带密度的不可压 Euler 方程在临界 Besov 空间中的适定性

周勇^{①*}, 辛周平^②, 樊继山^③

① 浙江师范大学数学系, 金华 321004;

② 香港中文大学数学研究所, 香港;

③ 南京林业大学应用数学系, 南京 210037

E-mail: yzhoumath@zjnu.edu.cn, zpxin@ims.cuhk.edu.cn, fanjishan@njfu.edu.cn

收稿日期: 2010-02-20; 接受日期: 2010-07-17; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10971197)、浙江省自然科学基金 (批准号: R6090109) 和香港 RGC 研究基金 (批准号: CUHK4040/06P, CUHK4042/08P 和 CA05.06) 资助项目

摘要 本文证明了带密度的不可压 Euler 方程在临界 Besov 空间中的局部适定性, 并且只用涡度场给出了强解的一个爆破准则. 另外, 本文关于带密度的不可压磁流体方程得到了类似结果.

关键词 带密度 Euler 方程 磁流体方程 适定性

MSC (2000) 主题分类 35Q35, 76D05, 76D03

1 引言

我们考虑 $\mathbb{T}^N (N \geq 2)$ 中的带密度的不可压 Euler 方程:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + (v \cdot \nabla) \rho = 0, \\ \partial_t (\rho v) + (v \cdot \nabla) \rho v + \nabla \pi = \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ (\rho, v)|_{t=0} = (\rho_0, v_0). \end{cases} \quad (1.1)$$

这里 v 是速度场, ρ 是密度, π 是压力. v_0 是初始速度, 满足 $\operatorname{div} v_0 = 0$. 假设存在两正常数 m 和 M 使 $0 < m \leq \rho_0 \leq M$. 设 $\int_{\mathbb{T}^N} \rho_0 dx = 1$, $\int_{\mathbb{T}^N} v_0 dx = 0$.

如果 ρ_0 是一个常数, 则 (1.1) 是经典的不可压 Euler 方程, 关于它的局部适定性已有很多工作. 设 $v_0 \in H^m(\mathbb{R}^N)$, $m > 1 + N/2$, Kato^[1] 证明了存在唯一解 $v \in C([0, T]; H^m(\mathbb{R}^N))$, 其中 $T := T(\|v_0\|_{H^m})$. 以后有许多工作是在各种函数空间中建立局部适定性^[2-7]. 比如, [5] 中使用空间 $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, $s > 1 + N/p$, $1 < p < \infty$. [2] 中使用空间 $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)$, $s > 1 + N/p$, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$.

对于带密度的不可压方程 (1.1), 只有很少的结果. 对于光滑初值, 在有界区域中, Beirão da Veiga 和 Valli^[8] 证明了局部适定性. Itoh^[9] 在无界区域情形证明了适定性. 而本文的第一作者^[10] 证明了方程 (1.1) 在空间 $B_{p,q}^s$ ($s > 1 + N/p$) 中的适定性.

引用格式: Zhou Y, Xin Z P, Fan J S. Well-posedness for the density-dependent incompressible Euler equations in the critical Besov spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2010, 40(10): 959-970, doi: 10.1360/012010-117

在 2003 年, 第一作者^[11]在临界 Besov 空间, 即 $(\rho_0 - \bar{\rho}, v_0) \in B_{p,1}^{1+N/p}(\mathbb{R}^N)$ ($1 < p < \infty$) 中建立了适定性, 推广了 [12] 的结果 $p = 2$. 然而 [11] 要求 $\rho_0 - \bar{\rho}$ 很小.

本文的目标是在周期 (用 $\mathbb{T}^N$ 表示) 边界条件情形去掉 [11] 中 $\rho_0 - \bar{\rho}$ 很小这一条件. 我们的结果依赖于 Besov 空间中的一个精细的椭圆型估计和一个新的先验估计.

若 $1 < p_1 \leq 2$, 有 $B_{p_1,1}^{1+\frac{N}{p_1}} \subset B_{2,1}^{1+\frac{N}{2}}$. $p = 2$ 情形已在 [12] 中证明, 所以我们将假设 $p > 2$.

定理 1.1 (i) 局部适定性: 设 $2 < p < \infty$, $\rho_0 \in B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}(\mathbb{T}^N)$, $v_0 \in B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}(\mathbb{T}^N)$, $\operatorname{div} v_0 = 0$ (在 $\mathbb{T}^N$ 中), $f \in L^1(0, T; B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}(\mathbb{T}^N))$, 则存在

$$T := T(\|\rho_0\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}}, \|v_0\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}}) > 0,$$

使问题 (1.1) 在 $[0, T)$ 上存在唯一解 (ρ, v) , 满足 $(\rho, v) \in C([0, T]; B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})$.

(ii) 爆破准则: 设 $T^* < \infty$ 是 (i) 中的最大存在时间, 即, 有

$$\lim_{t \rightarrow T^*} (\sup \|\rho(t)\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} + \sup \|v(t)\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}}) = \infty,$$

则必有

$$\int_0^{T^*} \|\omega(t)\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} dt = \infty,$$

这里 $\omega := \operatorname{curl} v$ 是涡度场.

在第 2 节, 我们简单介绍 Besov 空间和一些性质. 在第 3 节, 我们证明了一个线性椭圆方程的估计. 在第 4 节, 我们证明定理 1.1. 在最后一节第 5 节, 我们考虑带密度的不可压磁流体方程.

2 Littlewood-Paley 分解和 Besov 空间

我们先介绍 Littlewood-Paley 分解. 用 $\mathcal{S}$ 表示 Schwartz 速降函数类, $\mathcal{S}'$ 是 $\mathcal{S}$ 的对偶空间. 设 $f \in \mathcal{S}$, 则 f 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 为

$$\mathcal{F}(f) \equiv \hat{f} := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

关于 $\mathcal{S}'$ 上的 Fourier 变换及其逆变换可用通常的方法定义.

设 $\phi \in \mathcal{S}$ 满足

$$\operatorname{Supp} \hat{\phi} \subset \left\{ \xi : \frac{5}{6} \leq |\xi| \leq \frac{12}{5} \right\} \quad \text{及} \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(2^{-j}\xi) = 1, \quad \xi \neq 0.$$

记 $\hat{\phi}_j := \hat{\phi}(2^{-j}\xi)$, 即 $\phi_j(x) = 2^{jN} \phi(2^j x)$, 对 $\forall f \in \mathcal{S}'$, 我们定义

$$\Delta_j f := \phi_j * f \quad \text{及} \quad S_j f := \sum_{k \leq j-1} \phi_k * f. \quad (2.1)$$

则齐次 Besov 半范数 $\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$ 和 Triebel-Lizorkin 半范数 $\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s}$ 可定义为:

定义 2.1^[13, 14] 设 $-\infty < s < \infty$, $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, 记

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} := \begin{cases} \left(\sum_j 2^{jq s} \|\Delta_j f\|_{L^p}^q \right)^{1/q}, & q \in (0, \infty), \\ \sup_j 2^{jq s} \|\Delta_j f\|_{L^p}, & q = \infty. \end{cases}$$

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s} := \begin{cases} \left\| \left(\sum_j 2^{jq s} |\Delta_j f|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p}, & q \in (0, \infty), \\ \left\| \sup_j (2^{jq s} |\Delta_j f|) \right\|_{L^p}, & q = \infty. \end{cases}$$

可以证明上述半范数的定义不依赖于 ϕ 的选取, 且 $\dot{B}_{p,q}^s$ 和 $\dot{F}_{p,q}^s$ 是准范数空间. 对 $s > 0$, $(p, q) \in (1, \infty) \times [1, \infty]$, 我们可定义非齐次 Besov 空间范数和 Triebel-Lizorkin 空间范数为:

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} := \|f\|_{L^p} + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}, \quad \|f\|_{F_{p,q}^s} := \|f\|_{L^p} + \|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s}, \quad \forall f \in \mathcal{S}'. \quad (2.2)$$

这时 $\|f\|_{B_{p,q}^s}$ 和 $\|f\|_{F_{p,q}^s}$ 是 Banach 空间.

下面我们列举一些将要用到的性质.

引理 2.2 (Bernstein 引理^[13, 14]) 设 $k \in \mathbb{Z}^+$, $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, $\text{Supp } \hat{f} \subset \{2^{j-2} \leq |\xi| \leq 2^j\}$, 则有

$$\frac{1}{C} \|D^k f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s+k}} \leq C \|D^k f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{C} \|D^k f\|_{\dot{F}_{p,q}^s} \leq \|f\|_{\dot{F}_{p,q}^{s+k}} \leq C \|D^k f\|_{\dot{F}_{p,q}^s}. \quad (2.4)$$

引理 2.3 (嵌入^[13, 14]) 设 $s \in \mathbb{R}$, $p \in (1, \infty)$. 则有

$$\dot{B}_{p,1}^s \hookrightarrow \dot{F}_{p,2}^s \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^s, \quad \dot{B}_{p,1}^{N/p} \hookrightarrow L^\infty, \quad B_{p,1}^{N/p} \hookrightarrow L^\infty.$$

性质 2.4 (乘积估计^[14]) 设 $s > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $f, g \in \dot{B}_{p,q}^s \cap L^\infty$, 则 $fg \in \dot{B}_{p,q}^s$ 且有

$$\|fg\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq C(\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{\dot{B}_{p,q}^s}). \quad (2.5)$$

引理 2.5 (插值^[13, 14]) 设 $1 \leq p_1, q_1, p_2 \leq \infty$, $1 \leq q_2 < \infty$, $s = \theta s_1 + (1 - \theta)s_2$, $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2}$, 则有

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{p_1,q_1}^{s_1}}^\theta \|f\|_{\dot{B}_{p_2,q_2}^{s_2}}^{1-\theta}, \quad \text{对 } \forall f \in \dot{B}_{p_1,q_1}^{s_1} \cap \dot{B}_{p_2,q_2}^{s_2}.$$

3 一个椭圆型估计和一个线性方程组

为得到压力的估计, 我们需要下面的椭圆型估计. 因为 $N = 2$ 时更简单, 本节假定 $N \geq 3$.

引理 3.1 设 $2 < p < \infty$. ρ 满足 $0 < m \leq \rho \leq M$ 和 $\int_{\mathbb{T}^N} \rho \, dx = 1$. $f \in B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}$, $g \in B_{p,1}^{\frac{N}{p}}$. 在 $\mathbb{T}^N$ 中, ρ , π 和 f 满足

$$-\text{div} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \pi \right) = -\text{div} f + g, \quad \rho = \sigma + 1, \quad (3.1)$$

则有

$$\|\nabla\pi\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \leq C(1 + \|\nabla\sigma\|_{B_{p,1}^{\frac{N}{p}}})^{\frac{p+N}{2}} (\|f\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} + \|g\|_{B_{p,1}^{\frac{N}{p}}}), \quad (3.2)$$

这里常数 C 依赖于 p, N, m 和 M .

证明 [15, 性质 8.8] 已经证明一个与 (3.2) 类似的估计. 我们将主要用 [15] 中的思想来完成证明. 首先, 将 (3.1) 改写为

$$\operatorname{div}(b_m \nabla \pi) = \operatorname{div} f - g - E_m, \quad (3.3)$$

这里 $b_m := 1 + S_m a$, $E_m := \operatorname{div}((I_N - S_m)a \nabla \pi)$, $\frac{1}{\rho} = b = 1 + a$.

(3.3) 两端作用 Δ_q 得

$$\operatorname{div}(b_m \nabla \Delta_q \pi) = \operatorname{div} f_q - g_q - \Delta_q E_m + R_q, \quad (3.4)$$

这里 $R_q := \operatorname{div}(b_m \nabla \pi_q) - \Delta_q \operatorname{div}(b_m \nabla \pi)$, $f_q := \Delta_q f$, $g_q := \Delta_q g$, $\pi_q := \Delta_q \pi$.

(3.4) 两端乘以 $|\pi_q|^{p-2} \pi_q$, 分部积分后得

$$\begin{aligned} (p-1) \int_{\mathbb{T}^N} b_m |\nabla \pi_q|^2 |\pi_q|^{p-2} dx &\leq (\|\operatorname{div} f_q\|_{L^p} + \|g_q\|_{L^p} + \|R_q\|_{L^p}) \|\pi_q\|_{L^p}^{p-1} \\ &\quad + (p-1) \int_{\mathbb{T}^N} |(I_N - S_m)a| \cdot |\nabla \pi_q|^2 \cdot |\pi_q|^{p-2} dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

让 m 充分大使得

$$b_m \geq \frac{1}{2M} \quad \text{及} \quad \|a - S_m a\|_{L^\infty(0,T;B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})} \leq \frac{1}{2M}. \quad (3.6)$$

利用 [16] 中的引理 A5 及 (3.6), 由 (3.5) 可得

$$2^{2q} \|\pi_q\|_{L^p} \lesssim 2^q \|f_q\|_{L^p} + \|g_q\|_{L^p} + \|R_q\|_{L^p}, \quad (3.7)$$

这里 $A \lesssim B$ 表示 $A \leq CB$.

(3.7) 两端乘以 $2^{q\frac{N}{p}}$, 关于 q 求和得

$$\|\nabla\pi\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \lesssim \|f\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} + \|g\|_{B_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \|R_q\|_{B_{p,1}^{\frac{N}{p}}}. \quad (3.8)$$

由 [15, 引理 1] 的换位子估计来估计 R_q , (3.8) 可改写为

$$\|\nabla\pi\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \lesssim \|f\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} + \|g\|_{B_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \|\nabla S_m a\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \|\nabla\pi\|_{B_{p,1}^{\frac{N}{p}}}. \quad (3.9)$$

利用 Besov 空间的插值, 有

$$\|\nabla\pi\|_{B_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \lesssim C \|\nabla\pi\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}}^{\frac{s-1}{s}} \|\nabla\pi\|_{B_{p,\infty}^0}^{\frac{1}{s}}, \quad s = 1 + \frac{N}{p}.$$

利用 Bernstein 不等式, 有 $\|\nabla S_m a\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \lesssim 2^m \|\nabla a\|_{B_{p,1}^{\frac{N}{p}}}$. 由 (3.9) 得

$$\|\nabla\pi\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \lesssim \|f\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} + \|g\|_{B_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \|\nabla a\|_{B_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \|\nabla\pi\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}}^{\frac{N}{p+N}} \|\nabla\pi\|_{B_{p,\infty}^0}^{\frac{p}{p+N}}. \quad (3.10)$$

对 (3.10) 应用 Young 不等式, 有

$$\|\nabla \pi\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \lesssim \|f\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} + \|g\|_{B_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \|\nabla a\|_{B_{p,1}^{\frac{N}{p}}}^{1+\frac{N}{p}} \|\nabla \pi\|_{B_{p,\infty}^0}. \quad (3.11)$$

对于 $p > 2$, 有 $\|\nabla \pi\|_{B_{p,\infty}^0} \lesssim \|\nabla \pi\|_{L^p} \lesssim \|\nabla \pi\|_{L^2}^{\frac{2}{p}} \|\nabla \pi\|_{W^{1+\frac{N}{p},p}}^{1-\frac{2}{p}}$. 利用

$$\|\nabla \pi\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \lesssim \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} + \|g\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \quad (3.12)$$

和 $\|\nabla \pi\|_{W^{1+\frac{N}{p},p}} \lesssim \|\nabla \pi\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}}$, 再次利用 Young 不等式, 有

$$\|\nabla \pi\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \lesssim \|f\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} + \|g\|_{B_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \|\nabla a\|_{B_{p,1}^{\frac{N}{p}}}^{\frac{N+p}{2}},$$

由此即得 (3.2). 证毕.

考虑如下线性系统

$$\begin{cases} \partial_t v + (w \cdot \nabla) v + \frac{1}{\rho} \nabla P = f, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v(x, t = 0) = v_0(x), \end{cases} \quad (3.13)$$

关于 (3.13) 的局部适定性, 我们有

性质 3.2 ^[11] 假设 $T > 0$, $w \in L^\infty(0, T; B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})$, $\operatorname{div} w = 0$, $f \in L^1(0, T; B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})$. 给定 ρ 满足引理 3.1 中的条件. $v_0 \in B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}$, $\operatorname{div} v_0 = 0$. 则 (3.13) 有唯一解 $v \in C(0, T; B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})$.

4 定理 1.1 的证明

本节分三步证明定理 1.1.

用 $\sigma = \rho - 1$, (1.1) 改写为

$$\begin{cases} \partial_t \sigma + v \cdot \nabla \sigma = 0, \\ \partial_t v + (v \cdot \nabla) v + \frac{1}{\rho} \nabla \pi = f, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ \sigma = \rho - 1, \\ (\rho, v)|_{t=0} = (\rho_0, v_0). \end{cases} \quad (4.1)$$

第一步 迭代和一致估计

由于 $\sigma_0 \in B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}$, 选取 J 充分大使当 $j \geq J$ 时, 有

$$\left\| \sigma_0 - \sum_{|q| \leq j} \Delta_q \sigma_0 \right\|_{B_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \leq \frac{m}{2C_1},$$

C_1 是 $B_{p,1}^{\frac{N}{p}} \subset L^\infty$ 的嵌入常数.

定义 σ^n, v^n 是下列迭代方程的解:

$$\begin{cases} \partial_t \sigma^{n+1} + (v^n \cdot \nabla) \sigma^{n+1} = 0, \\ \partial_t v^{n+1} + (v^n \cdot \nabla) v^{n+1} + \frac{1}{\rho^n} \nabla \pi^{n+1} = f^n, \\ \operatorname{div} v^{n+1} = 0, \\ \sigma^n = \rho^n - 1, \\ (\rho^{n+1}, v^{n+1})|_{t=0} = (\rho_0^{n+1}, v_0^{n+1}) := \left(1 + \sum_{|q| \leq n+j+1} \Delta_q \sigma_0, \sum_{|q| \leq n+j+1} \Delta_q v_0\right), \end{cases} \quad (4.2)$$

这里 $f^n := \sum_{|q| \leq n+j} \Delta_q f$.

首先置 $(\sigma^0, v^0) = (0, 0)$. σ^{n+1} 和 v^{n+1} 是 (4.2) 的解.

现在建立 (4.2) 的关于 n 的一致估计. 与 [11] 完全一样, 可得 σ^{n+1} 的估计.

对 (4.2) 中的第一个方程作用 Δ_q , 有

$$\partial_t \Delta_q \sigma^{n+1} + (v^n \cdot \nabla) \Delta_q \sigma^{n+1} = [v^n, \Delta_q] \nabla \sigma^{n+1}.$$

上式乘以 $|\Delta_q \sigma^{n+1}|^{p-2} \Delta_q \sigma^{n+1}$, 用 [11, 16] 中的换位子估计, 对 $-\frac{N}{p} < s \leq 1 + \frac{N}{p}$, 有

$$\frac{d}{dt} \|\Delta_q \sigma^{n+1}\|_{L^p} \leq \|[v^n, \Delta_q] \nabla \sigma^{n+1}\|_{L^p} \|\Delta_q \sigma^{n+1}\|_{L^p} \leq CC_q 2^{-qs} \|v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \|\sigma^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^s}.$$

乘以 2^{qs} , 关于 q 求和, 在 $[0, t]$ 上积分, 有

$$\|\sigma^{n+1}(t)\|_{\dot{B}_{p,1}^s} \leq \|\sigma_0^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^s} + C \int_0^t \|v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \|\sigma^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^s} d\tau.$$

由 Gronwall 不等式可得

$$\|\sigma^{n+1}\|_{L^\infty(0,T;\dot{B}_{p,1}^s)} \leq \|\sigma_0^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^s} \exp\left(C \int_0^T \|v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} dt\right). \quad (4.3)$$

另一方面, 有 $\|\sigma^{n+1}(t)\|_{L^p} \leq \|\sigma_0^{n+1}\|_{L^p}$, $1 \leq p \leq \infty$.

由 (4.3) 可得

$$\|\sigma^{n+1}(t)\|_{B_{p,1}^s} \leq \|\sigma_0^{n+1}\|_{B_{p,1}^s} \exp\left(C \int_0^t \|v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} d\tau\right). \quad (4.4)$$

利用极值原理, 由 (4.2) 第一个方程可得

$$\frac{m}{2} \leq \rho^{n+1} \leq \frac{3}{2} M. \quad (4.5)$$

(4.2) 中第二个方程两端同时作用 Δ_q , 有

$$\partial_t \Delta_q v^{n+1} + \Delta_q [(v^n \cdot \nabla) v^{n+1}] + \Delta_q \left(\frac{1}{\rho^n} \nabla \pi^{n+1}\right) = \Delta_q f^n.$$

上式乘以 $|\Delta_q v^{n+1}|^{p-2} \Delta_q v^{n+1}$, 分部积分得

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|\Delta_q v^{n+1}\|_{L^p}^p \leq CC_q 2^{-q(s+1)} \|v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \|\nabla v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^s} \|\Delta_q v^{n+1}\|_{L^p}^{p-1}$$

$$\begin{aligned}
& + C \left\| \Delta_q \left(\frac{1}{\rho^n} \nabla \pi^{n+1} \right) \right\|_{L^p} \|\Delta_q v^{n+1}\|_{L^p}^{p-1} \\
& + C \|\Delta_q f^n\|_{L^p} \|\Delta_q v^{n+1}\|_{L^p}^{p-1},
\end{aligned}$$

令 $s = \frac{N}{p}$, 有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|\Delta_q v^{n+1}\|_{L^p} & \leq C C_q 2^{-q(1+\frac{N}{p})} \|v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \|\nabla v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \\
& + C \left\| \Delta_q \left(\frac{1}{\rho^n} \nabla \pi^{n+1} \right) \right\|_{L^p} + C \|\Delta_q f^n\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

上式乘以 $2^{q(1+\frac{N}{p})}$, 关于 q 求和, 有

$$\frac{d}{dt} \|v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \leq C \|v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \|\nabla v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \left\| \frac{1}{\rho^n} \nabla \pi^{n+1} \right\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} + C \|f^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}}. \quad (4.6)$$

另一方面, 由性质 2.4 得

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{\rho^n} \nabla \pi^{n+1} \right\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} & \leq \left\| \left(\frac{1}{\rho^n} - 1 \right) \nabla \pi^{n+1} \right\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} + \|\nabla \pi^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \\
& \leq C \|\sigma^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \|\nabla \pi^{n+1}\|_{L^\infty} + C \|\nabla \pi^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}}.
\end{aligned} \quad (4.7)$$

(4.2) 中第二个方程作用 div , 有

$$-\operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho^n} \nabla \pi^{n+1} \right) = \operatorname{div} ((v^n \cdot \nabla) v^{n+1}) - \operatorname{div} f^n = \sum_{i,j} \partial_i v_j^n \partial_j v_i^{n+1} - \operatorname{div} f^n. \quad (4.8)$$

对 (4.8) 应用引理 3.1, 有

$$\begin{aligned}
\|\nabla \pi^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} & \leq C(1 + \|\nabla \sigma^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}})^{\frac{p+N}{2}} (\|f^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} + \|\nabla v^n \cdot \nabla v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}) \\
& \leq C(1 + \|\nabla \sigma^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}})^{\frac{p+N}{2}} (\|f^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} + \|\nabla v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \|\nabla v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}).
\end{aligned} \quad (4.9)$$

利用 (4.7), (4.9), 及 $\|\nabla \pi^{n+1}\|_{L^\infty} \leq C \|\nabla \pi^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}}$, 得

$$\left\| \frac{1}{\rho^n} \nabla \pi^{n+1} \right\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \leq C(1 + \|\sigma^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}})^{1+\frac{p+N}{2}} (\|f^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} + \|\nabla v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \|\nabla v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}). \quad (4.10)$$

将 (4.10) 代入 (4.6) 得

$$\frac{d}{dt} \|v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \leq C(1 + \|\sigma^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}})^{1+\frac{p+N}{2}} (\|f^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} + \|\nabla v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \|\nabla v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}). \quad (4.11)$$

另一方面, (4.2) 中的第二个方程乘以 $|v^{n+1}|^{p-2} v^{n+1}$, 利用 $\operatorname{div} v^{n+1} = 0$, 有

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|v^{n+1}\|_{L^p}^p \leq C \left(\|f^n\|_{L^p} + \left\| \frac{1}{\rho^n} \nabla \pi^{n+1} \right\|_{L^p} \right) \|v^{n+1}\|_{L^p}^{p-1},$$

有

$$\frac{d}{dt} \|v^{n+1}\|_{L^p} \leq C \left(\|f^n\|_{L^p} + \left\| \frac{1}{\rho^n} \nabla \pi^{n+1} \right\|_{L^p} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C(\|f^n\|_{L^p} + \|v^n \cdot \nabla v^{n+1}\|_{L^p}) \\
 &\leq C(\|f^n\|_{L^p} + \|v^n\|_{L^\infty} \|\nabla v^{n+1}\|_{L^p}) \\
 &\leq C(\|f^n\|_{L^p} + \|v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \|\nabla v^{n+1}\|_{L^p}).
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

由 (4.11), (4.12) 得

$$\frac{d}{dt} \|v^{n+1}\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \leq A_n(t) \|v^{n+1}\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} + B_n(t), \tag{4.13}$$

这里

$$A_n(t) := C(1 + \|\sigma^n\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}})^{1+\frac{p+N}{2}} \|v^n\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}}, \tag{4.14}$$

$$B_n(t) := C(1 + \|\sigma^n\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}})^{1+\frac{p+N}{2}} \|f^n\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}}. \tag{4.15}$$

由 Gronwall 不等式得

$$\|v^{n+1}\|_{L^\infty(0,T;B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})} \leq \left(\|v_0^{n+1}\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} + \int_0^T B_n(t) dt \right) \exp \left(\int_0^T A_n(t) dt \right). \tag{4.16}$$

现用归纳法得到一致估计. 设常数 M_1, M_2 满足

$$\|\sigma_0\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \leq \frac{M_1}{2}, \quad \|v_0\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \leq \frac{M_2}{2}.$$

我们将证明存在时间 $T_* > 0$, 使

$$\|\sigma^n\|_{L^\infty(0,T_*;B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})} \leq M_1, \quad \|v^n\|_{L^\infty(0,T_*;B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})} \leq M_2, \quad \forall n. \tag{4.17}$$

显然 (4.17) 对 $n = 0$ 成立. 现设 $n = k$ 时 (4.17) 成立, 我们将证明对 $n = k + 1$ 时它也成立.

由 (4.4) 我们有

$$\|\sigma^{k+1}\|_{L^\infty(0,t;B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})} \leq \frac{M_1}{2} \exp(CM_2 t) \leq M_1,$$

如果 $\exp(CM_2 t) \leq 2$.

设

$$C(1 + M_1)^{1+\frac{p+N}{2}} \|f^k\|_{L^1(0,t;B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})} \leq \frac{M_2}{4}, \quad \exp(C(1 + M_1)^{1+\frac{p+N}{2}} M_2 t) \leq \frac{4}{3},$$

由 (4.16) 得

$$\begin{aligned}
 \|v^{k+1}\|_{L^\infty(0,T;B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})} &\leq \left(\frac{M_2}{2} + C(1 + M_1)^{1+\frac{p+N}{2}} \|f^k\|_{L^1(0,t;B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})} \right) \exp(C(1 + M_1)^{1+\frac{p+N}{2}} M_2 t) \\
 &\leq \left(\frac{M_2}{2} + \frac{M_2}{4} \right) \frac{4}{3} = M_2.
 \end{aligned}$$

由此可知 (4.17) 成立.

第二步 解的存在性

为证解的存在性, 需估计迭代的差. 为此, 记

$$\begin{aligned} \delta\sigma^{n+1} &:= \sigma^{n+1} - \sigma^n, \quad \delta v^{n+1} := v^{n+1} - v^n, \quad \delta\pi^{n+1} := \pi^{n+1} - \pi^n, \quad \delta f^{n+1} := f^n - f^{n-1}, \\ \partial_t \delta\sigma^{n+1} + (v^n \cdot \nabla) \delta\sigma^{n+1} + (\delta v^n \cdot \nabla) \sigma^n &= 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\partial_t \delta v^{n+1} + (v^n \cdot \nabla) \delta v^{n+1} + (\delta v^n \cdot \nabla) v^n + \left(\frac{1}{\rho^n} - \frac{1}{\rho^{n-1}} \right) \nabla \pi^{n+1} + \frac{1}{\rho^{n-1}} \nabla \delta\pi^{n+1} = \delta f^{n+1}, \quad (4.19)$$

$$\operatorname{div} \delta v^{n+1} = \operatorname{div} \delta v^n = 0, \quad (4.20)$$

$$\sigma_0^{n+1} - \sigma_0^n = \sum_{|q|=n+j+1} \Delta_q \sigma_0, \quad (4.21)$$

$$v_0^{n+1} - v_0^n = \sum_{|q|=n+j+1} \Delta_q v_0. \quad (4.22)$$

对 (4.18) 作用 Δ_q , 乘以 $|\Delta_q \delta\sigma^{n+1}|^{p-2} \Delta_q \delta\sigma^{n+1}$, 分部积分得

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|\Delta_q \delta\sigma^{n+1}\|_{L^p}^p &\leq \| [v^n, \Delta_q] \nabla \delta\sigma^{n+1} \|_{L^p} \|\Delta_q \delta\sigma^{n+1}\|_{L^p}^{p-1} \\ &\quad + \|\Delta_q [(\delta v^n \cdot \nabla) \sigma^n]\|_{L^p} \|\Delta_q \delta\sigma^{n+1}\|_{L^p}^{p-1}. \end{aligned}$$

从而有

$$\frac{d}{dt} \|\Delta_q \delta\sigma^{n+1}\|_{L^p} \leq \| [v^n, \Delta_q] \nabla \delta\sigma^{n+1} \|_{L^p} + \|\Delta_q [(\delta v^n \cdot \nabla) \sigma^n]\|_{L^p}.$$

与 σ^n 的一致估计相似, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\delta\sigma^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} &\leq C \|v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}} \|\delta\sigma^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|(\delta v^n \cdot \nabla) \sigma^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \\ &\leq C \|\delta\sigma^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|\nabla \sigma^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \|\delta v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \\ &\leq C \|\delta\sigma^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|\delta v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

对 (4.18) 乘以 $|\delta\sigma^{n+1}|^{p-2} \delta\sigma^{n+1}$, 分部积分有

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|\delta\sigma^{n+1}\|_{L^p}^p \leq \|\delta v^n \cdot \nabla \sigma^n\|_{L^p} \|\delta\sigma^{n+1}\|_{L^p}^{p-1}.$$

从而有

$$\frac{d}{dt} \|\delta\sigma^{n+1}\|_{L^p} \leq C \|\delta v^n\|_{L^\infty} \|\nabla \sigma^n\|_{L^p} \leq C \|\delta v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}. \quad (4.24)$$

现估计 δv^{n+1} .

对 (4.19) 作用 Δ_q , 可估计如下:

$$\frac{d}{dt} \|\delta v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \leq C \|v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \|\delta v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \|\delta v^n \cdot \nabla v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \left(\frac{1}{\rho^n} - \frac{1}{\rho^{n-1}} \right) \nabla \pi^{n+1} \right\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \left\| \frac{1}{\rho^{n-1}} \nabla \delta \pi^{n+1} \right\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \|\delta f^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \\
& \leq C \|\delta v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|\delta v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \|\nabla v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \\
& \quad + C \|\delta \sigma^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \|\nabla \pi^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|\nabla \delta \pi^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \|\delta f^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \\
& \leq C \|\delta v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|\delta v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|\delta \sigma^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \\
& \quad + C \|\nabla \delta \pi^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \|\delta f^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

(4.19) 两端作用 div , 有

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho^{n-1}} \nabla \delta \pi^{n+1} \right) &= \operatorname{div} (\delta v^{n+1} \cdot \nabla v^n) + \operatorname{div} (\delta v^n \cdot \nabla v^n) \\
&\quad + \operatorname{div} \left(\left(\frac{1}{\rho^n} - \frac{1}{\rho^{n-1}} \right) \nabla \pi^{n+1} \right) - \operatorname{div} (\delta f^n). \tag{4.26}
\end{aligned}$$

由引理 3.2 得

$$\|\nabla \delta \pi^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \leq C \|\delta f^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|\delta \sigma^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|\delta v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|\delta v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}. \tag{4.27}$$

将 (4.27) 代入 (4.25) 有

$$\frac{d}{dt} \|\delta v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \leq C \|\delta v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|\delta v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|\delta f^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|\delta \sigma^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}. \tag{4.28}$$

注意到 $\|\delta v^{n+1}\|_{L^p}$ 也可被 (4.28) 右端控制.

联立 (4.23), (4.24) 与 (4.28), 有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\|\delta \sigma^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \|\delta v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}) &\leq C \|\delta \sigma^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|\delta v^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \\
&\quad + C \|\delta \sigma^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|\delta v^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|\delta f^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}.
\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式得

$$\begin{aligned}
& \|\delta \sigma^{n+1}\|_{L^\infty(0,T;\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} + \|\delta v^{n+1}\|_{L^\infty(0,T;\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \\
& \leq (\|\delta \sigma_0^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \|\delta v_0^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + C \|\delta f^n\|_{L^1(0,T;\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}) \exp(CT) \\
& \quad + (\|\delta \sigma^n\|_{L^\infty(0,T;\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} + \|\delta v^n\|_{L^\infty(0,T;\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}) CT \exp(CT). \tag{4.29}
\end{aligned}$$

注意到

$$\|\delta \sigma_0^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \|\delta v_0^{n+1}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \rightarrow 0, \quad \|\delta f^n\|_{L^1(0,T;\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

设 $CT \exp(CT) \leq \frac{1}{2}$, 因此, 由 (4.29) 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|\delta \sigma^n\|_{L^\infty(0,T;\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} + \|\delta v^n\|_{L^\infty(0,T;\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}) = 0.$$

这样证明了 $\{(\sigma^n, v^n)\}$ 在 $L^\infty(0, T; B_{p,1}^{\frac{N}{p}})$ 中收敛. 由 (4.17) 知极限 $(\sigma, v) \in C(0, T; B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})$ 是 (4.1) 的解.

由上面同样的方法可证明解的唯一性. 因此存在唯一性证毕.

第三步 爆破准则

我们知道 $\nabla v = \mathcal{P}(\omega) + D\omega$, 这里 $\mathcal{P}$ 是 Calderon-Zygmund 类型的奇异积分算子, D 是一常数矩阵. 利用 Calderon-Zygmund 算子在 $\dot{B}_{p,q}^s$ 中的有界性^[17], 有

$$\|\nabla v\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \leq C \|\omega\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}.$$

如果 $\|\omega\|_{L^1(0,T;\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} < \infty$, 则由 (4.3), (4.14)–(4.16) 得

$$\|\sigma\|_{L^\infty(0,T;B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})} + \|v\|_{L^\infty(0,T;B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})} \leq C,$$

证毕.

5 带密度的不可压 MHD 方程

考虑如下无粘性带密度的不可压 MHD 方程:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + (v \cdot \nabla) \rho = 0, \\ \partial_t(\rho v) + (v \cdot \nabla)(\rho v) + \nabla \pi = \rho f + (H \cdot \nabla) H, \\ \partial_t H + (v \cdot \nabla) H - (H \cdot \nabla) v = \eta \Delta H, \\ \operatorname{div} v = \operatorname{div} H = 0, \\ (\rho, v, H)|_{t=0} = (\rho_0, v_0, H_0), \end{cases} \quad (5.1)$$

这里 H 是磁场强度, η 是正常数.

用与第 4 节同样的方法可证如下定理:

定理 5.1 (i) 局部适定性: 设 $\rho_0, v_0, H_0 \in B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}(\mathbb{T}^N)$, $\operatorname{div} v_0 = \operatorname{div} H_0 = 0$, $f \in L^1(0, T; B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}(\mathbb{T}^N))$, $1 < p < \infty$, 则存在

$$T_* := T_*(\|\rho_0, v_0, H_0\|_{B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}}) \leq T,$$

使问题 (5.1) 在 $[0, T_*]$ 上存在唯一解 (ρ, v, H) 满足

$$(\rho, v, H) \in C([0, T_*]; B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}}), \quad H \in L^1(0, T_*; B_{p,1}^{2+\frac{N}{p}}).$$

(ii) 爆破准则: (5.1) 的解 (ρ, v, H) 在 T_* 处爆破当且仅当

$$\int_0^{T_*} \|\omega(t)\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} dt = \infty.$$

致谢 作者对审稿人提出的建议表示感谢.

参考文献

- 1 Kato T. Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in R^3 . *J Funct Anal*, 1972, 9: 296–305
- 2 Chae D. On the well-posedness of the Euler equations in the Triebel-Lizorkin spaces. *Comm Pure Appl Math*, 2002, 55: 654–678
- 3 Chemin J Y. Regularite de la trajectoire des particules d'un fluide parfait incompressible remplissant l'espace. *J Math Pures Appl* (9), 1992, 71: 407–417
- 4 Chemin J Y. *Perfect Incompressible Fluids*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 14. New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1998
- 5 Kato T, Ponce G. Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations. *Comm Pure Appl Math*, 1988, 41: 891–907
- 6 Vishik M. Hydrodynamics in Besov spaces. *Arch Ration Mech Anal*, 1998, 145: 197–214
- 7 Zhou Y. Local well-posedness for the incompressible Euler equations in the critical Besov spaces. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 2004, 54: 773–786
- 8 Beirão da Veiga H, Valli A. Existence of C^∞ solutions of the Euler equations for nonhomogeneous fluids. *Comm Partial Differential Equations*, 1980, 5: 95–107
- 9 Itoh S. Cauchy problem for the Euler equations of a nonhomogeneous ideal incompressible fluid. *J Korean Math Soc*, 1994, 31: 367–373
- 10 Zhou Y. Local well-posedness and regularity criterion for the density dependent incompressible Euler equations. *Nonlinear Anal*, 2010, 73: 750–766
- 11 Zhou Y. Local well-posedness for the density dependent incompressible Euler equations in the critical Besov spaces. Preprint, 2003
- 12 Chae D, Lee J. Local existence and blow-up criterion of the inhomogeneous Euler equations. *J Math Fluid Mech*, 2003, 5: 144–165
- 13 Runst T, Sickel W. *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations*. de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 3. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1996
- 14 Triebel H. *Theory of Function Spaces II*. Monographs in Mathematics, 84. Basel: Birkhauser Verlag, 1992
- 15 Haspot B. Local well-posedness results for density-dependent incompressible fluids. *arXiv:0902.1982V1*, 2009
- 16 Danchin R. Local theory in critical spaces for compressible viscous and heat-conductive gases. *Comm Partial Differential Equations*, 2001, 26: 1183–1233
- 17 Frazier M, Torres R, Weiss G. The boundedness of Calderon-Zygmund operators on the spaces $\dot{F}_p^{\alpha,q}$. *Rev Mat Iberoamericana*, 1988, 4: 41–72

Well-posedness for the density-dependent incompressible Euler equations in the critical Besov spaces

ZHOU Yong, XIN ZhouPing & FAN JiShan

Abstract In this paper, we establish the local well-posedness for the density-dependent incompressible Euler equations in the critical Besov space, and obtain a blow-up criterion for the corresponding strong solution only in terms of the vorticity field. A corresponding theorem for the density-dependent MHD equations is also listed.

Keywords: density-dependent, Euler equations, MHD equations, local well-posedness, blow-up

MSC(2000): 35Q35, 76D05, 76D03