含裂纹多材料反平面分析的解析奇异单元

姚伟岸*, 李翔, 胡小飞, 张兆军

大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024

* E-mail: ywa@dlut.edu.cn

收稿日期: 2016-06-02; 接受日期: 2016-08-31; 网络出版日期: 2016-11-29

国家自然科学基金(编号: 11372065)资助项目

摘要 含裂纹多材料反平面问题是一个典型的 III 型断裂问题, 已有的文献给出了其极坐标辛体系下的辛本征解, 并讨论了其裂纹尖端的应力奇异性阶次. 本文在此基础上, 首先补充给出界面有外力作用时其非齐次边界条件所对应的特解, 然后利用辛本征解和特解构造出相关问题分析的一类解析奇异单元. 将所提出的奇异单元与外部的常规单元相结合, 就可用于多材料 III 型断裂问题的分析, 并直接给出应力强度因子的数值结果. 数值算例表明, 本方法具有很好的求解精度, 是相关问题分析的一个非常有效的数值方法.

关键词 辛弹性力学, 奇异单元, 反平面问题, 多材料裂纹, 应力强度因子

1 引言

当裂纹面受到垂直于面内的一对平衡力系时, 裂纹发生相对错移, 从而形成反平面断裂问题, 这类问题经常在结构发生扭转时出现. 由于复合材料在生产生活中使用愈加频繁, 其断裂问题时有发生, 因此多材料反平面断裂问题已经受到了广泛关注. 如, Wang^[1]利用边界配置法对单材料 III 型中心裂纹进行了研究, Zhang^[2]利用傅里叶变换, Wu 和 Chiu^[3]利用复变积分方程, Treifi 和 Oyadiji^[4]利用分形有限元法分别开展了双材料 III 型单边裂纹问题的分析, 同时 Zhang^[5]还利用傅里叶变换对双材料 III 型中心裂纹进行了解析分析. 但已有研究成果大都针对单材料或双材料问题, 而对三材料及更多材料问题大多仅开展其应力奇异性阶次的研究^[6-9].

1995 年, 钟万勰院士^[10]首先提出了应用力学的辛求解体系, 并在很多不同的领域得到应用, 如, 弹性力学、压电材料问题等的解析求解. 此外, 辛体系在断裂力学问题中也得到应用, 如利用辛本征展开和辛共轭正交关系可解析分析二维、三维等含裂纹问题^[11,12], 并且基于辛本征向量还可构建平面和薄板等断裂力学问题分析的解析奇异单元^[13,14].

本文利用文献[8,9]所提供的解析辛本征向量, 构造出一类解析奇异单元, 并通过与外部常规单元的结合用于含裂纹多材料反平面问题的数值分析.

2 基本方程与辛本征解^[9]

考虑如图 1 所示由 I 种材料组成的裂纹模型, 记这 I 种材料分别为 $M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(I)}$, 并且每个材料

引用格式: 姚伟岸, 李翔, 胡小飞, 等. 含裂纹多材料反平面分析的解析奇异单元. 中国科学: 技术科学, 2016, 46: 1225–1231
Yao W A, Li X, Hu X F, et al. A singular finite element of multi-material crack problems under elastic antiplane shear deformation (in Chinese). Sci Sin Tech, 2016, 46: 1225–1231, doi: 10.1360/N092016-00208

$M^{(i)} (i=1,2,\dots,I)$ 所占有的区域是由两条射线 $C^{(i)}$ 和 $C^{(i+1)}$ 形成的顶角为 $\alpha^{(i)}$ 的楔形域, 且有 $\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \dots + \alpha^{(I)} = 2\pi$, 而裂纹位于两个材料 $M^{(i)}$ 和 $M^{(i+1)}$ 之间的界面上.

需要说明的是, 文献[9]建立了极坐标系下相关问题的辛求解体系, 给出了其辛本征值超越方程和辛本征向量, 并对裂纹尖端的应力奇异性阶次进行了较为系统的分析. 为阅读方便, 这里简要介绍其推导过程及结果, 更详细的推导过程请参见文献[9].

首先, 为每种材料设一个局部极坐标系 $OC^{(i)}$, 其局部坐标范围为 $0 \leq \theta^{(i)} \leq \alpha^{(i)}$.

问题的基本变量包括应力 $\sigma^{(i)} = \{\tau_{rz}^{(i)} \quad \tau_{\theta z}^{(i)}\}^T$ 、应变 $\varepsilon^{(i)} = \{\gamma_{rz}^{(i)} \quad \gamma_{\theta z}^{(i)}\}^T$ 和位移 $w^{(i)}$. 域内无体力作用情况下, 材料 $M^{(i)}$ 的控制方程有:

$$\frac{\partial(r\tau_{rz}^{(i)})}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{\theta z}^{(i)}}{\partial\theta^{(i)}} = 0, \quad (1)$$

$$\gamma_{rz}^{(i)} = \frac{\partial w^{(i)}}{\partial r}, \quad \gamma_{\theta z}^{(i)} = \frac{1}{r} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial\theta^{(i)}}, \quad (2)$$

$$\tau_{rz}^{(i)} = G^{(i)} \gamma_{rz}^{(i)}, \quad \tau_{\theta z}^{(i)} = G^{(i)} \gamma_{\theta z}^{(i)}, \quad (3)$$

式中, $G^{(i)}$ 为材料 $M^{(i)}$ 的剪切模量.

此外, 还应有裂纹面 $C^{(1)}$ 和 $C^{(N+1)}$ 上的边界条件:

$$\tau_{\theta z}^{(1)}|_{\theta^{(1)}=0} = \tau_{\theta z}^{(I)}|_{\theta^{(I)}=\alpha^{(I)}} = \tilde{\tau}_0(r), \quad (4)$$

式中, $\tilde{\tau}_0(r)$ 为裂纹表面受到的任意分布剪应力荷载.

以及相邻材料界面 $C^{(i)} (i=2,3,\dots,I)$ 上的连续性条件:

$$w^{(i)}|_{\theta^{(i)}=\alpha^{(i)}} = w^{(i+1)}|_{\theta^{(i+1)}=0}, \quad \tau_{\theta z}^{(i)}|_{\theta^{(i)}=\alpha^{(i)}} = \tau_{\theta z}^{(i+1)}|_{\theta^{(i+1)}=0}. \quad (5)$$

通过引入变量:

图1 极坐标系多材料裂纹模型

$$\xi = \ln r, \quad S_{rz}^{(i)} = r\sigma_{rz}^{(i)}, \quad S_{\theta z}^{(i)} = r\sigma_{\theta z}^{(i)}. \quad (6)$$

可推导出如下全状态方程:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}^{(i)}}{\partial \xi} = \mathbf{H} \mathbf{Z}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{G^{(i)}} \\ -G^{(i)} & \frac{\partial^2}{\partial(\theta^{(i)})^2} \end{bmatrix} \mathbf{Z}^{(i)}, \quad (7)$$

式中, 全状态向量为

$$\mathbf{Z}^{(i)}(\xi, \theta^{(i)}) = \{w^{(i)}(\xi, \theta^{(i)}) \quad S_{rz}^{(i)}(\xi, \theta^{(i)})\}^T. \quad (8)$$

带有齐次边界条件的方程式(7)可以用分离变量法进行求解, 令:

$$\mathbf{Z}^{(i)} = e^{\xi \mu} \boldsymbol{\psi}^{(i)}(\theta^{(i)}). \quad (9)$$

从而可得对应的辛本征问题:

$$\mathbf{H} \boldsymbol{\psi}^{(i)}(\theta^{(i)}) = \mu \boldsymbol{\psi}^{(i)}(\theta^{(i)}), \quad (10)$$

式中, μ 是辛本征值, $\boldsymbol{\psi}^{(i)}(\theta^{(i)})$ 是其对应辛本征向量.

当前辛本征问题, 除特殊的零本征值的基本本征向量:

$$\boldsymbol{\psi}_1^{(i)} = \{1 \quad 0\}^T. \quad (11)$$

还有非零本征值的本征向量. 非零本征值 $\mu_n (n=2,3,\dots)$ 由下面的超越方程确定:

$$\det \left(\begin{bmatrix} \cos \mu_n \alpha^{(I)} & -\sin \mu_n \alpha^{(I)} \end{bmatrix} \prod_{i=1}^{I-1} \mathbf{R}^{(i)} \right) = 0, \quad (12)$$

其中,

$$\mathbf{R}^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{G^{(i)}}{G^{(i+1)}} \cos \mu_n \alpha^{(i)} & -\frac{G^{(i)}}{G^{(i+1)}} \sin \mu_n \alpha^{(i)} \\ \sin \mu_n \alpha^{(i)} & \cos \mu_n \alpha^{(i)} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

而其对应的非零本征向量为

$$\boldsymbol{\psi}_n^{(i)} = \begin{bmatrix} \sin \mu_n \theta^{(i)} & \cos \mu_n \theta^{(i)} \\ G^{(i)} \mu_n \sin \mu_n \theta^{(i)} & G^{(i)} \mu_n \cos \mu_n \theta^{(i)} \end{bmatrix} \times \prod_{j=1}^{i-1} \mathbf{R}^{(j)} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

3 通解

给出辛本征值和辛本征向量后, 根据展开定理, 就可给出带有边界条件(式(4))和连续性条件(式(5))的方程(式(9))的通解:

$$\mathbf{Z}^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\xi \mu_n} \boldsymbol{\psi}_n^{(i)}(\theta^{(i)}) + \tilde{\mathbf{Z}}^{(i)}(\xi, \theta^{(i)}), \quad (15)$$

式中, $\tilde{\mathbf{Z}}^{(i)}(\xi, \theta^{(i)})$ 为裂纹面上非齐次边界条件(式(4))对应的特解, 而 a_n 为待求展开项系数.

裂纹表面受到的任意分布剪应力荷载, 可以用多项式近似展开为

$$\tilde{\tau}_0(r) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m r^m. \quad (16)$$

而多项式表示的界面外力对应的特解是可以解析给出的. 如式(16)中每一项 $q_m r^m$ 对应的特解可设为

$$\tilde{\mathbf{Z}}_m^{(i)} = r^{m+1} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_m^{(i)}(\theta^{(i)}) = r^{m+1} \left\{ \tilde{\mathbf{w}}^{(i)}(\theta^{(i)}) \tilde{\mathbf{S}}_{rz}^{(i)}(\theta^{(i)}) \right\}^T. \quad (17)$$

将其代入式(7)可得:

$$\begin{bmatrix} -(m+1) & \frac{1}{G_i} \\ -G^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial(\theta^{(i)})^2} & -(m+1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}^{(i)}(\theta^{(i)}) \\ \tilde{\mathbf{S}}_{rz}^{(i)}(\theta^{(i)}) \end{Bmatrix} = 0. \quad (18)$$

式(18)对应的通解为

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_m^{(i)} = \begin{Bmatrix} \tilde{A}_w^{(i)} \sin(m+1)\theta^{(i)} + \tilde{B}_w^{(i)} \cos(m+1)\theta^{(i)} \\ \tilde{A}_{rz}^{(i)} \sin(m+1)\theta^{(i)} + \tilde{B}_{rz}^{(i)} \cos(m+1)\theta^{(i)} \end{Bmatrix}, \quad (19)$$

式中, $\tilde{A}_w^{(i)}$, $\tilde{B}_w^{(i)}$, $\tilde{A}_{rz}^{(i)}$ 和 $\tilde{B}_{rz}^{(i)}$ 为待定系数.

将式(19)回代到式(18)中, 可得:

$$\tilde{A}_{rz}^{(i)} = G^{(i)}(m+1) \tilde{A}_w^{(i)}, \quad \tilde{B}_{rz}^{(i)} = G^{(i)}(m+1) \tilde{B}_w^{(i)}. \quad (20)$$

再将式(19)和(20)代入连续性条件中, 可得:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{A}_w^{(i+1)} \\ \tilde{B}_w^{(i+1)} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{R}}^{(i)} \begin{Bmatrix} \tilde{A}_w^{(i)} \\ \tilde{B}_w^{(i)} \end{Bmatrix}, \quad (i=1, 2, \dots, I-1), \quad (21)$$

其中,

$$\tilde{\mathbf{R}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{G^{(i)}}{G^{(i+1)}} \cos(m+1)\alpha^{(i)} & -\frac{G^{(i)}}{G^{(i+1)}} \sin(m+1)\alpha^{(i)} \\ \sin(m+1)\alpha^{(i)} & \cos(m+1)\alpha^{(i)} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

通过递推, 待求的未知量只剩 $\tilde{A}_w^{(1)}$ 和 $\tilde{B}_w^{(1)}$, 并有:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_m^{(i)}(\theta^{(i)}) = \tilde{\mathbf{S}}_m^{(i)} \prod_{j=1}^{i-1} \tilde{\mathbf{R}}^{(j)} \begin{Bmatrix} \tilde{A}_w^{(1)} \\ \tilde{B}_w^{(1)} \end{Bmatrix}, \quad (23)$$

其中,

$$\tilde{\mathbf{S}}_m^{(i)} = \begin{bmatrix} \sin(m+1)\theta^{(i)} & \cos(m+1)\theta^{(i)} \\ (m+1)G^{(i)} \sin(m+1)\theta^{(i)} & (m+1)G^{(i)} \cos(m+1)\theta^{(i)} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

最后再将式(23)代入裂纹面非齐次边界条件中, 有:

$$\tilde{A}_w^{(1)} = \frac{q_m}{G^{(1)}(m+1)}, \quad (25)$$

$$\tilde{A}_w^{(1)} \cos(m+1)\alpha^{(1)} - \tilde{B}_w^{(1)} \sin(m+1)\alpha^{(1)} = \frac{q_m}{G^{(1)}(m+1)}.$$

在一般情况下, 根据式(25)可求解给出 $\tilde{A}_w^{(1)}$ 和 $\tilde{B}_w^{(1)}$ 的具体值, 于是就可以得到式(17)的特解. 这里需要特殊说明的是, 当问题的本征值包含整数时, 式(25)可能无解, 此时特解对应的应该是约当型特解, 限于篇幅这里就不详细讨论了.

每一项 $q_m r^m$ 对应的特解给出后, 式(16)对应的非齐次边界条件特解就可以近似给出为

$$\tilde{\mathbf{Z}}^{(i)}(\xi, \theta^{(i)}) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{\xi(m+1)} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_m^{(i)}(\theta^{(i)}). \quad (26)$$

4 解析奇异单元

根据应变能有限原则, 对当前问题只能取零本征值($\mu_1=0$)的基本本征向量(式(11))以及满足 $\text{Re}(\mu_n) > 0$ 的非零本征值的本征向量. 这里约定本征值按照 $\text{Re}(\mu_n)$ 从小到大的顺序排列.

在裂纹尖端附近取一个半径为 ρ 的奇异单元, 在奇异元圆周假设有 N 个结点, 如图 2 所示. 于是根据式(15), 超级单元内的通解可取为

$$\mathbf{Z}^{(i)} = \sum_{n=1}^N a_n e^{\xi \mu_n} \boldsymbol{\psi}_n^{(i)}(\theta^{(i)}) + \tilde{\mathbf{Z}}^{(i)}(\xi, \theta^{(i)}), \quad (27)$$

$$\theta^{(i)} \in [0, \alpha^{(i)}],$$

即在实际计算中其本征通解只取了前 N 项.

式(27)也可以用矩阵向量表示为

$$\mathbf{Z}^{(i)} = \boldsymbol{\Phi}^{(i)} \text{diag}(e^{\xi \mu_1}, e^{\xi \mu_2}, \dots, e^{\xi \mu_N}) \mathbf{a} + \tilde{\mathbf{Z}}^{(i)}(\xi, \theta^{(i)}), \quad (28)$$

式中, $\text{diag}(e^{\xi \mu_n})$ 为对角阵, $\mathbf{a} = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N\}^T$ 为展开项系数向量, 而 $\boldsymbol{\Phi}^{(i)}$ 是由本征向量组成的矩阵:

图2 多材料反平面裂纹的奇异单元

$$\begin{aligned}\Phi^{(i)} &= [\psi_1^{(i)}(\theta^{(i)}) \quad \psi_2^{(i)}(\theta^{(i)}) \quad \dots \quad \psi_N^{(i)}(\theta^{(i)})] \\ &= \begin{bmatrix} \phi_w^{(i)T} \\ \phi_{rz}^{(i)T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(i)}(\theta^{(i)}) & \bar{w}_2^{(i)}(\theta^{(i)}) & \dots & \bar{w}_N^{(i)}(\theta^{(i)}) \\ \bar{S}_{rz1}^{(i)}(\theta^{(i)}) & \bar{S}_{rz2}^{(i)}(\theta^{(i)}) & \dots & \bar{S}_{rzN}^{(i)}(\theta^{(i)}) \end{bmatrix} \quad (29)\end{aligned}$$

给出奇异单元内的通解以后,就可直接给出奇异元的变形能:

$$\begin{aligned}U &= \sum_{i=1}^I \int_0^{\alpha^{(i)}} \int_{-\infty}^{\ln \rho} \left[S_{rz}^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial \xi} + S_{\theta z}^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial \theta^{(i)}} \right] d\xi d\theta^{(i)} \\ &\quad - \sum_{i=1}^I \int_0^{\alpha^{(i)}} \int_{-\infty}^{\ln \rho} \frac{1}{2G^{(i)}} \left[(S_{rz}^{(i)})^2 + (S_{\theta z}^{(i)})^2 \right] d\xi d\theta^{(i)} \quad (30) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\ln \rho} \left[(\tilde{\tau}_0 w^{(I)} e^{\xi})_{\theta^{(I)}=\alpha^{(I)}} - (\tilde{\tau}_0 w^{(I)} e^{\xi})_{\theta^{(I)}=0} \right] d\xi.\end{aligned}$$

将式(28)代入式(30),并注意到式(28)已经满足奇异单元域内控制方程及裂纹表面的边界条件,通过分部积分可以将奇异元内部的变形能进一步表示为

$$U = (a^T \cdot K^{s,a} \cdot a / 2 + a^T \cdot F^{s,a}) + U^*, \quad (31)$$

式中, U^* 是常数,且与下面的推导无关,而

$$K^{s,a} = P \left[\sum_{i=1}^I \int_0^{\alpha^{(i)}} \phi_w^{(i)} \phi_{rz}^{(i)T} d\theta^{(i)} \right] P, \quad (32)$$

$$F^{s,a} = P \left[\sum_{i=1}^I \int_0^{\alpha^{(i)}} \phi_w^{(i)} \tilde{S}_{rz}^{(i)} d\theta^{(i)} \right], \quad (33)$$

式中, $P = \text{diag}(\rho^{\mu_1}, \rho^{\mu_2}, \dots, \rho^{\mu_N})$ 为对角阵。

假设奇异元的 N 个节点中有 $N^{(i)}$ 个节点位于材料 $M^{(i)} (i=1, 2, \dots, I)$ 区域,记其节点的局部角度坐标为 $\theta_k^{(i)} (k=1, 2, \dots, N^{(i)})$. 令单元出口节点位移向量为

$$d = \{w_1^{(1)}, \dots, w_{N_1}^{(1)}, \dots, w_1^{(I)}, \dots, w_{N_I}^{(I)}\}^T. \quad (34)$$

而特解对应的节点位移向量记为

$$\tilde{d} = \{\tilde{w}_1^{(1)}, \dots, \tilde{w}_{N_1}^{(1)}, \dots, \tilde{w}_1^{(I)}, \dots, \tilde{w}_{N_I}^{(I)}\}^T. \quad (35)$$

于是由式(27)有如下关系式:

$$d = TP a + \tilde{d}, \quad a = PT^{-1}(d - \tilde{d}), \quad (36)$$

式中, T 是转换矩阵:

$$T = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(1)}(\theta_1^{(1)}) & \bar{w}_2^{(1)}(\theta_1^{(1)}) & \dots & \bar{w}_{N_1}^{(1)}(\theta_1^{(1)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{w}_1^{(1)}(\theta_{N_1}^{(1)}) & \bar{w}_2^{(1)}(\theta_{N_1}^{(1)}) & \dots & \bar{w}_{N_1}^{(1)}(\theta_{N_1}^{(1)}) \\ \bar{w}_1^{(2)}(\theta_1^{(2)}) & \bar{w}_2^{(2)}(\theta_1^{(2)}) & \dots & \bar{w}_{N_2}^{(2)}(\theta_1^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{w}_1^{(2)}(\theta_{N_2}^{(2)}) & \bar{w}_2^{(2)}(\theta_{N_2}^{(2)}) & \dots & \bar{w}_{N_2}^{(2)}(\theta_{N_2}^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{w}_1^{(I)}(\theta_1^{(I)}) & \bar{w}_2^{(I)}(\theta_1^{(I)}) & \dots & \bar{w}_{N_I}^{(I)}(\theta_1^{(I)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{w}_1^{(I)}(\theta_{N_I}^{(I)}) & \bar{w}_2^{(I)}(\theta_{N_I}^{(I)}) & \dots & \bar{w}_{N_I}^{(I)}(\theta_{N_I}^{(I)}) \end{bmatrix}. \quad (37)$$

将式(36)代入到式(31)中可将奇异元的变形能改写为

$$U = (d^T \cdot K^{s,e} \cdot d / 2 - d^T \cdot F^{s,e}) + U^{**}, \quad (38)$$

式中, U^{**} 为与推导无关的常数,即奇异单元的单元刚度阵和单元节点载荷向量分别为

$$K^{s,e} = T^{-T} \left[\sum_{i=1}^I \int_0^{\alpha^{(i)}} \phi_w^{(i)} \phi_{rz}^{(i)T} d\theta^{(i)} \right] T^{-1}, \quad (39)$$

$$F^{s,e} = K^{s,e} \tilde{d} - T^{-T} \left[\sum_{i=1}^I \int_0^{\alpha^{(i)}} \phi_w^{(i)} \tilde{S}_{rz}^{(i)} d\theta^{(i)} \right]. \quad (40)$$

将单元刚度阵与节点载荷向量分别组装到结构的总刚度阵和总节点载荷向量中,就可对含裂纹多材料反平面问题进行有限元分析.显然上述奇异单元刚度阵与奇异元大小无关,因而具有计算稳定性好等优点.

一般情况下,超越方程(12)只有一个根满足条件 $0 < \text{Re}(\mu_i) < 1$,并且其根通常是实数,记其为 μ_2 .在这种情况下,裂尖附近沿某任意 $\bar{\theta}_i$ 方向的应力强度因子定义式可选择为^[15]

$$K_{III} \big|_{\theta^{(i)}=\bar{\theta}^{(i)}} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{2\pi r}^{1-\mu_2} \tau_{\theta z}^{(i)} \right) \bigg|_{\theta^{(i)}=\bar{\theta}^{(i)}}. \quad (41)$$

由通解式(27),可以直接给出:

$$K_{III}|_{\theta^{(i)}=\bar{\theta}^{(i)}}=\sqrt{2\pi}a_2G^{(i)}\left(\bar{w}_2^{(i)}\right)' \Big|_{\theta^{(i)}=\bar{\theta}^{(i)}}. \tag{42}$$

5 数值算例

为了验证本文方法的有效性，下面给出几个数值算例. 除了在裂纹尖端布置奇异单元外，结构的其它部分采用反平面四边形等参元.

5.1 算例 1

分析如图 3 所示的含单边斜裂纹的单材料半无限大板，其中裂尖到左侧边距离为 a ，裂纹与左侧边成夹角 α ，并且结构在裂纹远端承受一对相反的单位厚度集中剪力 S_0 . 本算例的应力奇异性为 0.5，文献[16]中给出了该问题应力强度因子的解析表达式为

$$K_{III}|_{\theta=\alpha-\pi}=\frac{S_0}{\sqrt{c}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha(\pi-\alpha)}}, \tag{43}$$

式中， $c=a/\sin\alpha$ 是裂纹长度.

取其中 $2w\times w$ 的有限矩形板进行分析(图 3)，采用本文方法所获得的无量纲化应力强度因子 $\bar{K}_{III}(=K_{III}/S_0\sqrt{\pi c})$ 的数值结果见表 1. 从表中可以发现随矩形板尺寸越来越大，本文结果越接近解析解.

5.2 算例 2

分析如图 4 所示的含单边直裂纹的双材料矩形

图 3 单材料斜裂纹模型

表 1 单材料单边斜裂纹模型无量纲化应力强度因子

α	w/a				半无限大板 解析解
	5	10	15	20	
$\pi/12$	3.85880	3.69516	3.64258	3.63012	3.61814
$\pi/6$	2.80341	2.70835	2.69005	2.68420	2.68328
$\pi/4$	2.39986	2.34489	2.32122	2.31105	2.30940
$\pi/3$	2.19904	2.14198	2.13220	2.12864	2.12132
$5\pi/12$	2.09785	2.04820	2.04119	2.03278	2.02837

图 4 双材料单边界面裂纹模型

板，其裂纹位于两种材料的界面上，板的尺寸为 $(h+\beta h)\times w$ ，裂纹长为 c ，上下两边受均布剪应力 τ . 文献[3,4]给出了参考解. 本算例的应力奇异性为 0.5，无量纲化应力强度因子表达式为

$$\bar{K}_{III}=K_{III}/(\tau\sqrt{\pi c}). \tag{44}$$

当取 $h/w=1$, $G_2/G_1=4$ ，而裂纹尺寸和板尺寸取不

表 2 双材料单边界面裂纹模型无量纲化应力强度因子

c/w	数据来源	β		
		0.2	0.5	1
0.2	本文解	1.1198	1.0278	1.0160
	文献[3]	1.13	1.03	1.02
	文献[4]	1.128	1.029	1.017
0.4	本文解	1.3169	1.1071	1.0756
	文献[3]	1.33	1.11	1.08
	文献[4]	1.327	1.109	1.077
0.6	本文解	1.5128	1.2449	1.2069
	文献[3]	1.52	1.24	1.21
	文献[4]	1.519	1.247	1.210

同值时, 应用本方法所获得的无量纲化应力强度因子见表 2, 其结果与文献吻合很好.

5.3 算例 3

分析如图 5 所示的含面内单边斜裂纹的双材料模型, 裂纹位于材料 1 的面内. 材料 1 的宽为 w_1 , 高为 h_1+2h_2 , 裂尖到其右侧边距离为 a , 剪切模量为 G_1 , 上下两边受到均布剪应力 τ . 材料 2 的宽为 w_0+w_2 , 高为 h_1 , 剪切模量为 G_2 , 其右侧边为固支边界. 本算例的应力奇异性 μ_2 不再为 0.5, 其值见表 3 和 4. 无量纲

图 5 双材料单边斜裂纹模型

表 3 剪切模量比和裂纹长度取不同值时, 斜裂纹应力奇异性阶次和无量纲化应力强度因子

G_2/G_1	μ_2	$a/w_0=0.4$		$a/w_0=0.6$	
		$\bar{K}_{III,0}$	$\bar{K}_{III,-\pi}$	$\bar{K}_{III,0}$	$\bar{K}_{III,-\pi}$
1	0.5000	0.79378	0.32880	0.78051	0.32330
2	0.5672	1.08580	0.27941	1.12213	0.28876
3	0.5958	1.22225	0.22751	1.28995	0.24011
4	0.6117	1.29857	0.18918	1.38603	0.20192
5	0.6217	1.34643	0.16108	1.44708	0.17312
10	0.6432	1.44380	0.09111	1.57320	0.09927
100	0.6642	1.52508	0.01011	1.68021	0.01114

参考文献

- 1 Wang Y. SIF calculation of an internal crack problem under anti-plane shear. Comput Struct, 1993, 48: 291–295
- 2 Zhang X S. An edge crack at the interface between two different media in a rectangular sheet under anti-plane shear. Sci China Ser A, 1985, 28: 86–93
- 3 Wu K C, Chiu Y T. Antiplane shear interface cracks in anisotropic bimaterials. J Appl Mech, 1991, 58: 399–403
- 4 Treifi M, Oyadiji S O. Evaluation of mode III stress intensity factors for bi-material notched bodies using the fractal-like finite element method. Comput Struct, 2013, 129: 99–110
- 5 Zhang X S. A central crack at the interface between two different media in a rectangular sheet under anti-plane shear. Eng Fract Mech, 1984, 19: 709–715

表 4 斜裂纹角度取不同值时, 斜裂纹模型应力奇异性阶次和无量纲化应力强度因子

α	μ_2	$\bar{K}_{III,0}$	$\bar{K}_{III,-\pi}$
$\pi/12$	0.5217	1.26712	0.08775
$\pi/10$	0.5261	1.26428	0.10653
$\pi/8$	0.5329	1.20306	0.12988
$\pi/6$	0.5444	1.19648	0.18066
$\pi/5$	0.5536	1.16331	0.22075
$\pi/4$	0.5672	1.08580	0.27941
$\pi/3$	0.5878	0.85873	0.35070

化应力强度因子表达式为

$$\bar{K}_{III} = K_{III}/(\tau\sqrt{\pi c}^{1-\mu_2}), \quad (45)$$

式中, $c=a/\cos\alpha$ 是裂纹长度.

本算例应该看作三材料界面裂纹的特殊情况. 给定 $\alpha=\pi/4$, $h_1=h_2=w_0=0.5w_1=2.5w_2$, 而剪切模量比和裂纹长度取不同值时, 得到的应力奇异性 μ_2 和无量纲化应力强度因子 $\bar{K}_{III}$ 的值见表 3, 其中 $\bar{K}_{III,0}$ 和 $\bar{K}_{III,-\pi}$ 分别表示角度为 $\theta=0$ 和 $\theta=-\pi$ 方向的无量纲化应力强度因子. 给定 $G_2/G_1=2$, $a/w_0=0.4$, $h_1=h_2=w_0=0.5w_1=2.5w_2$, 而斜裂纹角度取不同值时, 得到的应力奇异性 μ_2 和无量纲化应力强度因子 $\bar{K}_{III}$ 见表 4.

6 结论

首先, 本文进一步推导给出了多材料反平面裂纹面上非齐次边界条件所对应的特解, 然后利用其特解及文献所提供的解析辛本征展开表达式构造出一类适用于多材料反平面裂纹分析的解析奇异单元, 该奇异单元不需要后处理可直接给出应力强度因子的数值结果, 并可作为一个特殊单元直接集成到有限元程序系统中. 数值算例验证了本文方法的有效性, 表明本文方法是相关问题分析的一个有效数值手段.

- 6 Fenner D N. Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface. *Int J Fract*, 1976, 12: 705–721
- 7 徐永君, 袁驷. 多材料反平面断裂问题特征值的超逆幂迭代求解. *固体力学学报*, 1997, 18: 290–294
- 8 Hu X F, Yao W A, Fang Z, et al. Stress singularity analysis of anisotropic multi-material wedges under antiplane shear deformation using the symplectic approach. *Theor Appl Mech Lett*, 2011, 1: 14–17
- 9 Hu X F, Yao W A. Stress singularity analysis of multi-material wedges under antiplane deformation. *Acta Mech Solida Sin*, 2013, 26: 151–160
- 10 钟万勰. 弹性力学求解新体系. 大连: 大连理工大学出版社, 1995
- 11 Leung A Y T, Xu X, Zhou Z, et al. Analytic stress intensity factors for finite elastic disk using symplectic expansion. *Eng Fract Mech*, 2009, 76: 1866–1882
- 12 Xu X S, Zhou Z H, Leung A Y T. Analytical stress intensity factors for edge-cracked cylinder. *Int J Mech Sci*, 2010, 52: 892–903
- 13 Hu X F, Yao W A. A novel singular finite element on mixed-mode bimaterial interfacial cracks with arbitrary crack surface tractions. *Int J Fract*, 2011, 172: 41–52
- 14 Yao W A, Wang S. An analytical singular element for interface cracks in bi-material Kirchhoff plate bending. *Eng Fract Mech*, 2012, 91: 103–116
- 15 Chen C H. Solutions for anti-plane problems of a composite material with a crack terminating at the interface. *Arch Appl Mech*, 2012, 82: 1233–1250
- 16 中国航空研究院. 应力强度因子手册. 北京: 科学出版社, 1993

A singular finite element of multi-material crack problems under elastic antiplane shear deformation

YAO WeiAn, LI Xiang, HU XiaoFei & ZHANG ZhaoJun

State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China

Multi-material antiplane crack problem is a typical mode III crack problem, of which the symplectic eigen-solutions under polar coordinate system and the stress singularity order at the crack tip have been reported in existing literatures. Based on the existing works, the special solution corresponding to the non-homogeneous boundary condition on crack surfaces is derived in this study, and then a symplectic analytical singular element (SASE) is constructed using the symplectic eigen-solutions and the special solution to deal with the related problems. Combining the proposed SASE with conventional finite elements, the multi-material mode III crack problems can be solved and the numerical results of stress intensity factors (SIF) can be calculated directly. Numerical examples show that the proposed method possesses high solving accuracy as well as high efficiency for the analysis of the discussed problem.

symplectic elasticity, singular finite element, antiplane deformation, multi-material cracks, stress intensity factor

doi: 10.1360/N092016-00208