 方程组 (3.2) 对应的后继函数的边界为 $\hat{d}_{\pm}(h) = a_1 \bar{\lambda} h + a_3 h^3 \pm c$, 见图 2. 在确定性分支 $\bar{\lambda} = 0$ 处 (见图 2(a)), 令 I_1 表示 $\hat{d}_-$ 左边的零点, I_2 表示 $\hat{d}_+$ 右边的零点. 在 $h = I_1$ 处, 对所有的 $(u, v) \in \Delta$ 有 $\hat{d}(h) \geq 0$, 从而当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时系统 (3.2) 的后继函数是正的, 这意味着从环域 $n \in [I_1, I_2]$ 出发的相轨线将停留在区域 $\{(s, n) : n \geq I_1\}$. 在 $h = I_2$ 处, $\hat{d}(h) \leq 0$, 故当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时系统 (3.2) 的后继函数是负的, 这意味着从环域 $n \in [I_1, I_2]$ 出发的相轨线将停留在区域 $\{(s, n) : n \leq I_2\}$. 至此, 我们证明了环域 $n \in [I_1, I_2]$ 是系统 (3.2) 的极小正向不变集.

对充分小的 $\bar{\lambda} > 0$ (见图 2(b)), 极小正向不变集仍是由 $n = I_1$ 和 $n = I_2$ 所界的环域.

当 $\bar{\lambda}$ 增加到某个临界值 $\bar{\lambda}_{\text{bif}}$ (见图 2(c)), 此时函数 $\hat{d}_+$ 和 $\hat{d}_-$ 都存在一个二阶零点 (分别是 I_2 和 I_3). 类似可证两个子区间 $[I_1, I_2]$ 和 $[I_3, I_4]$ 是完全不变的, 并且是极小的. 从而两个环域 $n \in [I_1, I_2]$ 和 $n \in [I_3, I_4]$ 均为系统 (3.2) 的极小正向不变集. 从中间的区域出发的轨线不能回返, 它们被吸引到外面的两个子区间 $[I_1, I_2]$ 或 $[I_3, I_4]$. 此结论对比 $\bar{\lambda}$ 稍大的参数值也成立 (见图 2(d)).

现在我们考察其他三项 $(u(\omega), \tilde{v}(\omega))$, $(\tilde{u}(\omega), v(\omega))$ 和 $(\tilde{u}(\omega), \tilde{v}(\omega))$ 对应的边界方程组, 因为这三项均满足 $u^2(\omega) \leq 1$, $\tilde{u}^2(\omega) \leq 1$, $v^2(\omega) \leq 1$, $\tilde{v}^2(\omega) \leq 1$, 故同理可证它们对应的边界方程组的极小正向不变集与方程组 (3.2) 相同. 回到原始的扰动系统 (3.1), 我们断言: 该极小正向不变集对系统 (3.1) 仍是

图 2 方程组 (3.2) 后继函数的边界示意图, 其中 $a_1 = 1 > 0$, $a_3 = -0.7 < 0$, $c = 0.25$, 每张图中上面的曲线是 $\hat{d}_+(h) = a_1 \bar{\lambda} h + a_3 h^3 + c$, 中间是 $\hat{d}(h) = a_1 \bar{\lambda} h + a_3 h^3$, 下面是 $\hat{d}_-(h) = a_1 \bar{\lambda} h + a_3 h^3 - c$. (a) $\bar{\lambda} = 0$; (b) $\bar{\lambda} = 0.35$; (c) $\bar{\lambda} = 0.65$; (d) $\bar{\lambda} = 0.76$

图 3 系统 (3.1) 在第一象限内向量场的比较, 中间是系统 (3.1) 在该点的向量场 $(v_1, v_2) = (f_\lambda + \varepsilon \xi_{1t}, g_\lambda + \varepsilon \xi_{2t})$ ($\forall t \in \mathbb{R}$), 两边是边界向量场 $(f_\lambda + \varepsilon u, g_\lambda + \varepsilon v)$ 和 $(f_\lambda + \varepsilon \tilde{u}, g_\lambda + \varepsilon \tilde{v})$

不变的. 事实上, 设 $(v_1, v_2) = (f_\lambda + \varepsilon \xi_{1t}, g_\lambda + \varepsilon \xi_{2t})$ 为系统 (3.1) 对应的向量场, 则一定存在两个边界向量场使得 (v_1, v_2) 被限制在其内部. 如图 3 所示, 在第一象限内, (v_1, v_2) 介于向量场 $(f_\lambda + \varepsilon u, g_\lambda + \varepsilon v)$ 和 $(f_\lambda + \varepsilon \tilde{u}, g_\lambda + \varepsilon \tilde{v})$ 之间. 既然系统 (3.1) 的向量场一定介于其中的两个边界向量场中, 故边界向量场的极小正向不变集也是原始系统 (3.1) 的正向不变集. 因此, 当参数 λ 在 0 附近时, 系统 (3.1) 存在唯一的极小正向不变集, 而随着 λ 增大穿过分支值时, 极小正向不变集变为两个, 即系统 (3.1) 发生了 (B1) 型的硬分支.

最后, 在分支值处, 函数 $\hat{d}_-(h)$ 右边的极值为零, 即

$$\hat{d}_-(I_3) = \hat{d}_-\left(\sqrt{\frac{a_1 \bar{\lambda}}{-3a_3}}\right) = \frac{2a_1 \sqrt{a_1}}{3\sqrt{-3a_3}} \bar{\lambda}^{\frac{3}{2}} - c = 0,$$

由此可得 $\bar{\lambda} = \mathcal{O}(c^{\frac{2}{3}})$. 因此, 根据前面的一系列变换我们知道 $\lambda_{\text{bif}} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{2}{3}})$. 另外, 在 $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_{\text{bif}}$ 处, 右极值点为

$$I_3 = \sqrt{\frac{a_1 \bar{\lambda}_{\text{bif}}}{-3a_3}} = \left(\frac{c}{-2a_3}\right)^{\frac{1}{3}},$$

上式是一个严格正数. 因此, 不变区间从 $[I_1, I_2]$ 到 $[I_1, I_2] \cup [I_3, I_4]$ 关于 Hausdorff 度量是不连续变化的. 于是, $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_{\text{bif}}$ 处的硬分支同时也是 (B2) 类型的. 定理证毕. $\square$

类似地, 我们可以得到系统 (3.1) 对应于鞍结周期轨分支和跨临界周期轨分支的硬分支定理.

定理 3.2 假设当 $\varepsilon = 0$ 时, 推论 2.3 中的情形 (ib) 成立, 且 $\frac{\partial^2 P}{\partial n^2} \Big|_{(0,0)} < 0$, 则对小的 $\varepsilon > 0$ 和 λ , 系统 (3.1) 的解流没有极小正向不变集. 随着 λ 增大, 当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时, 系统在分支值 $\lambda_{\text{bif}} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ 处发生硬分支. 在 $\lambda = \lambda_{\text{bif}}$ 处, 系统 (3.1) 存在一个同胚于环域的极小正向不变集 E_λ , 该硬分支为 (B1) 类型.

定理 3.3 假设当 $\varepsilon = 0$ 时, 推论 2.4 中的情形 (ia) 成立, 并且有

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \Big|_{(0,0)} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial n^2} \Big|_{(0,0)} < 0,$$

则对小的 $\varepsilon > 0$ 和 λ , 系统 (3.1) 的解流没有极小正向不变集. 随着 λ 增大, 当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时, 系统在分支值 $\lambda_{\text{bif}} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$ 处发生硬分支. 在 $\lambda = \lambda_{\text{bif}}$ 处, 系统 (3.1) 有一个同胚于环域的极小正向不变集 E_λ , 该分支为 (B1) 类型.

上述两个定理的证明与定理 3.1 类似, 故此处略去具体过程.

4 具体例子的数值模拟

本节对具体例子的硬分支进行数值模拟, 相应的确定性系统可参见文献 [21].

例 4.1 考虑下面的平面系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x(1 - x^2 - y^2)(\mu - (x^2 + y^2 - 1)^2) + \varepsilon \xi_{1t}(\omega), \\ \dot{y} &= -x - y(1 - x^2 - y^2)(\mu - (x^2 + y^2 - 1)^2) + \varepsilon \xi_{2t}(\omega),\end{aligned}\quad (4.1)$$

对样本空间中的任一个样本点 $\omega \in \Omega_0$, $(\xi_{1t}(\omega), \xi_{2t}(\omega))$ 取值于单位圆盘 $\Delta = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. 在极坐标下, 我们有

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(r^2 - 1)(\mu - (r^2 - 1)^2) + \varepsilon(\xi_{1t}(\omega) \cos \theta + \xi_{2t}(\omega) \sin \theta), \\ \dot{\theta} &= -1 + \frac{\varepsilon}{r}(-\xi_{1t}(\omega) \sin \theta + \xi_{2t}(\omega) \cos \theta).\end{aligned}\quad (4.2)$$

根据定理 3.1 的证明, 上述方程组的第一个方程的边界函数为

$$\dot{r}_{\pm} = r_{\pm}(r_{\pm}^2 - 1)(\mu - (r_{\pm}^2 - 1)^2) \pm \varepsilon.$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 微分方程 (4.1) 的叉型周期轨分支在文献 [21] 中给出, 图 4 给出了相应的分支图. 当 $\mu > 0$ 时, 方程 (4.2) 对应的确定性系统有三条周期轨, 分别是

$$\Gamma_0 : \gamma_0(t) = (\cos t, \sin t)^T, \quad \Gamma_{1,2} : \gamma_{1,2}(t) = \sqrt{1 \pm \mu^{1/2}}(\cos t, \sin t)^T.$$

对确定性系统的周期轨 Γ_0 , 可以验证定理 2.1 中的条件 (2.2) 和推论 2.2 中条件 (ib) 成立. 接下来我们对扰动系统的极小正向不变集进行数值模拟, 具体的模拟方法参照文献 [19] 的最后一节. 首先, 噪声项 u 和 v 由下面的随机系统产生:

$$d\xi_{1t}(\omega) = \sigma dW_1(t, \omega), \quad d\xi_{2t}(\omega) = \sigma dW_2(t, \omega), \quad (4.3)$$

其中 $W_1(t, \omega)$ 和 $W_2(t, \omega)$ 是独立的满足标准正态分布的 Gauss 过程, 方程 (4.3) 是 Itô 积分方程. 参数 σ 表示随机变量的标准差, 同时 σ 可以理解为刻画噪声变化快慢的一个量, σ 越大, 噪声变化越快, 我们称之为快噪声. σ 越小, 噪声变化越慢, 我们称之为慢噪声. 我们用一阶 Taylor 法逼近方程 (4.3) 的解. 为了保证有界性, 我们将噪声项 (u, v) 限制在单位圆盘内, 然后将该噪声扰动加到方程 (4.1) 中, 用二阶 Adams-Bashforth 方法数值求解方程 (4.1) (参见文献 [24]).

方程 (4.1) 相应的极小正向不变集在图 5 (快噪声的例子: $\sigma = 1.0$) 和 6 (慢噪声的例子: $\sigma = 0.001$)

图 4 $\varepsilon = 0$ 时, 方程 (4.1) 的叉型周期轨分支图

中给出. 这时, 系统的极小正向不变集的闭包是系统不变测度的支撑, 为了在数值上模拟不变测度的密度函数, 我们作图时用不同的颜色代表不同的数据密度, 即红色区域表示样本点数很大从而代表高的密度, 而偏蓝色区域表示低的密度. 数值模拟的具体步骤如下: 首先运行系统 (4.1) 1,000 次从而使方程的解趋向极小正向不变集, 然后再运行系统 5×10^4 次, 并且每五步记录一次 (x, y) 的值, 最后对 100 个初值点重复该过程, 总共记录 10^6 个点.

图 5 快噪声下叉型分支的不变测度的密度分布, $\sigma = 1.0$, $\varepsilon = 0.1$. (a) $\mu = 0$; (b) $\mu = 0.05$; (c) $\mu = 0.08$; (d) $\mu = 0.09$; (e) $\mu = 0.12$; (f) $\mu = 0.25$

图 6 慢噪声下叉型分支的不变测度的密度分布, $\sigma=0.001$, $\varepsilon=0.1$. (a) $\mu=0$; (b) $\mu=0.0018$; (c) $\mu=0.003$; (d) $\mu=0.008$; (e) $\mu=0.015$; (f) $\mu=0.05$

从图中我们可以看出, 对小的参数值 μ , 系统 (4.1) 的极小正向不变集是一个环, 当 $\mu > 0.09$ (对快噪声而言) 时, 极小正向不变集变为两个不相交的环, 该过程对慢噪声发生在 $\mu > 0.003$. 此分支为 (B1) 类型的极小正向不变集的硬分支, 该现象与定理 3.1 的结论相吻合. 比较快慢噪声的模拟结果,

我们发现噪声的快慢对结果有明显的影响, 快噪声对应的环域半径较大. 快噪声对应的不变密度的变化相对慢噪声而言更加光滑, 这一现象与文献 [19] 的模拟结果类似. 另外, 可以对有界噪声扰动下鞍结分支和跨临界分支进行类似的数值模拟.

参考文献

- 1 Zeeman E C. Stability of dynamical systems. *Nonlinearity*, 1988, 1: 115–155
- 2 Zeeman E C. On the classification of dynamical systems. *Bull Lond Math Soc*, 1988, 20: 545–557
- 3 Arnold L, Namachchivaya N S, Schenk-Hoppe K R. Toward an understanding of stochastic Hopf bifurcation: A case study. *Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg*, 1996, 6: 1947–1975
- 4 Lefever R, Turner J. Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise. *Phys Rev Lett*, 1986, 56: 1631–1634
- 5 Lu K, Wang D. Chaos in differential equations driven by a nonautonomous force. *Nonlinearity*, 2010, 23: 2935–2975
- 6 Arnold L. *Random Dynamical Systems*. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1998
- 7 Arnold L, Imkeller P. Stratonovich calculus with spatial parameters and anticipative problems in multiplicative ergodic theory. *Stochastic Process Appl*, 1996, 62: 19–54
- 8 Lu K, Wang Q. Chaotic behavior in differential equations driven by a Brownian motion. *J Differential Equations*, 2011, 251: 2853–2895
- 9 Mallic K, Marcq P. Stability analysis of a noise-induced Hopf bifurcation. *Eur Phys J B*, 2003, 36: 119–128
- 10 Schenk-Hoppé K R. Bifurcation scenarios of the noisy Duffing-Van der Pol oscillator. *Nonlinear Dynam*, 1996, 11: 255–274
- 11 Tateno T. Noise-induced effects on period-doubling bifurcation for integrate-and-fire oscillators. *Phys Rev E* (3), 2002, 65: 021901
- 12 Wieczorek S. Stochastic bifurcation in noise-driven lasers and Hopf oscillators. *Phys Rev E* (3), 2009, 79: 036209
- 13 Zmarrou J, Homburg A J. Bifurcations of stationary measures of random diffeomorphisms. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2007, 27: 1651–1692
- 14 Zhao H, Zheng Z H. Random periodic solutions of random dynamical systems. *J Differential Equations*, 2009, 246: 2020–2038
- 15 Halley J. Ecology, evolution and $1/f$ -noise. *Trends Ecol Evol*, 1996, 11: 33–37
- 16 D’Onofrio A. Bounded-noise-induced transitions in a tumor-immune system interplay. *Phys Rev E* (3), 2010, 81: 021923
- 17 Homburg A J, Young T. Hard bifurcations in dynamical systems with bounded random perturbations. *Regul Chaotic Dyn*, 2006, 11: 247–258
- 18 Homburg A J, Young T. Bifurcations for random differential equations with bounded noise on surfaces. *Topol Methods Nonlinear Anal*, 2010, 35: 77–97
- 19 Botts R T, Homburg A J, Young T. The Hopf bifurcation with bounded noise. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2012, 32: 2997–3007
- 20 Araújo V. Attractors and time averages for random maps. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 2000, 17: 307–369
- 21 Perko L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 2001
- 22 Arnold V I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1983
- 23 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题. 北京: 北京大学出版社, 2000
- 24 Robinson J C. Stability of random attractors under perturbation and approximation. *J Differential Equations*, 2002, 186: 652–669

Bifurcation of periodic orbit in planar differential systems with bounded random perturbation

MA JiYing, XIAO DongMei & XU ZhaoQuan

Abstract The present paper is dedicated to the bifurcation of periodic orbit for a class of planar differential

systems with bounded random perturbation. We first recall three kinds of bifurcations of a nonhyperbolic periodic orbit for planar differential systems with a parameter: Pitchfork bifurcation, saddle-node bifurcation and transcritical bifurcation. The direction and the stability of the periodic orbits bifurcating from the nonhyperbolic periodic orbit are investigated. Then we consider a bounded random perturbation on this system, and study the minimal forward invariant (abbreviated as MFI) sets of the perturbed system. When the parameter changes in a small neighborhood of a bifurcation value, we show that the number of MFI sets changes and the hard bifurcation occurs. Some examples are provided to illustrate our theoretical results.

Keywords planar differential system, bounded random perturbation, MFI set, hard bifurcation

MSC(2010) 37H20, 37G15

doi: 10.1360/N012016-00131