具有质载和内抑制剂的非均匀恒化器模型共存解的多重性

聂华, 吴建华*

陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710062

E-mail: niehua@snnu.edu.cn, jianhuaw@snnu.edu.cn

收稿日期: 2010-09-19; 接受日期: 2011-05-06; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10971124, 11001160, 10871122)、教育部博士点基金 (批准号: 200807180004) 和陕西省科技计划 (批准号: 2009JQ1007) 资助项目

摘要 本文研究一类具有质载和内抑制剂的非均匀恒化器竞争模型. 基于对第二类极限系统分歧的进一步分析, 我们研究了此模型共存解的多重性和稳定性, 从而在一定条件下得到了模型共存解分歧的确切形状, 验证了已有的数值结果.

关键词 恒化器 共存解 扰动理论 多重性

MSC (2000) 主题分类 35B32, 35K57

1 引言

本文研究如下具有质载和内抑制剂的非均匀恒化器模型,

$$\begin{aligned}
s_t &= ds_{xx} - \frac{1}{r} a u f_1(s) - \frac{1}{r} b v f_2(s) e^{-\mu p}, & x \in (0, 1), & t > 0, \\
u_t &= du_{xx} + a(1 - q - k) u f_1(s), & x \in (0, 1), & t > 0, \\
v_t &= dv_{xx} + b v f_2(s) e^{-\mu p} + a q u f_1(s), & x \in (0, 1), & t > 0, \\
p_t &= dp_{xx} + a k u f_1(s), & x \in (0, 1), & t > 0,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

具有边界条件和初值条件

$$\begin{aligned}
s_x(0, t) &= -s^0, s_x(1, t) + \gamma s(1, t) = 0, & t > 0, \\
u_x(0, t) &= u_x(1, t) + \gamma u(1, t) = 0, & t > 0, \\
v_x(0, t) &= v_x(1, t) + \gamma v(1, t) = 0, & t > 0, \\
p_x(0, t) &= p_x(1, t) + \gamma p(1, t) = 0, & t > 0,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
s(x, 0) &= s_0(x) \geq 0, & p(x, 0) &= p_0(x) \geq 0, \neq 0, \\
u(x, 0) &= u_0(x) \geq 0, \neq 0, & v(x, 0) &= v_0(x) \geq 0, \neq 0,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

其中 $s(x, t), u(x, t), v(x, t), p(x, t)$ 分别为 t 时刻养料, 质载物种 (the plasmid-bearing organism), 非质载物种 (the plasmid-free organism) 以及抑制剂的浓度. 设 $s^0 > 0$ 为常数, 表示养料的输入浓度. d 为

恒化器内物种的扩散率, r 为产出率. a, b 分别为质载物种和非质载物种的最大生长率. 假设反应函数 $f_i(s) = \frac{s}{k_i + s}, i = 1, 2$, 其中 k_i 为 Michaelis-Menten 常数. 函数 $e^{-\mu p}$ 最早由 Lenski 和 Hattingh 在文献 [1] 中提出, 以刻画抑制剂 p 对物种 v 生长率的抑制程度, 其中 $\mu > 0$ 为常数, 刻画了抑制剂对物种 v 的影响. 常数 q 为质体游离率, k 代表抑制剂生长所消耗的养料比率. 因此, $0 < q, k < 1$, 且 $1 - q - k > 0$. γ 为正常数. 更详细的生物解释见文献 [2-7]. 目前此类模型已成为反应扩散方程领域的热点研究问题, 已有较多的研究成果, 见文献 [1-5, 8-12] 及其参考文献.

最早, Hsu 和 Waltman^[3,4] 基于 Chao 和 Levin^[13] 以及 Levin^[5] 的研究, 提出并分析了相应的 ODE 模型 (见 [3]), 得到了该模型解的一些全局渐近性. 但目前关于扩散系统 (1.1)-(1.3) 全局动力学行为的研究成果仍较少.

根据环境的非齐次性, 文献 [12] 去掉均匀搅拌的假设研究了具有扩散的系统 (1.1)-(1.3). 作者详细分析了抑制作用充分大时模型共存解的多重性与稳定性, 结果表明如果刻画抑制作用的参数 μ 充分大, 且物种 u 的最大生长率 $a \in (\frac{\lambda_1}{1-q-k}, \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k})$, 则模型 (1.1)-(1.2) 至少存在两个共存解; 如果 μ 充分大, 且 $a \geq \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}$, 则 (1.1)-(1.2) 仅存在唯一的渐近稳定的共存解. 而且, 大量的数值模拟显示 (1.1)-(1.2) 共存解关于参数 a 的分歧图如图 1 所示. 即对于 μ 充分大和 b 适当大, 存在唯一的 $\underline{a} > \frac{\lambda_1}{1-q-k}$, 使得若 $a < \underline{a}$, 则 (1.1)-(1.2) 无共存解; 若 $a = \underline{a}$ 或 $a \geq \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}$, 则 (1.1)-(1.2) 存在唯一共存解, 且它全局渐近稳定; 若 $\underline{a} < a < \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}$, 则 (1.1)-(1.2) 恰好存在两个共存解, 一个渐近稳定, 另一个极有可能不稳定. 而且, 大量的数值分析也表明 $\underline{a} \rightarrow \frac{\lambda_1}{1-q-k}$ 如果 $\mu \rightarrow \infty$, 但未能给出严格的证明.

文献 [14] 研究了 N 维情形下扩散系统 (1.1)-(1.3) 共存解分支的形状及模型解的动力学行为. 结果显示存在 $\mu^* > 0$ 使得如果参数 $\mu > \mu^*$, 则模型存在次临界的局部分歧, 故若最大生长率 a 靠近 $\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}$ 且小于 $\frac{\lambda_1}{1-q-k}$, 则模型至少存在两个共存解. 但未能给出模型共存解全局分歧的确切形状.

本文研究模型 (1.1) 共存解的多重性和稳定性, 进而研究模型共存解分歧曲线的形状. 为此, 引入如下无量纲的参数和变量: $\bar{s} = \frac{s}{s_0}, \bar{u} = \frac{u}{rs_0}, \bar{v} = \frac{v}{rs_0}, \bar{p} = \frac{p}{rs_0}, \bar{k}_i = \frac{k_i}{s_0}, \bar{\mu} = rs_0\mu, f_i(\bar{s}) = f_i(s_0\bar{s})$, 于是模型 (1.1)-(1.3) 可改写为

$$\begin{aligned} s_t &= ds_{xx} - au f_1(s) - bv f_2(s) e^{-\mu p}, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u_t &= du_{xx} + a(1 - q - k)u f_1(s), & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ v_t &= dv_{xx} + bv f_2(s) e^{-\mu p} + aqu f_1(s), & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ p_t &= dp_{xx} + ak u f_1(s), & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ s_x(0, t) &= -1, \quad s_x(1, t) + \gamma s(1, t) = 0, & t > 0, \\ u_x(0, t) &= u_x(1, t) + \gamma u(1, t) = 0, & t > 0, \\ v_x(0, t) &= v_x(1, t) + \gamma v(1, t) = 0, & t > 0, \\ p_x(0, t) &= p_x(1, t) + \gamma p(1, t) = 0, & t > 0, \\ s(x, 0) &= s_0(x) \geq 0, & p(x, 0) = p_0(x) \geq 0, \neq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \geq 0, \neq 0, & v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, \neq 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

为简便, 仍用原记号表示相应的无量纲参数和变量.

令 $z(x) = \frac{1+\gamma}{\gamma} - x, c = \frac{k}{1-q-k}$, 引入变换 $\Phi(x, t) = z - (s + u + v + p), \Psi(x, t) = p - cu$, 则有

$$\Phi_t = d\Phi_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad \Phi_x(0, t) = \Phi_x(1, t) + \gamma\Phi(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$\Psi_t = d\Psi_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad \Psi_x(0, t) = \Psi_x(1, t) + \gamma\Psi(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

显然,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(x, t) = 0.$$

因此根据渐近自治系统理论, (1.4) 的极限系统为

$$\begin{aligned} u_t &= du_{xx} + a(1-q-k)uf_1(z - (1+c)u - v), & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ v_t &= dv_{xx} + bv f_2(z - (1+c)u - v)e^{-\mu cu} \\ &\quad + aqu f_1(z - (1+c)u - v), & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= u_x(1, t) + \gamma u(1, t) = 0, & t > 0, \\ v_x(0, t) &= v_x(1, t) + \gamma v(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \geq 0, \neq 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, \neq 0, & x \in [0, 1], \end{aligned} \quad (1.5)$$

其中 $(1+c)u_0(x) + v_0(x) \leq z(x), \neq z(x)$.

本文主要研究模型 (1.1) 共存解的多重性和稳定性, 进而研究模型 (1.5) 共存解分歧曲线的形状. 因此我们考虑 (1.5) 对应的椭圆系统:

$$\begin{aligned} du'' + a(1-q-k)uf_1(z - (1+c)u - v) &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ dv'' + bv f_2(z - (1+c)u - v)e^{-\mu cu} + aqu f_1(z - (1+c)u - v) &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) + \gamma u(1) &= 0, \quad v'(0) = v'(1) + \gamma v(1) = 0. \end{aligned} \quad (\text{EP})$$

我们主要考察 (EP) 的共存解, 即 (EP) 的正解, 因此可将反应函数作如下延拓:

$$\bar{f}_i(s) = \begin{cases} \frac{s}{k_i + s}, & s \geq 0, \\ \tan^{-1}(2s/k_i + 1) - \pi/4, & s < 0, \end{cases}$$

显然, $\bar{f}_i \in C^2(-\infty, +\infty)$. 为简便, 仍用 $f_i(s)$ 表示 $\bar{f}_i(s)$.

本文旨在对文献 [12] 的数值结果 (见文献 [12] 的图 2) 给出严格的证明, 即证明一定条件下 (EP) 共存解的分歧图如图 1 所示. 证明的思想源于文献 [15], 采用的主要方法是分歧理论和扰动理论.

本文的结构如下: 第 2 节介绍一些预备知识和已知的结论, 第 3 节进一步研究第二个极限问题正解的分歧图, 第 4 节主要研究 μ 充分大且 a 靠近 $\frac{\lambda_1}{1-q-k}$ 或 $\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}$ 时 (EP) 共存解的多重性与稳定性.

图 1 (EP) 共存解的分歧图: (a) 和 (b) 分别为 u 和 v 关于 a 的分歧图.

2 预备知识

本节主要介绍一些预备知识及关于模型 (EP) 的已有结果.

引理 2.1^[16] 设 $q(x) \in C(\overline{\Omega})$ 且 $q(x) > 0$ ($x \in \overline{\Omega}$), 考察特征值问题

$$\Delta \phi + \lambda q(x)\phi = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} + \gamma(x)\phi = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.1)$$

其中 $\gamma(x) \in C(\partial\Omega)$ 且 $\gamma(x) \geq 0$, 则(2.1)的所有特征值是有序的, 且满足

$$0 < \lambda_1(q(x)) < \lambda_2(q(x)) \leq \cdots \rightarrow \infty$$

相应的特征函数为 $\phi_1, \phi_2, \dots$, 其中 $\phi_1 > 0$ ($x \in \overline{\Omega}$), 主特征值

$$\lambda_1(q) = \inf_{\phi} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(x)\phi^2 ds}{\int_{\Omega} q(x)\phi^2 dx}$$

是简单的, 且有如下比较定理: 对于 $j \geq 1$, 如果 $q_1 \geq q_2$ ($x \in \overline{\Omega}$), 则 $\lambda_j(q_1) \leq \lambda_j(q_2)$, 又若 $q_1(x) \neq q_2(x)$, 则严格不等式成立.

下面引入一些记号和已知结果. 令 λ_1, σ_1 分别为如下特征值问题的主特征值:

$$\begin{aligned} d\varphi_1'' + \lambda_1 f_1(z)\varphi_1 &= 0, \quad x \in (0, 1), \quad \varphi_1'(0) = \varphi_1'(1) + \gamma\varphi_1(1) = 0, \\ d\psi_1'' + \sigma_1 f_2(z)\psi_1 &= 0, \quad x \in (0, 1), \quad \psi_1'(0) = \psi_1'(1) + \gamma\psi_1(1) = 0, \end{aligned}$$

相应的正单位特征函数满足 $\max_{[0,1]} \varphi_1 = \max_{[0,1]} \psi_1 = 1$. 考虑如下单物种的平衡态问题,

$$du'' + a(1 - q - k)uf_1(z - u) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad u'(0) = u'(1) + \gamma u(1) = 0, \quad (2.2)$$

则有如下结论.

引理 2.2^[17, 18] 如果 $a \leq \frac{\lambda_1}{1-q-k}$, 则 (2.2) 的非负解仅有零解; 如果 $a > \frac{\lambda_1}{1-q-k}$, 则 (2.2) 存在唯一正解, 记为 ϑ . 而且 ϑ 满足以下性质:

- (i) $0 < \vartheta < z$;
- (ii) ϑ 在 $a \in (\frac{\lambda_1}{1-q-k}, +\infty)$ 内连续可微, 且关于 a 逐点递增;
- (iii) $\lim_{a \rightarrow \frac{\lambda_1}{1-q-k}} \vartheta = 0$ 在 $x \in [0, 1]$ 上一致成立, $\lim_{a \rightarrow \infty} \vartheta = z(x)$ 在 $x \in (0, 1)$ 内几乎处处成立;
- (iv) 设 $L_a = d \frac{d^2}{dx^2} + a(1 - q - k)(f_1(z - \vartheta) - \vartheta f_1'(z - \vartheta))$ 为 (2.2) 在 ϑ 处的线性化算子, 则 L_a 为 $C_B^2[0, 1] = \{u \in C^2[0, 1] : u'(0) = u'(1) + \gamma u(1) = 0\}$ 上的可微算子, 且 L_a 的所有特征值都严格小于零.

注 2.1 对于另一单物种平衡态问题

$$dv'' + bv f_2(z - v) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad v'(0) = v'(1) + \gamma v(1) = 0,$$

有类似的结论成立, 记其唯一正解为 θ , 相应的线性化算子为 $L_b = d \frac{d^2}{dx^2} + b(f_2(z - \theta) - \theta f_2'(z - \theta))$.

下面讨论 (EP) 正解的先验估计. 为此, 首先研究如下边值问题

$$\begin{aligned} dv'' + bv f_2(z - v) + aq(1 - q - k)\vartheta f_1(z - v) &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ v'(0) = v'(1) + \gamma v(1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

引理 2.3^[14] 设 $a > \frac{\lambda_1}{1-q-k}$, 则 (2.3) 存在唯一正解, 记为 $\bar{v}(x)$, 且它满足 $0 < \bar{v}(x) < z$. 特别, 若 $b > \sigma_1$, 则 $\theta < \bar{v}(x) < z$.

引理 2.4^[12, 14] 设 (u, v) 为 (EP) 的非负解, 且 $u \neq 0, v \neq 0$, 则 (i) $a > \frac{\lambda_1}{1-q-k}$; (ii) 对任意 $x \in [0, 1]$, $(1+c)u + v < z$; (iii) 对任意 $x \in [0, 1]$, $qu < (1-q-k)v$; (iv) 对任意 $x \in [0, 1]$, $0 < u < (1-q-k)\vartheta, 0 < v < \bar{v} < z$.

设 $\hat{\lambda}_1$ 为如下特征值问题的主特征值

$$d\hat{\varphi}_1'' + \hat{\lambda}_1 f_1(z - \theta)\hat{\varphi}_1 = 0, \quad x \in (0, 1), \quad \hat{\varphi}_1'(0) = \hat{\varphi}_1'(1) + \gamma\hat{\varphi}_1(1) = 0,$$

相应的正单位化特征函数 $\hat{\varphi}_1$ 满足 $\max_{[0, 1]} \hat{\varphi}_1 = 1$.

下面介绍文献 [12] 的主要结果. 根据文献 [12] 的引理 4.5 和 4.6 可知, 如果 $a \geq \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon$ 且 μ 充分大, 则 (EP) 有两种类型的正解. 具体地, 设 (u, v) 为 (EP) 的任意正解, 则或者 (u, v) 趋于问题

$$\begin{aligned} du'' + a(1-q-k)uf_1(z - (1+c)u - v) &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ dv'' + aqvf_1(z - (1+c)u - v) &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) + \gamma u(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) + \gamma v(1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

的正解, 或者 $(\mu u, v)$ 趋于问题

$$\begin{aligned} d\omega'' + a(1-q-k)\omega f_1(z - v) &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ dv'' + bvf_2(z - v)e^{-c\omega} &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ \omega'(0) = \omega'(1) + \gamma\omega(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) + \gamma v(1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

的正解. 因此, 为确定 (EP) 分歧解的形状, 须首先研究极限问题 (2.4) 和 (2.5) 分歧解的形状. 已有结果表明对任意 $a > \frac{\lambda_1}{1-q-k}$, 极限问题 (2.4) 存在唯一正解 $((1-q-k)\vartheta, q\vartheta)$, 且它线性渐近稳定 (见文献 [12] 的引理 4.1). 但文献 [12] 的引理 4.2 仅给出了 (2.5) 存在正解的充要条件, 关于 (2.5) 正解的个数还不清楚. 因此, 未能给出 (EP) 正解分歧曲线的确切形状. 文献 [12] 的具体结论如下.

定理 2.5^[12] 设 $b > \sigma_1$, 则对任意 $\epsilon > 0$ 充分小和任意 $A \geq \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}$, 存在 $M = M(\epsilon, A)$ 充分大使得对任意 $\mu \geq M$,

- (i) 如果 $a \in [\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon, \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k})$, 则 (EP) 至少存在两个共存解;
- (ii) 如果 $a \in [\frac{\lambda_1}{1-q-k}, A]$, 则 (EP) 存在唯一正解, 且它渐近稳定.

定理 2.6^[12] 设 $b > \sigma_1$, 则存在 $\epsilon_0 > 0$ 充分小及 $M_0 > 0$ 充分大 (均不依赖于 a), 使得如果 $a \in [\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k} - \epsilon_0, \frac{\lambda_1}{1-q-k})$, $\mu \geq M_0$, 则 (EP) 恰好存在两个共存解, 一个渐近稳定, 另一个不稳定.

注 2.2 根据定理 2.5 和 2.6 可知, (EP) 存在唯一正解如果 $a \geq \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}$; (EP) 至少存在两个正解如果 $\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon \leq a < \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}$, 且 (EP) 恰好存在两个共存解如果 $a \in [\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k} - \epsilon_0, \frac{\lambda_1}{1-q-k})$. 上述理论结果及文献 [12] 的数值结果暗示 (EP) 共存解分歧曲线的形状应该如图 1 所示, 但至今未能给出严格的证明. 本文旨在证明 (EP) 共存解的分歧曲线在 a 靠近 $\frac{\lambda_1}{1-q-k}$ 时如图 1 所示.

3 极限问题 (2.5) 的进一步分析

本节进一步研究极限问题 (2.5) 正解分歧曲线的结构, 这是确定 (EP) 共存解分歧曲线结构的关键. 根据文献 [12] 的引理 4.5 和 4.6 可知, (EP) 有两种类型的正解, 一种位于点 $((1-q-k)\vartheta, q\vartheta)$ 附

近, 另一种正解由极限方程 (2.5) 确定, 其中 $((1-q-k)\vartheta, q\vartheta)$ 是极限方程 (2.4) 的唯一正解. 因此为确定 (EP) 分歧解的形状, 须首先研究极限问题 (2.5) 分歧解的形状. 文献 [12] 已证明如下结果:

引理 3.1^[12] 设 $b > \sigma_1$ 固定, (ω, v) 为 (2.5) 的非负解且 $\omega \neq 0, v \neq 0$, 则 (i) $0 < v < \theta$ ($x \in [0, 1]$); (ii) $\frac{\lambda_1}{1-q-k} < a < \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}$; (iii) 存在常数 $C > 0$ (不依赖于 a), 使得 $\|\omega\|_\infty < C$.

引理 3.2^[12] 设 $b > \sigma_1$ 固定, 则 (2.5) 存在正解当且仅当 $\frac{\lambda_1}{1-q-k} < a < \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}$. 而且, (2.5) 的所有正解均不稳定.

为应用分歧理论, 我们引入如下空间:

$$X = W^{2,p}(0, 1) \times W^{2,p}(0, 1), \quad Y = L^p(0, 1) \times L^p(0, 1),$$

其中 $p > 1$, 则伴随空间 $Y^* = L^r(0, 1) \times L^r(0, 1)$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$.

引理 3.3^[12] 设 $b > \sigma_1$, 则 $(a, \omega, v) = (\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}, 0, \theta)$ 为 (2.5) 的分支点, 且存在 $\delta > 0$ 使得 (2.5) 在点 $(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}, 0, \theta)$ 附近的正解位于光滑曲线

$$\Gamma'_1 = \{(a(s), s(\hat{\varphi}_1 + \Phi(s)), \theta + s(\chi_1 + \Psi(s)) : 0 < s \leq \delta)\}$$

上, 其中 $\chi_1 = bcL_b^{-1}(\theta f_2(z - \theta)\hat{\varphi}_1)$, $a(s), \Phi(s), \Psi(s)$ 为关于 s 的光滑函数, 满足 $a(0) = \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}$, $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$. 而且, $a(s)$ 关于 s 在 $s = 0$ 处的导数为

$$a'(0) = \frac{\hat{\lambda}_1 \int_0^1 f'_1(z - \theta)\hat{\varphi}_1 \chi_1}{(1 - q - k) \int_0^1 f_1(z - \theta)\hat{\varphi}_1^2}.$$

注 3.1 由于 $\chi_1 = bcL_b^{-1}(\theta f_2(z - \theta)\hat{\varphi}_1) < 0$, 因此 $a'(0) < 0$, 这表明正解分支 Γ'_1 是向左的. 即存在 $\epsilon_1 > 0$ 充分小, 使得如果 $\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k} - \epsilon_1 \leq a < \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}$, 则 (2.5) 存在正解 $(a(s), s(\hat{\varphi}_1 + \Phi(s)), \theta + s(\chi_1 + \Psi(s)))$ ($0 < s \leq \delta$), 且只要 ϵ_1 充分小, 则它是唯一的. 当然由引理 3.2, 它也是不稳定的. 因此, 存在 $\epsilon_1 > 0$ 使得如果 $\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k} - \epsilon_1 \leq a < \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}$, 则 (2.5) 存在唯一正解, 其详细的证明参见文献 [12] 的引理 4.7.

下面应用全局分歧定理证明局部分歧 Γ'_1 可延拓为 (2.5) 的全局分歧. 设 α_0 由 $b = \lambda_1(f_2(z)e^{-c\alpha_0\varphi_1})$ 唯一确定, 相应的正特征函数为 ψ_0 , 且 $\max_{[0,1]} \psi_0 = 1$. 即

$$d\psi_0'' + bf_2(z)e^{-c\alpha_0\varphi_1}\psi_0 = 0, \quad x \in (0, 1), \quad \psi_0'(0) = \psi_0'(1) + \gamma\psi_0(1) = 0, \quad (3.1)$$

特征函数满足 $\psi_0 > 0$, $\max_{[0,1]} \psi_0 = 1$. 具体我们有如下结论.

定理 3.4 设 $b > \sigma_1$, Γ'_1 为引理 3.3 所得到的局部分支, 则存在 (2.5) 正解的有界连续分支 Γ_1 , 它包含 Γ'_1 , 且交曲线 $\{(a, \omega, 0), a > 0\}$ 于点 $(\frac{\lambda_1}{1-q-k}, \alpha_0\varphi_1, 0)$.

证明 由于此定理的证明类似于文献 [14] 中定理 2.1 的证明, 我们仅简要叙述其证明思路. 根据全局分歧理论^[20], 可以证明 (2.5) 在 $R \times X$ 上存在连续分支 Γ_1 , 它包含局部分支 Γ'_1 , 且满足以下结论之一:

(i) Γ_1 在 $R \times X$ 上无界;

(ii) Γ_1 与平凡或半平凡的解曲线相交于点 (a, ω, v) , 且 $(a, \omega, v) \neq (\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}, 0, \theta)$.

根据引理 3.1, L^p 估计及 Sobolev 嵌入定理, 可以证明存在正常数 M (不依赖于 a), 使得 $\|\omega\|_{C^1}, \|v\|_{C^1} \leq M$. 因此 Γ_1 在 $R \times X$ 上有界, 故 (i) 不可能出现, 从而 (ii) 必成立. 类似于文献 [14] 的引理 2.3, 可以证明 Γ_1 必交曲线 $\{(a, \omega, 0), a > 0\}$ 于点 $(\frac{\lambda_1}{1-q-k}, \alpha_0\varphi_1, 0)$, 其中 α_0 由 $b = \lambda_1(f_2(z)e^{-c\alpha_0\varphi_1})$ 唯一确定. $\square$

图 2 (2.5) 正解的分歧图: (a) 和 (b) 分别为 ω 和 v 关于参数 a 的分歧图.

尽管数值模拟显示 (2.5) 正解的分歧曲线如图 2 所示, 但一般而言分歧曲线 Γ_1 的结构复杂. 引理 3.3 仅表明如果 a 靠近 $\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}$, 则分歧曲线 Γ_1 的形状如图 2 所示. 下面进一步刻画 a 靠近 $\frac{\lambda_1}{1-q-k}$ 时分歧曲线 Γ_1 的结构.

定理 3.5 设 Γ_1 为定理 3.4 所得的全局分支, 则存在 $\epsilon_2 > 0$ 使得 Γ_1 包含发自点 $(\frac{\lambda_1}{1-q-k}, \alpha_0\varphi_1, 0)$ 的光滑曲线, 且对任意 $0 < \epsilon \leq \epsilon_2$, 它可用参数 a 表示为

$$\left\{ (a, \omega(a), v(a)) \in \left(\frac{\lambda_1}{1-q-k}, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon \right] \times X \right\}. \quad (3.2)$$

这里 $\omega(a), v(a)$ 为光滑函数, 且在 $C^1[0, 1]$ 上一致地有

$$\lim_{a \rightarrow \frac{\lambda_1}{1-q-k}} \omega(a) = \alpha_0\varphi_1, \quad \lim_{a \rightarrow \frac{\lambda_1}{1-q-k}} v(a) = 0.$$

证明 假设 $a_i \rightarrow \frac{\lambda_1}{1-q-k} +$, $(a_i, \omega_i, v_i) \in \Gamma_1$ 为 (2.5) 在 $a = a_i$ 时的正解. 根据隐函数定理, 为证明 (3.2) 只须证明对于充分大的 i , $\{(a_i, \omega_i, v_i) \in \Gamma_1\}$ 非退化. 于是定义 (2.5) 在 (a_i, ω_i, v_i) 处的线性化算子为

$$L_i \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\phi'' + a_i(1-q-k)f_1(z-v_i)\phi - a_i(1-q-k)\omega_i f_1'(z-v_i)\psi \\ d\psi'' + b[f_2(z-v_i) - v_i f_2'(z-v_i)]e^{-c\omega_i}\psi - bc v_i f_2(z-v_i)e^{-c\omega_i}\phi \end{pmatrix}.$$

考虑特征值问题 (具有通常的边界条件)

$$L_i \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} + \eta_i \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = 0,$$

类似于文献 [12] 的引理 4.2, 可以证明线性化算子 L_i 存在特征值 η_i 满足如下性质: 它是实的, 代数简单的, 所有其它特征值的实部大于 η_i . 而且 η_i 所对应的特征函数 (φ_i, ψ_i) 属于 $P = \{(\varphi, \psi) \in X : \varphi \geq 0, \psi \leq 0\}$ 的内部, 且它是特征函数属于 P 的唯一特征值. 因此称为算子 L_i 的主特征值. 进而类似于文献 [12] 的引理 4.2, 可以证明 $\eta_i < 0$, 从而得到不稳定性.

下面证明 L_i 的所有其它特征值都大于 0. 由引理 3.1 知 $\|\omega_i\|_\infty, \|v_i\|_\infty$ 在 $L^\infty(0, 1)$ 上有界. 因此由 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理, 可以假设存在 $\omega, v \in C_B^1[0, 1] = \{u \in C^1[0, 1] : u'(0) = u'(1) + \gamma u(1) = 0\}$ 及子列 $\{(\omega_i, v_i)\}$ 使得在 $C^1[0, 1]$ 上有 $\omega_i \rightarrow \omega, v_i \rightarrow v$. 由于 $a_i(1-q-k) = \lambda_1(f_1(z-v_i))$ 且 $a_i \rightarrow \frac{\lambda_1}{1-q-k}$, 易证 $v = 0$. 即在 $C^1[0, 1]$ 上有 $v_i \rightarrow 0$. 于是 ω 满足

$$d\omega'' + \lambda_1\omega f_1(z) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad \omega'(0) = \omega'(1) + \gamma\omega(1) = 0,$$

这表明 $\omega = \alpha\varphi_1$. 令 $\tilde{v}_i = \frac{v_i}{\|v_i\|_\infty}$, 则

$$d\tilde{v}_i'' + b\tilde{v}_i f_2(z - v_i)e^{-c\omega_i} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad \tilde{v}_i'(0) = \tilde{v}_i'(1) + \gamma\tilde{v}_i(1) = 0.$$

由 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理, 可以假设在 $C^1[0, 1]$ 中有 $\tilde{v}_i \rightarrow \tilde{v} \geq 0, \neq 0$, 且 $\tilde{v}$ 满足

$$d\tilde{v}'' + b\tilde{v} f_2(z)e^{-c\alpha\varphi_1} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad \tilde{v}'(0) = \tilde{v}'(1) + \gamma\tilde{v}(1) = 0.$$

根据强最大值原理及 Hopf 边值引理易见 $\tilde{v} > 0$, 这说明 $b = \lambda_1(f_2(z)e^{-c\alpha\varphi_1})$. 根据特征值 $\lambda_1(q(x))$ 关于函数 $q(x)$ 的单调性 (见引理 2.1) 可以证明 $\alpha = \alpha_0$, 从而 $\omega_i \rightarrow \alpha_0\varphi_1$. 因此 $L_i \rightarrow L_0$, 其中 L_0 为

$$L_0 \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\phi'' + \lambda_1 f_1(z)\phi - \lambda_1 \alpha_0 \varphi_1 f_1'(z)\psi \\ d\psi'' + b f_2(z)e^{-c\alpha_0 \varphi_1} \psi \end{pmatrix}.$$

因此 L_0 所对应的特征值问题可表述为

$$\begin{aligned} d\phi'' + \lambda_1 f_1(z)\phi - \lambda_1 \alpha_0 \varphi_1 f_1'(z)\psi + \tau\phi &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ d\psi'' + b f_2(z)e^{-c\alpha_0 \varphi_1} \psi + \tau\psi &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ \phi'(0) = \phi'(1) + \gamma\phi(1) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(1) + \gamma\psi(1) &= 0. \end{aligned}$$

若 $\psi \equiv 0$, 则 τ 为如下问题的特征值:

$$d\phi'' + \lambda_1 f_1(z)\phi + \tau\phi = 0, \quad x \in (0, 1), \quad \phi'(0) = \phi'(1) + \gamma\phi(1) = 0.$$

因此 $\lambda_i(-d\frac{d^2}{dx^2} - \lambda_1 f_1(z))$ ($i = 1, 2, \dots$) 为 L_0 的特征值, 相应的特征函数为 $(\varphi_i, 0)$. 显然, $\lambda_1(-d\frac{d^2}{dx^2} - \lambda_1 f_1(z)) = 0$, 相应的特征函数为 $(\varphi_1, 0)$, 且 $\lambda_i(-d\frac{d^2}{dx^2} - \lambda_1 f_1(z)) > 0$ ($i = 2, 3, \dots$).

若 $\psi \neq 0$, 则 $\tau_i = \lambda_i(-d\frac{d^2}{dx^2} - b f_2(z)e^{-c\alpha_0 \varphi_1})$ ($i = 1, 2, \dots$) 是 L_0 的特征值当且仅当问题

$$d\phi'' + \lambda_1 f_1(z)\phi + \tau\phi = \lambda_1 \alpha_0 \varphi_1 f_1'(z)\psi, \quad x \in (0, 1), \quad \phi'(0) = \phi'(1) + \gamma\phi(1) = 0$$

有解. 显然, $\lambda_1(-d\frac{d^2}{dx^2} - b f_2(z)e^{-c\alpha_0 \varphi_1}) = 0$, $\lambda_i(-d\frac{d^2}{dx^2} - b f_2(z)e^{-c\alpha_0 \varphi_1}) > 0$ ($i = 2, 3, \dots$). 而且容易证明对于 $\psi > 0$,

$$d\phi'' + \lambda_1 f_1(z)\phi = \lambda_1 \alpha_0 \varphi_1 f_1'(z)\psi, \quad x \in (0, 1), \quad \phi'(0) = \phi'(1) + \gamma\phi(1) = 0$$

无解. 因此 $\psi \neq \psi_0$, 即 0 为 L_0 的最小特征值, 相应的特征函数为 $(\varphi_1, 0)$, L_0 的所有其它特征值都大于零. 根据 Kato 扰动理论^[19], L_i 的最小特征值 η_i 趋于零, 所有其它特征值的实部都大于零. 由于已有主特征值 $\eta_i < 0$, 因此对于 i 充分大, (a_i, ω_i, v_i) 必非退化. 根据隐函数定理, 存在 $\epsilon_i > 0$ 及 (ω_i, v_i) 的邻域 $O_i \subset X$ 使得 (2.5) 在 $(a_i - \epsilon_i, a_i + \epsilon_i) \times O_i$ 内的正解都可参数化为 $(a, \omega(a), v(a)) : a_i - \epsilon_i \leq a \leq a_i + \epsilon_i$, 其中 $\omega(a_i), v(a_i)$ 为光滑函数, 满足 $(\omega(a_i), v(a_i)) = (\omega_i, v_i)$. 由于 $a_i > \frac{\lambda_1}{1-q-k}$, 根据有限覆盖定理可以证明对于 $(a_i - \epsilon_i, a_i + \epsilon_i) \times O_i$, 存在 ϵ_2 使得定理 3.5 成立.

性质 3.6 设 $b > \sigma_1$, $a \in (\frac{\lambda_1}{1-q-k}, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$, 其中 ϵ_2 由定理 3.5 给出, 则 (2.5) 存在唯一正解, 且它非退化不稳定.

证明 由定理 3.5 的证明可知对于 $a \in (\frac{\lambda_1}{1-q-k}, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$, (2.5) 的正解 (ω, v) 是非退化不稳定的, 因此只须证明唯一性. 鉴于引理 3.1, 类似于文献 [12] 的引理 4.2, 定义 $\tilde{D} = \{(\omega, v) \in W : \|\omega\|_\infty \leq C + 1, \|v\|_\infty \leq \sup_{[0,1]} z + 1\}$,

$$B(\omega, v) = \left(-d \frac{d^2}{dx^2} + M\right)^{-1} (a(1-q-k)\omega f_1(z-v) + M\omega, bvf_2(z-v)e^{-c\omega} + Mv),$$

其中 $W = \{(u, v) \in X | u \geq 0, v \geq 0, x \in [0, 1]\}$ 为 X 的正锥, M 充分大使得对任意 $(\omega, v) \in \tilde{D}$ 及任意 $a \in (\frac{\lambda_1}{1-q-k}, A]$ 有 $M + a(1-q-k)f_1(z-v) > 0$, $M + bf_2(z-v)e^{-c\omega} > 0$. 这里 $A > \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}$ 为任意常数. 于是 (2.5) 存在非负解当且仅当紧算子 B 在 $\tilde{D}$ 内存在不动点. 而且, 易见 B 在 $\tilde{D}$ 内的不动点有三种类型, 即平凡的不动点 $(0, 0)$, 半平凡的不动点 $(0, \theta)$ 及正不动点. 由文献 [12] 的引理 4.2, 对于 $a \in (\frac{\lambda_1}{1-q-k}, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$,

$$\text{index}_W(B, \tilde{D}) = 0, \quad \text{index}_W(B, (0, 0)) = 0, \quad \text{index}_W(B, (0, \theta)) = 1.$$

由定理 3.5 可知, 如果 $a \in (\frac{\lambda_1}{1-q-k}, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$, 则 (2.5) 的正解 (ω, v) 非退化不稳定, 且 (2.5) 在点 (ω, v) 的线性化算子的最小特征值小于零, 所有其它特征值的实部都大于零, 因此类似于文献 [12] 的引理 4.6, 可以证明 $\text{index}_W(B, (\omega, v)) = -1$. 进而, 根据算子 B 的紧性及其不动点 (包括点 $(0, 0)$, $(0, \theta)$ 及正不动点) 的非退化性, 可以证明它在 $\tilde{D}$ 内至多存在有限个不动点, 记为 $(\omega_i, v_i) (i = 1, 2, \dots, m)$, 且 $\text{index}_W(B, (\omega_i, v_i)) = -1$. 根据不动点指标的可加性有, 对于 $a \in (\frac{\lambda_1}{1-q-k}, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$,

$$\sum_{i=1}^m \text{index}_W(B, (\omega_i, v_i)) + \text{index}_W(B, (0, 0)) + \text{index}_W(B, (0, \theta)) = \text{index}_W(B, \tilde{D}) = 0,$$

从而 $m = 1$, 即对于 $a \in (\frac{\lambda_1}{1-q-k}, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$, (2.5) 仅存在唯一正解.

注 3.2 由注 3.1 及性质 3.6 知, 对于 $a \in (\frac{\lambda_1}{1-q-k}, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2] \cup [\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k} - \epsilon_1, \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k})$, (2.5) 仅存在唯一正解, 且它非退化不稳定.

4 正解的多重性和稳定性

本节研究 μ 充分大且 a 靠近 $\frac{\lambda_1}{1-q-k}$ 或 $\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k}$ 时 (EP) 正解的多重性与稳定性.

定理 4.1 对任意 $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$, 存在 $M_2(\epsilon)$ 充分大使得如果 $a \in [\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2] \cup [\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k} - \epsilon_0, \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k})$ 且 $\mu \geq M_2(\epsilon)$, 则 (EP) 恰好存在两个正解, 一个渐近稳定, 另一个不稳定. 这里 ϵ_0, ϵ_2 分别由定理 2.6 及 3.5 给出.

证明 由定理 2.6, 若 $a \in [\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k} - \epsilon_0, \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k})$ 且 μ 充分大, 则 (EP) 恰好存在两个正解, 一个渐近稳定, 另一个不稳定. 因此只须证明对任意给定的 $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$, 若 $a \in [\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$, 则定理结论成立. 文献 [12] 的引理 4.6 表明如果 $a \in [\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon, \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k})$ 且 μ 充分大, 则 (EP) 有两种类型的正解. 类似于文献 [12] 的定理 1.3 可以证明, 在点 $((1-q-k)\vartheta, q\vartheta)$ 附近, (EP) 存在唯一渐近稳定的正解. 即 (EP) 仅有唯一 (a) 类型的正解 (见文献 [12] 的引理 4.6), 且它渐近稳定. 下面证明 (EP) 也仅有唯一 (b) 类型的正解 (见文献 [12] 的引理 4.6), 从而根据文献 [12] 的引理 4.6 可知定理结论成立.

考虑如下问题

$$\begin{aligned} d\hat{u}'' + a(1-q-k)\hat{u}f_1(z - (1+c)\epsilon\hat{u} - v) &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ dv'' + bv f_2(z - (1+c)\epsilon\hat{u} - v)e^{-c\hat{u}} + aq\epsilon\hat{u}f_1(z - (1+c)\epsilon\hat{u} - v) &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ \hat{u}'(0) = \hat{u}'(1) + \gamma\hat{u}(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) + \gamma v(1) &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中 $\hat{u} = \mu u, \epsilon = \frac{1}{\mu}, a \in [\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$. 显然, (u, v) 为 (EP) 的解当且仅当 $(\mu u, v)$ 为 (4.1) 的解, 其中 $\epsilon = 1/\mu$. 于是只须证明 (4.1) 正解唯一且不稳定. 设 $a^* \in [\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$, 则注 3.2 表明 (2.5) 存在唯一正解 $(\tilde{\omega}_{a^*}, \tilde{v}_{a^*})$, 且它非退化不稳定. 因此 $(\tilde{\omega}_{a^*}, \tilde{v}_{a^*})$ 为 (4.1) 在 $(a, \epsilon) = (a^*, 0)$ 时的非退化正解. 显然, 对于 $\epsilon > 0$ 充分小, (4.1) 为 (2.5) 的正则扰动, 且关于 a 在紧集 $[\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$ 上是一致的. 根据隐函数定理, 存在 $\delta, \hat{\epsilon} > 0$ 充分小使得对任意 $a \in [\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$ 及 $0 \leq \epsilon \leq \hat{\epsilon}$, (4.1) 存在唯一正解 $(\hat{u}_a, v_a)$, 且满足

$$\|\hat{u}_a - \tilde{\omega}_a\|_{C^1} + \|v_a - \tilde{v}_a\|_{C^1} \leq \delta. \quad (4.2)$$

令 $M_2(\epsilon) = \max\{\frac{1}{\hat{\epsilon}}, M(\epsilon, \delta)\}$, 于是对任意 $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$, 存在 $M_2(\epsilon)$ 使得如果 $\mu \geq M_2(\epsilon)$, $a \in [\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$, 则 (EP) 存在唯一的 (b) 类型正解, 其中 $M(\epsilon, \delta)$ 由文献 [12] 的引理 4.6 给出.

最后证明该唯一的 (b) 类型正解不稳定. 类似于文献 [12] 的定理 1.3, 只须证明对于 $a \in [\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$, (4.1) 在点 $(a, \hat{u}_a, v_a)$ 的线性化问题存在实部小于零的特征值. 定义算子 $\hat{T}: X \rightarrow Y$ 和 $\hat{T}_0: X \rightarrow Y$ 分别为

$$\begin{aligned} \hat{T} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d\phi'' + a(1-q-k)[f_1(z - (1+c)\epsilon\hat{u} - v) - (1+c)\epsilon\hat{u}f_1'(z - (1+c)\epsilon\hat{u} - v)]\phi \\ -a(1-q-k)\hat{u}f_1'(z - (1+c)\epsilon\hat{u} - v)\psi \\ d\psi'' + b[f_2(z - (1+c)\epsilon\hat{u} - v) - v f_2'(z - (1+c)\epsilon\hat{u} - v)]e^{-c\hat{u}}\psi \\ -aq\epsilon\hat{u}f_1'(z - (1+c)\epsilon\hat{u} - v)\psi - b(1+c)\epsilon v f_2'(z - (1+c)\epsilon\hat{u} - v)e^{-c\hat{u}}\phi \\ -bcv f_2'(z - (1+c)\epsilon\hat{u} - v)e^{-c\hat{u}}\phi + aq\epsilon[f_1(z - (1+c)\epsilon\hat{u} - v) \\ -(1+c)\epsilon\hat{u}f_1'(z - (1+c)\epsilon\hat{u} - v)]\phi \end{pmatrix}, \\ \hat{T}_0 \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d\phi'' + a(1-q-k)f_1(z - \tilde{v}_a)\phi - a(1-q-k)\tilde{\omega}_a f_1'(z - \tilde{v}_a)\psi \\ d\psi'' + b[f_2(z - \tilde{v}_a) - \tilde{v}_a f_2'(z - \tilde{v}_a)]e^{-c\tilde{\omega}_a}\psi - bc\tilde{v}_a f_2'(z - \tilde{v}_a)e^{-c\tilde{\omega}_a}\phi \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中空间 X, Y 的定义见第 3 节. 考察特征值问题 (具有通常的边界条件)

$$\hat{T} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} + \hat{\eta} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = 0 \quad \text{和} \quad \hat{T}_0 \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} + \hat{\eta} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = 0.$$

易见, 若 $\epsilon \rightarrow 0$, 则对于 $a \in [\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$ 及趋于点 $(\tilde{\omega}_a, \tilde{v}_a)$ 的 $(\hat{u}, v)$ 有 $\hat{T} \rightarrow \hat{T}_0$. 类似于文献 [12] 的引理 4.2, 可以证明 $\hat{T}_0$ 的最小特征值 η_1 小于零. 根据标准的扰动理论, $\hat{T}$ 存在特征值 $\hat{\eta}$ 趋于 η_1 , 且 $\text{Re}\hat{\eta} < 0$, 故对于 μ 充分大, $a \in [\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$, (EP) 在 $(\tilde{\omega}_a, \tilde{v}_a)$ 附近的正解不稳定. $\square$

文献 [12] 的数值结果表明若 μ 充分大且 b 适当大, 则存在唯一常数 $\underline{a} > \frac{\lambda_1}{1-q-k}$ 使得 (EP) 无正解如果 $a < \underline{a}$; (EP) 存在唯一正解如果 $a = \underline{a}$ 或 $a \geq \frac{\lambda_1}{1-q-k}$; (EP) 正好存在两个正解如果 $\underline{a} < a < \frac{\lambda_1}{1-q-k}$.

定理 2.5, 2.6 及 4.1 表明对于 $a \geq \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k} - \epsilon_0$ 及 $\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon \leq a \leq \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2$, 数值结果成立. 下面证明当 a 趋于 $\frac{\lambda_1}{1-q-k}$ 且 μ 充分大时数值结果也成立. 为此, 首先研究 $a \in (\frac{\lambda_1}{1-q-k}, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon)$ 且 μ 充分大时 (EP) 正解的重数.

定理 4.2 设 $c\alpha_0\varphi_1 > 2$, 其中 α_0 由 $b = \lambda_1(f_2(z)e^{-c\alpha_0\varphi_1})$ 唯一确定, 则存在 $\epsilon > 0$ 充分小, $M > 0$ 充分大使得对于任意 $\mu \geq M$, 存在唯一的 $\underline{a} \in (\frac{\lambda_1}{1-q-k}, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon)$ 使得如果 $a < \underline{a}$, 则 (EP) 无正解; 如果 $a = \underline{a}$, 则 (EP) 存在唯一正解; 如果 $a \in (\underline{a}, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon]$, 则 (EP) 恰好存在两个正解, 一个渐近稳定, 另一个不稳定. 而且, $\underline{a} \rightarrow \frac{\lambda_1}{1-q-k}$ 如果 $\mu \rightarrow \infty$.

注 4.1 根据特征值 $\lambda_1(q(x))$ 关于函数 $q(x)$ 的单调性知, 特征值 $\lambda_1(f_2(z)e^{-c\alpha_0\varphi_1})$ 关于 α_0 严格单调递增, 且 $\lambda_1(f_2(z)) = \sigma_1$, $\lim_{\alpha_0 \rightarrow +\infty} \lambda_1(f_2(z)e^{-c\alpha_0\varphi_1}) = +\infty$. 因此只要选取 b 适当大, 则有 $\alpha_0 > \frac{2}{c\varphi_1}$. 显然, $b > e^2\sigma_1$ 是 $c\alpha_0\varphi_1 > 2$ 成立的必要条件, $b > \lambda_1(f_2(z)e^{-c\alpha_0 \min_{[0,1]}\varphi_1})$ 为其充分条件.

为证明定理 4.2, 首先证明以下两个引理.

引理 4.3 设 $b > \sigma_1$ 固定, $a_i \rightarrow \frac{\lambda_1}{1-q-k} +$, $\mu_i \rightarrow \infty$, (u_i, v_i) 为 (EP) 在 $(a, \mu) = (a_i, \mu_i)$ 时的退化正解, 则在 $C^1[0, 1]$ 上有 $u_i \rightarrow 0, v_i \rightarrow 0, \frac{u_i}{\|u_i\|_\infty} \rightarrow \varphi_1$, 且 $\mu_i u_i \rightarrow \alpha\varphi_1, \mu_i v_i \rightarrow \chi_0$, 其中 $\alpha > \alpha_0, \alpha_0$ 由 $b = \lambda_1(f_2(z)e^{-c\alpha_0\varphi_1})$ 唯一确定, $\chi_0 = (-d\frac{d^2}{dx^2} - bf_2(z)e^{-c\alpha\varphi_1})^{-1}(\frac{\lambda_1 q}{1-q-k}\alpha\varphi_1 f_1(z))$.

证明 由于其证明复杂, 我们将其分为四步.

第一步 证明在 $C^1[0, 1]$ 上有 $u_i \rightarrow 0, v_i \rightarrow 0, \frac{u_i}{\|u_i\|_\infty} \rightarrow \varphi_1$.

由引理 2.4, $0 < u_i < (1-q-k)\vartheta(a_i), 0 < v_i < z$, 因此 $\{-du_i''\}, \{-dv_i''\}$ 在空间 $L^\infty[0, 1]$ 上有界. 根据椭圆正则化理论及 Sobolev 嵌入定理, 可以假设存在 $u, v \in C^1[0, 1]$ 及子列 (仍用 u_i, v_i 表示) 使得在 $C^1[0, 1]$ 上有 $u_i \rightarrow u, v_i \rightarrow v$. 又由引理 2.4 有 $0 < u_i < (1-q-k)\vartheta(a_i)$, 鉴于 $\vartheta(a_i) \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$, 可以证明按 C^1 范数有 $u_i \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$. 令 $\tilde{u}_i = \frac{u_i}{\|u_i\|_\infty}$, 则 $\tilde{u}_i$ 满足

$$d\tilde{u}_i'' + a_i(1-q-k)\tilde{u}_i f_1(z - (1+c)u_i - v_i) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad \tilde{u}_i'(0) = \tilde{u}_i'(1) + \gamma\tilde{u}_i(1) = 0. \quad (4.3)$$

根据 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理, 可以假设在 $C^1[0, 1]$ 上有 $\tilde{u}_i \rightarrow \tilde{u} \geq 0, \neq 0$, 且

$$d\tilde{u}'' + \lambda_1 \tilde{u} f_1(z - v) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad \tilde{u}'(0) = \tilde{u}'(1) + \gamma\tilde{u}(1) = 0.$$

由最大值原理, $\tilde{u} > 0$, 从而 $\tilde{u} = \varphi_1$, 且 $v \equiv 0$. 即在 $C^1[0, 1]$ 上有 $v_i \rightarrow 0, \frac{u_i}{\|u_i\|_\infty} \rightarrow \varphi_1$.

第二步 利用反证法证明 $\mu_i \|u_i\|_\infty$ 有界.

假设 $\mu_i \|u_i\|_\infty \rightarrow \infty (i \rightarrow \infty)$, 由于 $\tilde{u}_i \rightarrow \varphi_1 > 0 (i \rightarrow \infty)$, 则当 $i \rightarrow \infty$ 时有

$$e^{-c\mu_i \|u_i\|_\infty \tilde{u}_i} \rightarrow 0,$$

于是以算子范数有 $-d\frac{d^2}{dx^2} - bf_2(z - (1+c)u_i - v_i)e^{-c\mu_i \|u_i\|_\infty \tilde{u}_i} \rightarrow -d\frac{d^2}{dx^2}$. 因此对于充分大的 i ,

$$B_i = \left(-d\frac{d^2}{dx^2} - bf_2(z - (1+c)u_i - v_i)e^{-c\mu_i \|u_i\|_\infty \tilde{u}_i} \right)^{-1}$$

为 $L^2(0, 1)$ 上的有界正算子. 而且

$$\mu_i v_i = B_i(a_i q \mu_i \|u_i\|_\infty \tilde{u}_i f_1(z - (1+c)u_i - v_i)) \rightarrow \infty (i \rightarrow \infty). \quad (4.4)$$

在方程 (4.3) 两端同乘 φ_1 , 在 $[0, 1]$ 上积分并应用 Green 公式有

$$a_i(1-q-k) \int_0^1 f_1(z - (1+c)u_i - v_i) \tilde{u}_i \varphi_1 dx - \lambda_1 \int_0^1 f_1(z) \tilde{u}_i \varphi_1 dx = 0.$$

从而

$$\begin{aligned} & a_i(1-q-k)k_1 \int_0^1 \frac{(1+c)u_i + v_i}{a_i(1-q-k) - \lambda_1} \frac{\tilde{u}_i \varphi_1}{(k_1 + z - (1+c)u_i - v_i)(k_1 + z)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{z(k_1 + z) - z((1+c)u_i + v_i)}{(k_1 + z - (1+c)u_i - v_i)(k_1 + z)} \tilde{u}_i \varphi_1 dx. \end{aligned} \quad (4.5)$$

另一方面, 由于 (u_i, v_i) 退化, 故存在 (ϕ_i, ψ_i) ($\|\phi_i\|_\infty + \|\psi_i\|_\infty = 1$) 使得

$$\begin{aligned} & d\phi_i'' + a_i(1-q-k)[f_1(z - (1+c)u_i - v_i) - (1+c)u_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i)]\phi_i \\ & - a_i(1-q-k)u_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i)\psi_i = 0, \\ & d\psi_i'' + [b(f_2(z - (1+c)u_i - v_i) - v_i f_2'(z - (1+c)u_i - v_i))e^{-c\mu_i u_i} \\ & - a_i q u_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i)]\psi_i - [b(1+c)v_i f_2'(z - (1+c)u_i - v_i)e^{-c\mu_i u_i} \\ & + bc\mu_i v_i f_2(z - (1+c)u_i - v_i)e^{-c\mu_i u_i}]\phi_i + a_i q [f_1(z - (1+c)u_i - v_i) \\ & - (1+c)u_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i)]\phi_i = 0, \\ & \phi_i'(0) = \phi_i'(1) + \gamma\phi_i(1) = 0, \quad \psi_i'(0) = \psi_i'(1) + \gamma\psi_i(1) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

显然, $\{-d\phi_i''\}$ 在 $L^\infty(0,1)$ 上有界. 由 (4.4), $\tilde{u}_i \rightarrow \varphi_1 > 0$, B_i 为有界正算子及 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$, 易见

$$\mu_i v_i e^{-c\mu_i \|u_i\|_\infty \tilde{u}_i} = B_i(a_i q \mu_i \|u_i\|_\infty \tilde{u}_i f_1(z - (1+c)u_i - v_i))e^{-c\mu_i \|u_i\|_\infty \tilde{u}_i} \rightarrow 0.$$

因此 $\{-d\psi_i''\}$ 在 $L^\infty(0,1)$ 上也有界. 根据 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理, 可以假设在 $C^1[0,1]$ 上 $\phi_i \rightarrow \phi$, $\psi_i \rightarrow \psi$. 对 (4.6) 取极限, 则 (ϕ, ψ) 满足

$$\begin{aligned} & d\phi'' + \lambda_1 f_1(z)\phi = 0, \quad x \in (0,1), \\ & d\psi'' + \frac{\lambda_1 q}{1-q-k} f_1(z)\psi = 0, \quad x \in (0,1), \\ & \phi'(0) = \phi'(1) + \gamma\phi(1) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(1) + \gamma\psi(1) = 0. \end{aligned}$$

因此 $\phi = \xi\varphi_1$, $\psi = (-d\frac{d^2}{dx^2})^{-1}(\frac{\lambda_1 q}{1-q-k} f_1(z)\xi\varphi_1) = \frac{q}{1-q-k}\xi\varphi_1$. 由于 $\|\phi\|_\infty + \|\psi\|_\infty = 1$, $\|\varphi_1\|_\infty = 1$, 必有 $\xi = \frac{1-q-k}{1-k}$. 即在 $C^1[0,1]$ 上有 $\phi_i \rightarrow \xi\varphi_1$, $\psi_i \rightarrow \frac{q}{1-q-k}\xi\varphi_1$, 其中 $\xi = \frac{1-q-k}{1-k}$.

在 (4.6) 的第一个方程两端同乘 φ_1 , 在 $[0,1]$ 上积分并利用 Green 公式有

$$\begin{aligned} & a_i(1-q-k)k_1 \int_0^1 \frac{(1+c)u_i + v_i}{a_i(1-q-k) - \lambda_1} \frac{\phi_i \varphi_1}{(k_1 + z - (1+c)u_i - v_i)(k_1 + z)} dx \\ & + a_i(1-q-k) \frac{\|u_i\|_\infty}{a_i(1-q-k) - \lambda_1} \int_0^1 \tilde{u}_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i)((1+c)\phi_i + \psi_i)\varphi_1 dx \\ &= \int_0^1 \frac{z(k_1 + z) - z((1+c)u_i + v_i)}{(k_1 + z - (1+c)u_i - v_i)(k_1 + z)} \phi_i \varphi_1 dx. \end{aligned} \quad (4.7)$$

根据等式 (4.5) 和 (4.7), 且 $\tilde{u}_i \rightarrow \varphi_1$, $\phi_i \rightarrow \xi\varphi_1$, $\psi_i \rightarrow \frac{q}{1-q-k}\xi\varphi_1$, 则 $\frac{\|u_i\|_\infty}{a_i(1-q-k) - \lambda_1} \rightarrow 0$, 从而 $\frac{u_i}{a_i(1-q-k) - \lambda_1} \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$). 由 v_i 的方程有

$$-d \left(\frac{v_i}{a_i(1-q-k) - \lambda_1} \right)'' - b f_2(z - (1+c)u_i - v_i) e^{-c\mu_i \|u_i\|_\infty \tilde{u}_i} \frac{v_i}{a_i(1-q-k) - \lambda_1}$$

$$= a_i q \frac{u_i}{a_i(1-q-k) - \lambda_1} f_1(z - (1+c)u_i - v_i),$$

又因为 B_i 为有界正算子, 故

$$\frac{v_i}{a_i(1-q-k) - \lambda_1} = B_i \left(a_i q \frac{u_i}{a_i(1-q-k) - \lambda_1} f_1(z - (1+c)u_i - v_i) \right) \rightarrow 0.$$

在 (4.5) 两端取极限, 则有 $\int_0^1 \frac{z}{k_1+z} \varphi_1^2 dx = 0$, 矛盾, 故 $\mu_i \|u_i\|_\infty$ 有界.

第三步 证明在 $C^1[0, 1]$ 上 $\mu_i u_i \rightarrow \alpha \varphi_1$, 且 $\alpha > \alpha_0$.

令 $\omega_i = \mu_i u_i$, 则 $\|\omega_i\|_\infty$ 有界, 且

$$d\omega_i'' + a_i(1-q-k)\omega_i f_1(z - (1+c)u_i - v_i) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad \omega_i'(0) = \omega_i'(1) + \gamma \omega_i(1) = 0.$$

由 L^p 估计及 Sobolev 嵌入定理, 可以假设存在 $\omega \in C_B^1[0, 1]$ 使得在 $C^1[0, 1]$ 上有 $\omega_i \rightarrow \omega$, 且

$$d\omega'' + \lambda_1 \omega f_1(z) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad \omega'(0) = \omega'(1) + \gamma \omega(1) = 0,$$

因此 $\omega = \alpha \varphi_1$. 即在 $C^1[0, 1]$ 上有 $\omega_i = \mu_i u_i \rightarrow \alpha \varphi_1$. 下面证明 $\alpha > \alpha_0$. 令 $\tilde{v}_i = \frac{v_i}{\|v_i\|_\infty}$, 则 $\tilde{v}_i$ 满足

$$d\tilde{v}_i'' + b\tilde{v}_i f_2(z - (1+c)u_i - v_i) e^{-c\mu_i u_i} + a_i q \frac{\|u_i\|_\infty}{\|v_i\|_\infty} \tilde{u}_i f_1(z - (1+c)u_i - v_i) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

$$\tilde{v}_i'(0) = \tilde{v}_i'(1) + \gamma \tilde{v}_i(1) = 0.$$

由于 $0 < qu_i < (1-q-k)v_i$ (见引理 2.4), 故 $0 < \frac{\|u_i\|_\infty}{\|v_i\|_\infty} \leq \frac{1-q-k}{q}$. 因此存在子列 (仍记为 u_i, v_i) 使得 $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|u_i\|_\infty}{\|v_i\|_\infty} = \beta$, 且 $0 \leq \beta \leq \frac{1-q-k}{q}$. 由 L^p 估计和 Sobolev 定理, 则在 $C^1[0, 1]$ 上必有 $\tilde{v}_i \rightarrow \tilde{v}$, 且

$$d\tilde{v}'' + b\tilde{v} f_2(z) e^{-c\alpha \varphi_1} + \frac{\lambda_1}{1-q-k} q \beta \varphi_1 f_1(z) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad \tilde{v}'(0) = \tilde{v}'(1) + \gamma \tilde{v}(1) = 0. \quad (4.8)$$

在 (4.8) 两端同乘 ψ_0 , 在 $[0, 1]$ 区间上积分并利用 Green 公式有

$$b \int_0^1 \tilde{v} f_2(z) (e^{-c\alpha \varphi_1} - e^{-c\alpha_0 \varphi_1}) \psi_0 dx + \frac{\lambda_1}{1-q-k} q \beta \int_0^1 f_1(z) \varphi_1 \psi_0 dx = 0,$$

又 $\beta \geq 0$, 因此 $\alpha \geq \alpha_0$. 而且 $\alpha > \alpha_0$ 当且仅当 $\beta > 0$; $\alpha = \alpha_0$ 当且仅当 $\beta = 0$.

最后, 只须证明 $\alpha \neq \alpha_0$. 反设 $\alpha = \alpha_0$, 则 $\beta = 0$. 即 $\frac{\|u_i\|_\infty}{\|v_i\|_\infty} \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$). 再由 (4.8) 有 $\tilde{v} = \psi_0$. 又因为 $\frac{\mu_i \|u_i\|_\infty}{\mu_i \|v_i\|_\infty} \rightarrow 0$ 且 $\mu_i \|u_i\|_\infty$ 有界, 故 $\mu_i \|v_i\|_\infty \rightarrow \infty$. 由于 (u_i, v_i) 为 (EP) 在 $(a, \mu) = (a_i, \mu_i)$ 时的退化正解, 则存在 (ϕ_i, ψ_i) ($\|\phi_i\|_2 + \|\psi_i\|_2 = 1$) 使得 (4.6) 成立. 显然, $\{-d\phi_i''\}$ 在 $L^2(0, 1)$ 上有界. 因此根据椭圆正则化理论及 Sobolev 嵌入定理, 可以假设在 $W^{1,2}(0, 1)$ 中, $\phi_i \rightarrow \phi$. 又因为 $\|\psi_i\|_2 \leq 1$, 故存在 $\psi \in L^2(0, 1)$ 及 ψ_i 的子列 (仍记为 ψ_i), 使得在 $L^2(0, 1)$ 上有 ψ_i 弱收敛于 ψ . 在 (4.6) 的第二个方程两

端同乘 ψ_0 , 在 $[0, 1]$ 上积分并利用 Green 公式有

$$\begin{aligned}
 & bc\mu_i\|v_i\|_\infty \int_0^1 \tilde{v}_i f_2(z - (1+c)u_i - v_i) e^{-c\mu_i u_i} \phi_i \psi_0 dx \\
 &= \int_0^1 b[f_2(z - (1+c)u_i - v_i) e^{-c\mu_i u_i} - f_2(z) e^{-c\alpha_0 \varphi_1}] \psi_i \psi_0 dx \\
 &\quad - b \int_0^1 v_i f_2'(z - (1+c)u_i - v_i) e^{-c\mu_i u_i} \psi_i \psi_0 dx - a_i q \int_0^1 u_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i) \psi_i \psi_0 dx \\
 &\quad - b(1+c) \int_0^1 v_i f_2'(z - (1+c)u_i - v_i) e^{-c\mu_i u_i} \phi_i \psi_0 dx \\
 &\quad + a_i q \int_0^1 (f_1(z - (1+c)u_i - v_i) - (1+c)u_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i)) \phi_i \psi_0 dx \\
 &\rightarrow \frac{\lambda_1 q}{1-q-k} \int_0^1 f_1(z) \phi \psi_0 dx.
 \end{aligned}$$

由于 $\int_0^1 \tilde{v}_i f_2(z - (1+c)u_i - v_i) e^{-c\mu_i u_i} \phi_i \psi_0 dx \rightarrow \int_0^1 f_2(z) e^{-c\alpha_0 \varphi_1} \phi \psi_0^2 dx$, 且 $\mu_i\|v_i\|_\infty \rightarrow \infty$, 我们可以证明 $\int_0^1 f_2(z) e^{-c\alpha_0 \varphi_1} \phi \psi_0^2 dx = 0$, 因而在 $(0, 1)$ 内几乎处处有 $\phi = 0$, 故在 $W^{1,2}(0, 1)$ 上, $\phi_i \rightarrow 0$, 从而 $\|\psi\|_2 = 1$. 令 $\hat{\phi}_i = \mu_i \phi_i$, 则

$$\begin{aligned}
 & -d\hat{\phi}_i'' - a_i(1-q-k)[f_1(z - (1+c)u_i - v_i) - (1+c)u_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i)]\hat{\phi}_i \\
 &= -a_i(1-q-k)\mu_i u_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i)\psi_i, \quad x \in (0, 1), \\
 & \hat{\phi}_i'(0) = \hat{\phi}_i'(1) + \gamma\hat{\phi}_i(1) = 0.
 \end{aligned}$$

由于 $-a_i(1-q-k)[f_1(z - (1+c)u_i - v_i) - (1+c)u_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i)] \in L^\infty(0, 1)$, $-a_i(1-q-k)\mu_i u_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i)\psi_i \in L^2(0, 1)$, 根据椭圆正则化理论则有 $\hat{\phi}_i \in W^{2,2}(0, 1)$. 再由 Sobolev 嵌入定理可知, 存在 $\hat{\phi} \in W^{1,2}(0, 1)$ 使得在 $W^{1,2}(0, 1)$ 上有 $\hat{\phi}_i \rightarrow \hat{\phi}$, 从而根据 (4.6) 的第二个方程可知 $\{-d\psi_i''\}$ 在 $L^2(0, 1)$ 上有界. 同理, 在 $W^{1,2}(0, 1)$ 上也有 $\psi_i \rightarrow \psi$, 且 $(\hat{\phi}, \psi)$ 弱满足

$$\begin{aligned}
 & d\hat{\phi}'' + \lambda_1 f_1(z)\hat{\phi} - \lambda_1 \alpha_0 \varphi_1 f_1'(z)\psi = 0, \quad x \in (0, 1), \\
 & d\psi'' + b f_2(z) e^{-c\alpha_0 \varphi_1} \psi = 0, \quad x \in (0, 1), \\
 & \hat{\phi}'(0) = \hat{\phi}'(1) + \gamma\hat{\phi}(1) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(1) + \gamma\psi(1) = 0.
 \end{aligned}$$

鉴于 $\|\psi\|_2 = 1$, 故 $\psi = \frac{\psi_0}{\|\psi_0\|_2}$, 从而 $\hat{\phi}$ 弱满足

$$d\hat{\phi}'' + \lambda_1 f_1(z)\hat{\phi} = \lambda_1 \alpha_0 \varphi_1 f_1'(z) \frac{\psi_0}{\|\psi_0\|_2}, \quad x \in (0, 1), \quad \hat{\phi}'(0) = \hat{\phi}'(1) + \gamma\hat{\phi}(1) = 0.$$

在上述方程两端同乘 φ_1 , 在 $[0, 1]$ 上积分并利用 Green 公式有

$$\lambda_1 \alpha_0 \int_0^1 \varphi_1^2 f_1'(z) \frac{\psi_0}{\|\psi_0\|_2} dx = 0,$$

矛盾, 故 $\alpha > \alpha_0$.

第四步 证明在 $C^1[0, 1]$ 中, $\mu_i v_i \rightarrow \chi_0$.

令 $\chi_i = \mu_i v_i$, 则

$$\begin{aligned} d\chi_i'' + b\chi_i f_2(z - (1+c)u_i - v_i)e^{-c\mu_i u_i} + a_i q \mu_i u_i f_1(z - (1+c)u_i - v_i) &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ \chi_i'(0) &= \chi_i'(1) + \gamma \chi_i(1) = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha > \alpha_0$, 故 $\beta > 0$. 即 $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|u_i\|_\infty}{\|v_i\|_\infty} > 0$, 又 $\mu_i \|u_i\|_\infty$ 有界, 故 $\|\chi_i\|_\infty = \mu_i \|v_i\|_\infty$ 有界. 因此 $\{-d\chi_i''\}$ 在 $L^\infty(0, 1)$ 上有界. 根据 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理, 可以假设在 $C^1[0, 1]$ 中 $\chi_i \rightarrow \chi$, 且

$$d\chi'' + b\chi f_2(z)e^{-c\alpha\varphi_1} + \frac{\lambda_1 q}{1-q-k} \alpha \varphi_1 f_1(z) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad \chi'(0) = \chi'(1) + \gamma \chi(1) = 0.$$

由于 $\lambda_1(-d\frac{d^2}{dx^2} - bf_2(z)e^{-c\alpha\varphi_1}) > \lambda_1(-d\frac{d^2}{dx^2} - bf_2(z)e^{-c\alpha_0\varphi_1}g) = 0$, 因此 $-d\frac{d^2}{dx^2} - bf_2(z)e^{-c\alpha\varphi_1}$ 可逆, 且

$$\chi = \chi_0 = \left(-d\frac{d^2}{dx^2} - bf_2(z)e^{-c\alpha\varphi_1}\right)^{-1} \left(\frac{\lambda_1 q}{1-q-k} \alpha \varphi_1 f_1(z)\right) > 0.$$

设 $(\underline{u}, \underline{v})$ 为 (EP) 在 $a = \underline{a}$ 时的退化正解, (ϕ, ψ) 满足

$$\begin{aligned} d\phi'' + \underline{a}(1-q-k)[f_1(z - (1+c)\underline{u} - \underline{v}) - (1+c)\underline{u}f_1'(z - (1+c)\underline{u} - \underline{v})]\phi \\ - \underline{a}(1-q-k)\underline{u}f_1'(z - (1+c)\underline{u} - \underline{v})\psi = 0, \\ d\psi'' + [b(f_2(z - (1+c)\underline{u} - \underline{v}) - \underline{v}f_2'(z - (1+c)\underline{u} - \underline{v}))e^{-c\mu\underline{u}} - \underline{a}q\underline{u}f_1'(z - (1+c)\underline{u} - \underline{v})]\psi \\ - [b(1+c)\underline{v}f_2'(z - (1+c)\underline{u} - \underline{v})e^{-c\mu\underline{u}} + bc\mu\underline{v}f_2(z - (1+c)\underline{u} - \underline{v})e^{-c\mu\underline{u}}]\phi \\ + \underline{a}q[f_1(z - (1+c)\underline{u} - \underline{v}) - (1+c)\underline{u}f_1'(z - (1+c)\underline{u} - \underline{v})]\phi = 0, \\ \phi'(0) = \phi'(1) + \gamma\phi(1) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(1) + \gamma\psi(1) = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

且 $\|\phi\|_\infty + \|\psi\|_\infty = 1$. 记 Z 为 $\text{span}\{(\phi, \psi)\}$ 在空间 X 中的补集. 下面的引理表明如果 $\underline{a}$ 趋于 $\frac{\lambda_1}{1-q-k}$ 且 μ 充分大, 则 $(\underline{a}, \underline{u}, \underline{v})$ 为 (EP) 分歧曲线的转向点, 且分歧曲线转向 $\underline{a}$ 的右边.

引理 4.4 设 $c\alpha_0\varphi_1 > 2$, 则存在正常数 ϵ_3 充分小, M_3 充分大使得如果 $\frac{\lambda_1}{1-q-k} < \underline{a} < \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_3$, $\mu \geq M_3$ 且 $(\underline{u}, \underline{v})$ 为 (EP) 在 $a = \underline{a}$ 时的退化正解, 则 (4.9) 存在唯一解 (ϕ, ψ) (至多相差正负号), 且存在 $\delta > 0$ 使得在点 $(\underline{a}, \underline{u}, \underline{v})$ 附近, (EP) 的所有正解都在 C^1 曲线

$$(\underline{a}(s), \underline{u}(s), \underline{v}(s)) = (\underline{a} + s\tau(s), \underline{u} + s\phi + s\Phi(s), \underline{v} + s\psi + s\Psi(s)) \quad (4.10)$$

上, 其中 $-\delta \leq s \leq \delta$, $\tau(0) = 0, \tau'(0) > 0, (\Phi(s), \Psi(s)) : (-\delta, \delta) \rightarrow Z$, 且 $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$. 特别, 对于 a 靠近 $\underline{a}$ 但小于 $\underline{a}$, 在 $(\underline{u}, \underline{v})$ 附近 (EP) 无解.

证明 设 (u_i, v_i) 为 (EP) 的退化正解 (具有 $(a, \mu) = (a_i, \mu_i)$), 且 $a_i \rightarrow \frac{\lambda_1}{1-q-k}, \mu_i \rightarrow \infty$, 则只须证明 (4.9) (具有 $(\underline{a}, \mu, \underline{u}, \underline{v}) = (a_i, \mu_i, u_i, v_i)$) 存在唯一解 (ϕ_i, ψ_i) , 且当 $\mu = \mu_i$ 时在 (a_i, u_i, v_i) 附近 (EP) 的所有正解 (a, u, v) 均位于 (4.10) 给定的曲线上. 为此, 分别定义 $T_i : X \rightarrow Y, T_0 : X \rightarrow Y$ 为

$$T_i \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\phi'' + a_i(1-q-k)[f_1(z - (1+c)u_i - v_i) - (1+c)u_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i)]\phi \\ - a_i(1-q-k)u_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i)\psi \\ d\psi'' + [b(f_2(z - (1+c)u_i - v_i) - v_i f_2'(z - (1+c)u_i - v_i))e^{-c\mu_i u_i} \\ - a_i q u_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i)\psi - b(1+c)v_i f_2'(z - (1+c)u_i - v_i)e^{-c\mu_i u_i} \\ - bc\mu_i v_i f_2(z - (1+c)u_i - v_i)e^{-c\mu_i u_i} \phi + a_i q [f_1(z - (1+c)u_i - v_i) \\ - (1+c)u_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i)]\phi \end{pmatrix},$$

$$T_0 \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\phi'' + \lambda_1 f_1(z)\phi \\ d\psi'' + bf_2(z)e^{-c\alpha\varphi_1}\psi - bc\chi_0 f_2(z)e^{-c\alpha\varphi_1}\phi + \frac{\lambda_1 q}{1-q-k} f_1(z)\phi \end{pmatrix}.$$

由引理 4.3 知在 $C^1[0, 1]$ 中有, $u_i \rightarrow 0, v_i \rightarrow 0, \frac{u_i}{\|u_i\|_\infty} \rightarrow \varphi_1, \mu_i u_i \rightarrow \alpha\varphi_1, \mu_i v_i \rightarrow \chi_0$, 其中 $\alpha > \alpha_0$, 因此按算子范数有 $T_i \rightarrow T_0$. 由于 $\alpha > \alpha_0$, 故 $d\frac{d^2}{dx^2} + bf_2(z)e^{-c\alpha\varphi_1}$ 可逆, 从而 $\psi \neq 0$, 且 $(0, \psi) \notin N(T_0)$. 因此 T_0 的核空间和值域空间分别为

$$N(T_0) = \text{span}\{(\varphi_1, \bar{\psi})\}, \quad R(T_0) = \{\text{span}(\varphi_1, 0)\}^\perp,$$

其中 $\bar{\psi} = (-d\frac{d^2}{dx^2} - bf_2(z)e^{-c\alpha\varphi_1})^{-1}(\frac{\lambda_1 q}{1-q-k} f_1(z)\varphi_1 - bc\chi_0 f_2(z)e^{-c\alpha\varphi_1}\varphi_1)$. 易见, 0 是 T_0 的 I 单重特征值, 其中 I 为由 X 到 Y 的投影. 因此对于充分大的 i , T_i 存在趋于零的 I 单重特征值 η_i . 另一方面, 由于 (u_i, v_i) 退化, 故对于充分大的 i 必有 $\eta_i = 0$. 设 (ϕ_i, ψ_i) 为 T_i 所对应的特征函数, 且 $\|(\phi_i, \psi_i)\|_\infty = \|(\varphi_1, \bar{\psi})\|_\infty$, 则 (ϕ_i, ψ_i) 为 (4.9) 的唯一解 (具有 $(\underline{a}, \underline{\mu}, \underline{u}, \underline{v}) = (a_i, \mu_i, u_i, v_i)$). 显然, $\{-d\phi_i''\}$ 及 $\{-d\psi_i''\}$ 在 $L^\infty(0, 1)$ 上有界. 根据 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理, 可以假设在 $C^1[0, 1]$ 上有 $\phi_i \rightarrow \varphi_1, \psi_i \rightarrow \bar{\psi}$. 由于 $(\varphi_1, 0) \notin R(T_0)$, 因此

$$((1-q-k)u_i f_1(z - (1+c)u_i - v_i), qu_i f_1(z - (1+c)u_i - v_i)) \notin R(T_i).$$

事实上, 令 $l_0(u, v) = \int_0^1 u\varphi_1 dx$, 则 $l_0 \in N(T_0^*)$ 且 $N(l_0) = R(T_0)$. 取 $l_i \in N(T_i^*)$ 使得 $\|l_i\| = \|l_0\|$, 则在 Y^* 中有 $l_i \rightarrow l_0$ 如果合适地选取 l_i 的符号. 根据 Y^* 的特征, 存在 $(\phi_i^*, \psi_i^*) \in Y^*$ 使得对任意 $(u, v) \in Y$,

$$l_i(u, v) = \int_0^1 u\phi_i^* dx + \int_0^1 v\psi_i^* dx. \quad (4.11)$$

鉴于 $l_i \rightarrow l_0$, 可以证明在 $L^r(0, 1)$ 中有 $\phi_i^* \rightarrow \varphi_1, \psi_i^* \rightarrow 0$. 因此

$$\begin{aligned} & l_i \left((1-q-k) \frac{u_i}{\|u_i\|_\infty} f_1(z - (1+c)u_i - v_i), q \frac{u_i}{\|u_i\|_\infty} f_1(z - (1+c)u_i - v_i) \right) \\ &= \int_0^1 \phi_i^* (1-q-k) \frac{u_i}{\|u_i\|_\infty} f_1(z - (1+c)u_i - v_i) dx + \int_0^1 \psi_i^* q \frac{u_i}{\|u_i\|_\infty} f_1(z - (1+c)u_i - v_i) dx \\ &\rightarrow \int_0^1 (1-q-k) \varphi_1^2 f_1(z) dx > 0, \end{aligned}$$

从而 $((1-q-k)u_i f_1(z - (1+c)u_i - v_i), qu_i f_1(z - (1+c)u_i - v_i)) \notin R(T_i)$. 根据单重特征值分歧定理 (见文献 [20] 的定理 3.2) 可知, 存在 C^1 连续的曲线

$$(a_i(s), u_i(s), v_i(s)) = (a_i + s\tau_i(s), u_i + s\phi_i + s\Phi_i(s), v_i + s\psi_i + s\Psi_i(s)),$$

其中 $s \in (-\delta_i, \delta_i)$, $\tau_i(0) = 0, \Phi_i(0) = \Psi_i(0) = 0$, 且 $(\Phi_i(s), \Psi_i(s)) \in \text{span}\{(\phi_i, \psi_i)\}^\perp$.

下面计算 $\tau_i(s)$ 关于 s 在 $s = 0$ 处的导数 $\dot{\tau}_i(0)$. 对 $u_i(s), v_i(s)$ 的方程两端关于 s 微分两次, 并令

$s = 0$ 可得

$$T_i \begin{pmatrix} 2\dot{\Phi}_i(0) \\ 2\dot{\Psi}_i(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\dot{\tau}_i(0)(1-q-k)u_i f_1(z - (1+c)u_i - v_i) \\ +2a_i(1-q-k)\phi_i f'_1(z - (1+c)u_i - v_i)[(1+c)\phi_i + \psi_i] \\ -a_i(1-q-k)u_i f''_1(z - (1+c)u_i - v_i)[(1+c)\phi_i + \psi_i]^2 \\ 2b\psi_i f'_2(z - (1+c)u_i - v_i)[(1+c)\phi_i + \psi_i]e^{-c\mu_i u_i} \\ +2b\psi_i f_2(z - (1+c)u_i - v_i)e^{-c\mu_i u_i} c\mu_i \phi_i \\ -2bcv_i f'_2(z - (1+c)u_i - v_i)[(1+c)\phi_i + \psi_i]e^{-c\mu_i u_i} \mu_i \phi_i \\ -bv_i f''_2(z - (1+c)u_i - v_i)[(1+c)\phi_i + \psi_i]^2 e^{-c\mu_i u_i} \\ -bv_i f_2(z - (1+c)u_i - v_i)e^{-c\mu_i u_i} (\mu_i c\phi_i)^2 \\ -2\dot{\tau}_i(0)qu_i f_1(z - (1+c)u_i - v_i) \\ +2a_i q\phi_i f'_1(z - (1+c)u_i - v_i)[(1+c)\phi_i + \psi_i] \\ -a_i qu_i f''_1(z - (1+c)u_i - v_i)[(1+c)\phi_i + \psi_i]^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix},$$

其中 $\dot{\Phi}_i(0), \dot{\Psi}_i(0)$ 为 $\Phi(s), \Psi(s)$ 关于 s 在 $s = 0$ 处的导数. 由 (4.11), 我们有

$$0 = \langle l_i, T_i(2\dot{\Phi}_i(0), 2\dot{\Psi}_i(0)) \rangle = \int_0^1 \phi_i^* F dx + \int_0^1 \psi_i^* G dx.$$

经直接的计算得

$$\begin{aligned} & 2\dot{\tau}_i(0) \left[(1-q-k) \int_0^1 u_i f_1(z - (1+c)u_i - v_i) \phi_i^* + q \int_0^1 u_i f_1(z - (1+c)u_i - v_i) \psi_i^* \right] \\ &= 2a_i(1-q-k) \int_0^1 \phi_i f'_1(z - (1+c)u_i - v_i)[(1+c)\phi_i + \psi_i] \phi_i^* dx \\ & \quad - a_i(1-q-k) \int_0^1 u_i f''_1(z - (1+c)u_i - v_i)[(1+c)\phi_i + \psi_i]^2 \phi_i^* dx \\ & \quad + 2b \int_0^1 \psi_i f'_2(z - (1+c)u_i - v_i)[(1+c)\phi_i + \psi_i] e^{-c\mu_i u_i} \psi_i^* dx \\ & \quad + 2b \int_0^1 \psi_i f_2(z - (1+c)u_i - v_i) e^{-c\mu_i u_i} c\mu_i \phi_i \psi_i^* dx \\ & \quad - 2bc \int_0^1 \mu_i v_i f'_2(z - (1+c)u_i - v_i)[(1+c)\phi_i + \psi_i] e^{-c\mu_i u_i} \phi_i \psi_i^* dx \\ & \quad - b \int_0^1 v_i f''_2(z - (1+c)u_i - v_i)[(1+c)\phi_i + \psi_i]^2 e^{-c\mu_i u_i} \psi_i^* dx \\ & \quad - b \int_0^1 v_i f_2(z - (1+c)u_i - v_i) e^{-c\mu_i u_i} (\mu_i c\phi_i)^2 \psi_i^* dx \\ & \quad + 2a_i q \int_0^1 \phi_i f'_1(z - (1+c)u_i - v_i)[(1+c)\phi_i + \psi_i] \psi_i^* dx \\ & \quad - a_i q \int_0^1 u_i f''_1(z - (1+c)u_i - v_i)[(1+c)\phi_i + \psi_i]^2 \psi_i^* dx. \end{aligned} \quad (4.12)$$

由于在 $C^1[0, 1]$ 中有 $u_i \rightarrow 0, v_i \rightarrow 0, \frac{u_i}{\|u_i\|_\infty} \rightarrow \varphi_1, \mu_i u_i \rightarrow \alpha \varphi_1$ ($\alpha > \alpha_0$), $\mu_i v_i \rightarrow \chi_0, \phi_i \rightarrow \varphi_1, \psi_i \rightarrow \bar{\psi}$, 且在 $L^r(0, 1)$ ($r > 1$) 中 $\phi_i^* \rightarrow \varphi_1, \psi_i^* \rightarrow 0$, 因此可以证明 (4.12) 右端的第 2 项, 第 3 项, 第 5 项, 第 6 项, 第 8 项及第 9 项都趋于零. 易见, 当 $i \rightarrow \infty$ 时 (4.12) 右端的第 1 项

$$2a_i(1-q-k) \int_0^1 \phi_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i)[(1+c)\phi_i + \psi_i] \phi_i^* dx \rightarrow 2\lambda_1 \int_0^1 f_1'(z)[(1+c)\varphi_1 + \bar{\psi}] \varphi_1^2 dx$$

类似于引理 4.3, 可以证明等式 (4.5) 和 (4.7) 仍成立. 又因为 $\tilde{u}_i \rightarrow \varphi_1, \phi_i \rightarrow \varphi_1, \psi_i \rightarrow \bar{\psi}$, 故

$$\lambda_1 \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|u_i\|_\infty}{a_i(1-q-k) - \lambda_1} \int_0^1 f_1'(z)[(1+c)\varphi_1 + \bar{\psi}] \varphi_1^2 dx = 0,$$

从而

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|u_i\|_\infty}{a_i(1-q-k) - \lambda_1} = 0 \quad \text{或者} \quad \int_0^1 f_1'(z)[(1+c)\varphi_1 + \bar{\psi}] \varphi_1^2 dx = 0.$$

下面证明 $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|u_i\|_\infty}{a_i(1-q-k) - \lambda_1} \neq 0$. 反设 $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|u_i\|_\infty}{a_i(1-q-k) - \lambda_1} = 0$, 则当 $i \rightarrow \infty$ 时有 $\frac{u_i}{a_i(1-q-k) - \lambda_1} \rightarrow 0$. 又因为 $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|u_i\|_\infty}{\|v_i\|_\infty} = \beta > 0$ (见引理 4.3 的证明), 因此 $i \rightarrow \infty$ 时有 $\frac{v_i}{a_i(1-q-k) - \lambda_1} \rightarrow 0$. 再在 (4.5) 两端取极限得 $\int_0^1 \frac{z}{k_1+z} \varphi_1^2 dx = 0$, 矛盾. 因此 $\int_0^1 f_1'(z)[(1+c)\varphi_1 + \bar{\psi}] \varphi_1^2 dx = 0$, 即 (4.12) 右端的第 1 项也趋于零.

最后计算第 4 项 $2b \int_0^1 \psi_i f_2(z - (1+c)u_i - v_i) e^{-c\mu_i u_i} c\mu_i \phi_i \psi_i^* dx$ 和第 7 项 $-b \int_0^1 v_i f_2(z - (1+c)u_i - v_i) e^{-c\mu_i u_i} (\mu_i c \phi_i)^2 \psi_i^* dx$ 的极限. 为此, 须进一步研究 $\mu_i \psi_i^*$ 的性质. 经计算得

$$\begin{aligned} \mu_i \psi_i^* &= K(a_i(1-q-k)\mu_i u_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i) \phi_i^*) \\ &\rightarrow \psi_0^* = \left(d \frac{d^2}{dx^2} + b f_2(z) e^{-c\alpha \varphi_1} \right)^{-1} (\lambda_1 \alpha \varphi_1^2 f_1'(z)) < 0. \end{aligned}$$

这里

$$K = \left(d \frac{d^2}{dx^2} + b(f_2(z - (1+c)u_i - v_i) - v_i f_2(z - (1+c)u_i - v_i)) e^{-c\mu_i u_i} - a_i q u_i f_1'(z - (1+c)u_i - v_i) \right)^{-1}.$$

因此 (4.12) 的右端趋于

$$H = bc \int_0^1 [2\bar{\psi} - c\chi_0 \varphi_1] f_2(z) e^{-c\alpha \varphi_1} \varphi_1 \psi_0^* dx.$$

由于

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \left(-d \frac{d^2}{dx^2} - b f_2(z) e^{-c\alpha \varphi_1} \right)^{-1} \left(\frac{\lambda_1 q}{1-q-k} f_1(z) \varphi_1 - bc\chi_0 f_2(z) e^{-c\alpha \varphi_1} \varphi_1 \right), \\ \chi_0 &= \left(-d \frac{d^2}{dx^2} - b f_2(z) e^{-c\alpha \varphi_1} \right)^{-1} \left(\frac{\lambda_1 q}{1-q-k} \alpha \varphi_1 f_1(z) \right) > 0, \end{aligned}$$

可见 $\alpha \bar{\psi} < \chi_0$. 根据条件 $c\alpha_0 \varphi_1 > 2$, 且 $\alpha > \alpha_0 > 0, \chi_0 > 0$, 则有

$$2\bar{\psi} - c\chi_0 \varphi_1 < \left(\frac{2}{\alpha} - c\varphi_1 \right) \chi_0 = \frac{1}{\alpha} (2 - c\alpha \varphi_1) \chi_0 < \frac{1}{\alpha} (2 - c\alpha_0 \varphi_1) \chi_0 < 0.$$

又因为 $\psi_0^* < 0$, 故 $H > 0$. 在 (4.12) 两端取极限得

$$2(1-q-k) \lim_{i \rightarrow \infty} \dot{\tau}_i(0) \|u_i\|_\infty \int_0^1 f_1(z) \varphi_1^2 dx = bc \int_0^1 [2\bar{\psi} - c\chi_0 \varphi_1] f_2(z) e^{-c\alpha \varphi_1} \varphi_1 \psi_0^* dx = H > 0,$$

又 $\|u_i\|_\infty \rightarrow 0$, 所以 $\dot{\tau}_i(0) \rightarrow +\infty$. 特别, 对于 i 充分大, 我们有 $\dot{\tau}_i(0) > 0$. $\square$

定理 4.2 的证明 取 $\epsilon > 0$ 充分小使得 $\epsilon < \min\{\epsilon_2, \epsilon_3\}$, 令 $M = \max\{M_2(\epsilon), M_3(\epsilon)\}$, 其中 $\epsilon_2, M_2(\epsilon)$ 由定理 4.1 给出, $\epsilon_3, M_3(\epsilon)$ 由引理 4.4 给出. 由定理 4.1 知, (EP) 正好存在两个正解, 如果 $a \in [\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$ 且 $\mu \geq M$. 固定 $\mu > M$, 定义

$$\underline{a} = \inf \left\{ a : a > \frac{\lambda_1}{1-q-k}, \text{ (EP) 至少存在一个正解} \right\}.$$

首先, 由定理 2.5 易见当 $\mu \rightarrow \infty$ 时 $\underline{a} \rightarrow \frac{\lambda_1}{1-q-k}$. 由紧性可知, 存在 $\underline{u} \geq 0, \underline{v} \geq 0$ 使得 $(\underline{u}, \underline{v})$ 为 (EP) 的解, 其中 $a = \underline{a}$. 类似于文献 [14] 的定理 2.2 可以证明 $\underline{u} > 0, \underline{v} > 0$, 因此 $(\underline{u}, \underline{v})$ 为 (EP) 的正解. 根据 $\underline{a}$ 的定义及隐函数定理知, $(\underline{u}, \underline{v})$ 为 (EP) 的退化正解. 利用引理 4.4 可得, (EP) 在点 $(\underline{a}, \underline{u}, \underline{v})$ 附近的正解形成曲线 Γ , 它经过点 $(\underline{a}, \underline{u}, \underline{v})$ 并转向 $\underline{a}$ 的右边. 引理 4.4 也说明 (EP) 在 Γ 上的所有正解除点 $(\underline{a}, \underline{u}, \underline{v})$ 外均非退化. 于是由隐函数定理, Γ 至少可延拓至 $a = \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2$. 再根据定理 4.1, Γ 包含 (EP) 的所有正解如果 $a \in [\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2]$. 下面证明对于 $a \in [\underline{a}, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon]$, (EP) 的所有正解也均在曲线 Γ 上. 若不然, 定义

$$\hat{a} = \inf \left\{ a : a \leq \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon, \text{ 且 (EP) 在 } \Gamma \text{ 之外有正解} \right\}.$$

同理可以证明存在 (EP) 的另一解曲线 $\hat{\Gamma}$, 它也可以延拓至 $a = \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2$. 而定理 4.1 表明必存在 $a \in (\underline{a}, \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon]$ 使得两曲线 Γ 和 $\hat{\Gamma}$ 相交, 这与 $\Gamma \setminus \{(\underline{a}, \underline{u}, \underline{v})\}$ 及其延拓分支上的正解必非退化矛盾. 因此关于 (EP) 正解个数的结论成立.

最后考察正解的稳定性. 令 T 如 T_i 所定义, 则类似于引理 4.4, 可以证明算子 T 存在 I 单重特征值 $\eta_0(T)$, 它沿 Γ 连续依赖于 (a, u, v) , 且 $\eta_0(T)$ 的符号决定了正解 (a, u, v) 的稳定性. 由于 $(\underline{a}, \underline{u}, \underline{v})$ 为 Γ 及其延拓分支上的唯一退化点, 因此仅在点 $(\underline{a}, \underline{u}, \underline{v})$ 处有 $\eta_0(T) = 0$. 由于在 $a = \frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon$ 时, Γ 上的两个正解分别是一个稳定, 另一个不稳定, 因此 $\eta_0(T)$ 在点 $(\underline{a}, \underline{u}, \underline{v})$ 变号, 从而稳定性的结论成立.

注 4.2 结合定理 2.5, 2.6, 4.1 及 4.2 可以证实当 $a \geq \frac{\hat{\lambda}_1}{(1-q-k)} - \epsilon_0$ 或者 a 靠近 $\frac{\lambda_1}{1-q-k}$ 时, 数值结果严格成立. 然而, 当 $a \in (\frac{\lambda_1}{1-q-k} + \epsilon_2, \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q-k} - \epsilon_0)$ 时, (EP) 正解的分歧曲线是否如图 1 所示还不清楚.

致谢 作者对审稿人提出的修改意见和建议表示衷心感谢.

参考文献

- 1 Lenski R E, Hattingh S. Coexistence of two competitors on one resource and one inhibitor: a chemostat model based on bacteria and antibiotics. *J Theoret Biol*, 1986, 122: 83-93
- 2 Hsu S B, Luo T K, Waltman P. Competition between plasmid-bearing and plasmid-free organisms in a chemostat with an inhibitor. *J Math Biol*, 1995, 34: 225-238
- 3 Hsu S B, Waltman P. Competition between plasmid-bearing and plasmid-free organisms in selective media. *Chem Engrg Sci*, 1997, 52: 23-35
- 4 Hsu S B, Waltman P. A survey of mathematical models of competition with an inhibitor. *Math Biosci*, 2004, 187: 53-97
- 5 Levin B R. Frequency-dependent selection in bacterial population. *Phil Trans R Soc Lond*, 1988, 319: 459-472
- 6 Stephanopoulos G, Lapidus G. Chemostat dynamics of plasmid-bearing plasmid-free mixed recombinant cultures. *Chem Engrg Sci*, 1988, 43: 49-57
- 7 Smith H L, Waltman P. *The Theory of the Chemostat*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995

- 8 Hsu S B, Waltman P. Analysis of a model of two competitors in a chemostat with an external inhibitor. *SIAM J Appl Math*, 1992, 52: 528–540
- 9 Nie H, Wu J H. A system of reaction-diffusion equations in the unstirred chemostat with an inhibitor. *Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg*, 2006, 16: 989–1009
- 10 Wu J H, Nie H, Wolkowicz G S K. A mathematical model of competition for two essential resources in the unstirred chemostat. *SIAM J Appl Math*, 2004, 65: 209–229
- 11 Wu J H, Wolkowicz G S K. A system of resource-based growth models with two resources in the un-stirred chemostat. *J Differential Equations*, 2001, 172: 300–332
- 12 Wu J H, Nie H, Wolkowicz G S K. The effect of inhibitor on the plasmid-bearing and plasmid-free chemostat model. *SIAM J Math Anal*, 2007, 38: 1860–1885
- 13 Chao L, Levin B R. Structured habitats and the evolution of anti-competitor toxins in bacteria. *Proc Nat Acad Sci*, 1981, 75: 6324–6328
- 14 Nie H, Wu J H, Jia Y F. Dynamical behavior on the plasmid-bearing and plasmid-free model in the unstirred chemostat. *Chinese Ann Math Ser A*, 2008, 29: 697–708
- 15 Du Y H, Lou Y. Some uniqueness and exact multiplicity results for a predator-prey model. *Trans Amer Math Soc*, 1997, 349: 2443–2475
- 16 Figueiredo D G, Gossez J P. Strict monotonicity of eigenvalues and unique continuation. *Comm Partial Differential Equations*, 1992, 17: 339–346
- 17 Hsu S B, Waltman P. On a system of reaction-diffusion equations arising from competition in an un-stirred chemostat. *SIAM J Appl Math*, 1993, 53: 1026–1044
- 18 Wu J H. Global bifurcation of coexistence state for the competition model in the chemostat. *Nonlinear Anal*, 2000, 39: 817–835
- 19 Kato T. *Perturbation Theory of Linear Operators*. Berlin: Springer, 1966
- 20 Crandall M G, Rabinowitz P H. Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability. *Arch Rational Mech Anal*, 1973, 52: 161–180

Exact multiplicity of coexistence solutions to the unstirred chemostat model with the plasmid and internal inhibitor

NIE Hua & WU JianHua

Abstract This paper deals with an unstirred chemostat model with the internal inhibitor in the context of competition between plasmid-bearing and plasmid-free organisms. Based on the further analysis of the bifurcation diagram of the second limit system, the multiple coexistence solutions of this model and their stability are established. Thus the exact shape of bifurcation curve of coexistence solutions to this model is determined when the parameters lie in a certain range, which gives analytic confirmation of some of the numerical results.

Keywords: chemostat, coexistence solution, perturbation theory, multiplicity

MSC(2000): 35B32, 35K57

doi: 10.1360/012010-734