立方与高次幂的 Waring 问题*

陆 鸣 皋

(中国科学技术大学数学系, 合肥 230026)

关键词 堆垒数论、高次幂和、Hardy-Littlewood 方法的应用

在这篇文章中, 我们发展了圆法中的 pruning 技术并提出了用 Vaughan 的 p -adic 叠代方法处理混合幂和的新想法.

假定 ε 是一个充分小的正数, $\eta = \eta(\varepsilon)$ 是一个至多依赖于 ε 的小正数, n 是与 ε 及 η 有关的充分大的自然数.

设

$$P = \left[\frac{1}{5} n^{1/3} \right], \quad f_k(\alpha, N) = \sum_{N < x \leq 2N} e(\alpha x^k), \quad g_k(\alpha, N; m) = \sum_{\substack{N < x \leq 2N \\ (x, m) = 1}} e(\alpha x^k),$$

及设

$$\mathcal{A}(N, N^\eta) = \{n: n \leq N, p|n \Rightarrow p \leq N^\eta\},$$

$$h(\alpha, N) = \sum_{x \in \mathcal{A}(N, N^\eta)} e(\alpha x^3).$$

进一步, 假定 C 是一个大常数及取

$$Y = P^{1/\eta}, \quad H = CPY^{-1}, \quad Q = PY^{-1}, \quad Z = Q^{1/\eta}, \\ R = QZ^{-1}, \quad W = Q^{1/\eta}, \quad S = QW^{-1}.$$

现定义

$$F(\alpha) = \sum_{\substack{Y < P < 2Y \\ p \equiv 2 \pmod{3}}} g_3(\alpha, P; p) \sum_{\substack{Z < p_1 < 2Z \\ p_1 \equiv 2 \pmod{3}}} \sum_{\substack{W < p_2 < 2W \\ p_2 \equiv 2 \pmod{3}}} g_3(p^3 \alpha, Q; p_1 p_2) f_3(p^3 p^3 \alpha, R) h(p^3 p^3 \alpha, S).$$

定理 1 设 $M = P^{201/490}$ 及 $L = 128MY^3 = 128P^{\frac{411}{490}}$. 进而记 m 为区间 $(LP^{-3}, 1 + LP^{-3})$ 中具有以下性质的 α 的集合: 只要存在整数 $a, q, (a, q) = 1$ 使得 $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq q^{-1}LP^{-3}$ 成立, 我们便有 $q > L$. 于是有

$$\int_{\mathbf{m}} |F(\alpha)|^2 d\alpha \ll Y^2 Z^2 W^2 P^{1+\varepsilon} QRS.$$

这个定理是文献[1]中引理 10 的一个改进. 定理的证明除用了文献[2]中的新的叠代方法之外, 我们主要给出了如

$$\sum_{q < P} q^{-\varepsilon} \sum_{\substack{Z < p_1 < 2Z \\ p_1 \equiv 2 \pmod{3}}} p_1^{-\varepsilon} \sum_{\substack{W < p_2 < 2W \\ p_2 \equiv 2 \pmod{3}}} p_2^{-\varepsilon} \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q |S_3(q, a; p_1 p_2)|^2 |S_3(q, ap_1^3)|^4$$

本文 1991 年 6 月 24 日收到.

* 国家自然科学基金资助项目.

这类和的最佳估计,这里

$$S_k(q, a) = \sum_{x=1}^q e(ax^k/q), \quad S_k(q, a; m) = \sum_{\substack{x=1 \\ (x, m)=1}}^{q_m} e(ax^k/q);$$

另外在优弧上采用 pruning 技术时用了二分法,这进一步改善了文献[3]中发展的 pruning 技术。

值得引起注意的是我们发现 Vaughan 的 p -adic 叠代技术也能应用到混合幂和问题上去,这实质上改进了混合幂和的指数密率的估计。下面的定理仅是一个例子。

定理 2 假定 $0 < c \leq 2^{-\frac{11}{10}}(96)^{-\frac{1}{20}}$ 及取

$$X = cP^{3/40}, \quad Q_1 = PX^{-2}, \quad Q_2 = P^{1/2}X^{-1}.$$

现记 T 为方程

$$x_1^3 + (p^2)^3 y_1^3 + p^6 z_1^6 + p^6 z_2^6 = x_2^3 + (p^2)^3 y_2^3 + p^6 z_3^6 + p^6 z_4^6,$$

适合条件

$$P < x_i \leq 2P, \quad Q_1 < y_i \leq 2Q_1, \quad Q_2 < z_i \leq 2Q_2$$

及

$$X < p \leq 2X, \quad p \nmid x_i, \quad p \equiv 2 \pmod{3} \quad (p \text{ 为素数})$$

的解数,那末我们有

$$T \ll XP^{\frac{33}{52}+\epsilon} Q_1^2.$$

该定理的证明我们采用 Vaughan^[1] 证明引理 10 的思路,从而得到一个较好的估计。

Hooley^[4] 首先研究了一个自然数 n 表为 6 个立方和二 k 次幂和表法数的问题。对于 $k=4$ 的情况,如以 $v_1(n)$ 表示一自然数 n 表为 6 个立方和 2 个四次方和的表法数,那末,Brüdern^[5] 证明了 $v_1(n) \gg n^{3/2}$, 独立地,文献[6] (也见 "Tagungs bericht, 42/1988, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach") 中建立了更强的结果:

$$v_1(n) \geq \frac{1}{(48)^2} \left(\log \frac{16}{15} \right)^4 \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)^2 \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)^2}{\Gamma(5/2)} \Theta(n) n^{3/2},$$

这里 $\Theta(n)$ 是奇异级数。现在,定理 1 和 2 的结合,再加上 pruning 技术的巧妙应用,使我们得到 $k=6$ 时的一个结果。这就是下面的

定理 3 设 $v(n)$ 为一个自然数 n 表为 6 个立方和 2 个六次方之和的表法数,那末我们有

$$v(n) \gg n^{977/840} (\log n)^{-4}.$$

参 考 文 献

- [1] Vaughan, R. C., *J. Reine Angew. Math.*, 365(1986), 122—170.
- [2] Vaughan, R. C., *Acta Math.*, 162(1989), 1—71.
- [3] Lu, M. G., *Acta Arith.*, LVIII(1991), 1:89—102.
- [4] Hooley, C., *Acta Math.*, 157(1986), 49—97.
- [5] Brüdern, J., *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1988, 104: 199—206.
- [6] Lu M. G., *Sci. Sinica*, 34(1991), 4:385—394.