具有一般跳过程的期权无差异效用价值过程的定价模型

王恺明^{①*}, 张徽燕^②, 刘继模^①

① 西南财经大学天府学院, 绵阳 100875;

② 电子科技大学经济与管理学院, 成都 100084

E-mail: wkm.6870@163.com, zhanghy@uestc.edu.cn, Liujm@tfsfwufe.edu.cn

收稿日期: 2014-06-03; 接受日期: 2014-11-05; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 71072082) 资助项目

摘要 本文采用指数效用最大化的方法研究了期权的动态无差异效用价值过程 $C_t(H; \alpha)$. 考虑股票价格过程为具有基于随机测度的一般跳的半鞅模型, 且期权的无差异效用价值过程的 Doob-Meyer 分解的鞅部分的 GKW (Galtchouk-Kunita-Watanabe) 分解满足 Jacod 鞅表示定理. 利用无差异效用价值过程在最小熵测度和最优投资策略下为鞅的事实构建了一个倒向随机微分方程. 通过概率测度变换将方程的鞅部分和生成元转化为 BMO (bounded mean oscillation) 鞅, 证明了该方程的解的唯一性. 并将方程的生成元分成 $[\Delta A = 0]$ 和 $[\Delta A \neq 0]$, 证明了最优投资策略存在. 从而给出期权无差异效用价值过程的倒向随机微分方程的表达形式.

关键词 指数效用无差异效用价值过程 一般跳过程 倒向随机微分方程 Jacod 鞅表示定理 BMO 鞅

MSC (2010) 主题分类 60H15, 91B25, 91G40

1 引言

本文在不完备市场下, 在一个有限时间 $[0, T]$ 内, 采用指数效用最大化的方法, 研究一个期权 $H \in L^\infty(\mathcal{F}_T, P)$ 的无差异效用价值过程的定价问题. 针对这个问题, 我们考虑在金融市场中期权的标的物 (股票) 为具有一般跳过程的半鞅, 其跳过程用随机测度来表示. 而具有一般跳的半鞅模型是能够用随机分析工具处理的最宽泛的框架. 因此, 本文的定价工作将在这个框架内展开.

对期权的定价, 在完备市场中, 人们可以用一个投资组合来对冲期权带来的风险. 通过等价鞅测度的变换, 该风险可以完全消除. 在这方面, Black 和 Scholes^[1] 作了开创性的贡献. 但是在不完备市场中, 由于等价鞅测度不是唯一的, 因此, 期权在这种情形下, 风险不能完全对冲掉, 人们只能采用使风险最小化的方法来给期权定价. 对于定价问题, 我们可以用效用函数来表示风险的对冲, 在期权定价中, 人们通常使用的效用函数有指数效用函数和二次效用函数.

指数效用最大化的期权定价, 其基本原理是投资者构建一个投资组合 $X(\vartheta)$, 来对冲期权带来的风险, 即 $H - X(\vartheta)$, 对此引入指数效用函数 $U(x) = -\exp(-\alpha x)$, 使效用最大化, 即

$$U(\vartheta) = \operatorname{esssup}_{\vartheta \in \mathcal{C}} E[\exp(H - X(\vartheta))]. \quad (1.1)$$

英文引用格式: Wang K M, Zhang H Y, Liu J M. Exponential utility indifference value process in a general jump model based on random measures (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1689–1704, doi: 10.1360/012015-32

在这方面有大量文献. Schachermayer^[2]、Biagini 和 Frittelli^[3,4] 采用对偶的方法研究了在一般半鞅框架下的期权定价策略. Hu 等人^[5] 在可许投资策略为凸集的条件下用倒向随机微分方程研究了 Brown 运动框架下的期权定价, Morlais^[6] 放宽了投资策略的假设条件, 用倒向随机微分方程的方法研究跳扩散过程的期权定价.

本文采用无差异指数效用最大化的方法来解决具有一般跳过程的期权定价. 对于给定的效用函数 $U(x)$ 和初始投资财富 x_t (在时刻 t), 我们定义一个无差异效用价值过程 $C_t(H, \alpha)$, 其满足

$$\operatorname{esssup}_{\vartheta \in \mathcal{A}} E[U(x_t + X_{t,T}(\vartheta)) | \mathcal{F}_t] = \operatorname{esssup}_{\vartheta \in \mathcal{A}} E[U(x_t + C_t(H, \alpha) + X_{t,T}(\vartheta) - H) | \mathcal{F}_t]. \quad (1.2)$$

就指数效用而言, 不区分用买入或者卖出期权. 我们主要研究期权的动态定价. 无差异效用定价首先由 Hodges 和 Neuberger^[7] 提出, 随后 Rouge 和 El-Karoui^[8] 针对 Brown 运动的情形, Musiela 和 Zariphopoulou^[9] 在 Markov 扩散情形下, 研究了期权的定价, Mania 和 Schweizer^[10] 针对连续半鞅的情形作了深入的研究. Becherer^[11] 采用倒向随机微分方程研究了期权的动态价值过程为跳扩散过程, 而期权标的物价格为 Brown 运动的定价模型. Xiong 和 Kohlmann^[12] 还将此方法应用于跳扩散过程的债券的定价. 王恺明等人^[13] 用倒向随机微分方程的方法研究了可违约未定权益的定价模型. 针对一般的半鞅模型, Frei 和 Schweizer^[14] 引入了期权的鞅表示定理, 在此基础上建立了倒向随机微分方程, 从而给出期权的定价.

在上述文献中采用的方法大都涉及倒向随机微分方程, 该方程最早是由 Bismut^[15] 提出, 随后由 Pardoux 和 Peng^[16] 用随机分析的工具解决了 BSDE (backward stochastic differential equation, 倒向随机微分方程) 解的存在性和唯一性. El-Karoui 和 Hamadène^[17] 认为它是处理随机控制问题的最佳工具.

无差异效用价值过程定价的文献, 大部分都是针对连续过程的情形, 或者是针对跳扩散过程. 这些方法在实际应用中都有一定的不足. 针对具有跳的一般半鞅模型, 文献 [2–4] 采用对偶的方法, 得到期权的最优定价策略, 但是要求可许投资策略集必须是凸集. 文献 [14] 采用最小熵鞅测度的密度过程和投资组合构建期权的鞅表示定理, 在满足一定条件下, 这个表示是一个倒向随机微分方程的解. 这个方法非常巧妙, 但是这个倒向随机微分方程的生成元在信息流连续时为零 (具体见文献 [14, 公式 (51)] 和 [10, 命题 13]). 而且这个期权的表示涉及最小熵鞅测度的密度过程, 文献 [14] 仅仅考虑了与股票价格 S 正交的鞅 L 具有跳过程, 而根本没有考虑股票价格 S 的跳. 我们知道在连续过程中, 最小熵鞅测度的密度过程相对简单, 但是一旦涉及股票价格 S 的跳, 情况就显得异常复杂, 尤其是具有一般跳的情形, 这个问题在随后还会专门指出.

因此在本文中, 采用倒向随机微分方程并结合无差异指数效用最大化的方法来解决具有基于随机测度的一般跳过程的半鞅期权定价, 我们不仅考虑了局部鞅 N 在 $\Delta S \neq 0$ 时的跳, 还考虑了 $\Delta S = 0$ 时, 局部鞅 N 的有限变差部分的跳. 就像 Jeanblanc 等人^[18] 用均值方差对冲方法处理具有一般跳过程的半鞅的期权定价模型. 本文采用的方法不需要给出最小熵鞅测度的具体结构, 给出的期权的最优定价策略更加直接具体, 对于 $[\Delta A \neq 0]$ 的情形, 我们甚至能够给出期权定价的封闭解, 这也是本文的创新之处.

本文的结构具体如下: 第 1 节是引言; 第 2 节为准备工作, 给出相应定义和一些必要准备; 第 3 节为本文的主体部分, 证明了期权的无差异效用价值过程是一个倒向随机微分方程的解, 证明了解的存在性和唯一性, 并给出期权定价的最优投资策略.

2 准备工作

首先从一个带流的概率空间 $(\Omega, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, P)$ 开始, 其中 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ 满足通常的条件, 即右连续和完备, 且 $\mathcal{F}_0$ 包含了 $\mathbb{F}$ 所有的零测集, 同时我们考虑有限时间 T . 在金融市场中, 通常存在无风险资产和风险资产. 无风险资产如短期国债和风险资产如股票等. 我们假定有 d 维可交易的风险资产, 其折现价格过程用 $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ 表示, 即通常所说的 d 维半鞅. 在本文中, 假定股票的价格过程 $S \in S_{\text{loc}}^2(P)$. 根据 [19, 定理 II.2.34] 有典则分解

$$S = S_0 + S^c + h * (\mu - \nu) + (x - h(x)) * \mu + B, \quad (2.1)$$

其中 S^c 是价格过程 S 的连续鞅部分, μ 是价格过程 S 跳的随机测度, ν 是随机测度 μ 的对偶投影测度, 有时也叫补偿测度, B 是具有有限变差的可选过程, $h(x) = xI_{\{|x| \leq 1\}}$ 为截断函数. 我们用 C 表示矩阵 $\langle S^c, S^c \rangle$, 于是有半鞅 S 的可选特征三元组 (B, C, ν) . 根据文献 [19, 命题 II.2.9], 存在一个可选增过程 A , 可选过程 $b = b_t(\omega)$ 和 $c = c_t(\omega)$ ($b_t(\omega)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的向量, $c_t(\omega)$ 为一个 $d \times d$ 的对称矩阵, $\forall (\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$), 一个可选核 $F_t(\omega, dx)$ 使得

$$B = b \cdot A, \quad C = c \cdot A, \quad \nu(\omega, dt, dx) = dA_t(\omega)F_t(\omega, dx), \quad (2.2)$$

其中如果将 A 选作一连续可选过程, 则价格过程 S 为一拟左连续 (quasi-left-continuous) 过程.

在集合 $\Omega \times [0, T]$ 上考虑由适应左连续过程产生的可选 σ 域 $\mathcal{P}$. 在 $\Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$ 上我们考虑 σ 域 $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \times (\mathbb{R}^d)$, 其中 $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ 是一个 $\mathbb{R}^d$ 中 Borel σ 域. 对每一个非负可选的函数 $W(\omega, s, x) \in \tilde{\mathcal{P}}$, 条件期望 $W' = M_\mu^P(W | \tilde{\mathcal{P}})$ 是唯一 M_μ^P -a.e. 可选函数, 使得对所有的非负 $\tilde{\mathcal{P}}$ 可选函数 $\tilde{Z}$ 有

$$M_\mu^P(W\tilde{Z}) = M_\mu^P(W'\tilde{Z}). \quad (2.3)$$

对于非负可选函数 W , 可以定义其可选投影

$$\widehat{W}_t := \int_{\mathbb{R}^d} W_t(x) \nu(\{t\}, dx) t \geq 0, \quad (2.4)$$

其取值在 $[0, +\infty]$. 如果 W 为 $\tilde{\mathcal{P}}$ 可选, 则 $\widehat{W}$ 可选且可表示为

$$\widehat{W} = {}^P(W(\Delta S)I_{\{\Delta S \neq 0\}}), \quad (2.5)$$

其中 ${}^P K$ 表示过程 K 的可选投影, 我们还有

$$a_t := \widehat{1}_t = \nu(\{t\}, \mathbb{R}^d) = {}^P(I_{\{\Delta S \neq 0\}})_t, \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

至于未给出详细定义的符号和解释, 可以参见文献 [19] 以及何声武等人 [20] 的《半鞅与随机分析》.

对于一个期权, 投资者为了消除其风险, 可以用一个投资组合来对冲风险. 因此投资者需要构建自己的投资组合, 其中的投资策略 $\vartheta = (\vartheta_t)_{0 \leq t \leq T}$, 对该投资策略在满足一定条件下为自筹资策略. 由此我们给出其定义.

假设 2.1 如果存在一个 $\mathbb{R}^d$ 值可选过程 ϑ , 取值于一紧集族 $\mathcal{C}$, 使得 $\int \vartheta dS$ 定义完整, 且

$$X_{0,t}(\vartheta) = x + \int_0^t \vartheta_u dS_u, \quad (2.7)$$

为一局部均方可积半鞅空间 $\mathcal{S}^2(P)$, 则 ϑ 为自筹资策略, $X(\vartheta)$ 称为投资者的财富过程.

由于本文考虑的是期权的动态定价, 因此, 我们还需引入投资策略的可许投资策略集

$$\mathcal{A} = \mathcal{C}_{t,T}(\vartheta) = \{\vartheta \in \mathcal{C} \mid \vartheta = 0 \text{ 在 } \llbracket 0, t \rrbracket\}, \quad (2.8)$$

在应用指数效用的期权的定价中, 需要考虑市场套利问题. 市场应该是无套利的, 因此存在等价鞅测度, 由于考虑的市场是不完备的, 等价鞅测度是不唯一的, 需要在最小熵鞅测度下来研究定价. 在此首先给出最小熵鞅测度的定义.

定义 2.2 令概率测度 Q 与测度 P 绝对连续, 其密度过程为 $Z = \frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_T}$, 则相对熵 $H(Q|P)$ 为

$$\begin{cases} H(Q|P) = E\left(\frac{dQ}{dP} \ln \frac{dQ}{dP}\right), & \text{如果 } Q \ll P, \\ H(Q|P) = +\infty, & \text{否则.} \end{cases} \quad (2.9)$$

最小熵鞅测度 Q^* 就是下述最优化问题的解

$$\inf_{Q \in \mathbb{P}_{e,l}} H(Q|P) = H(Q^*|P). \quad (2.10)$$

相对熵, 有时也叫 Kullback-Leibler 过程或者 Entropy-Hellinger 过程, 其中

$$\mathbb{P}_e := \{Q \sim P \mid S \text{ 为一 } Q \text{ 局部鞅}\}, \quad \mathbb{P}_{e,l} := \{Q \in \mathbb{P}_e \mid H(Q|P) < \infty\}. \quad (2.11)$$

对于最小熵鞅测度 Q^* 有很多学者对其作了深入研究, 当股票的价格过程 S 是连续过程时 Q^* 存在, 且其密度过程的结构相对简单, 但是当 S 和密度过程 $Z = \mathcal{E}(N)$ 中的 N 同时存在跳时, 尤其是具有一般跳过程, 问题变得非常复杂. Choulli 和 Schweizer^[21] 考虑了 S 为单跳过程时, 在 $\mathcal{D}_{e,\sigma}^{L \log L}(S, P) \neq \emptyset$ 的条件下, 指出 Q^* 存在, 具体可参见文献 [21, 定理 1]. Choulli 和 Stricker^[22] 采用距离最小化的方法研究了具有一般跳过程的半鞅的最小熵鞅测度, 给出该测度的具体结构, 在该文中他们将其叫作最小熵-Hellinger 鞅测度, 具体可参见其定理 2.3.

在期权定价中, 涉及鞅的表示问题, 我们需引入一个局部鞅表示定理.

定理 2.3 令 S 为一 $\mathbb{R}^d$ 值半鞅, 每个零初值局部鞅 N 可以表示为

$$N = \eta \cdot S^c + \Lambda * (\mu - \nu) + \Upsilon * \mu + N', \quad (2.12)$$

其中 η 为可料且 S^c 可积的 $\mathbb{R}^d$ 值过程, $\eta \in L_{\text{loc}}^2(S^c)$, 函数 $\Lambda \in \mathcal{G}_{\text{loc}}^2(\mu)$ (意味着 Λ 为 $\tilde{\mathcal{P}}$ 可测, 且 $(\sum_{0 < s \leq \cdot} (\tilde{\Lambda}_s)^2)^{1/2}$ 局部可积), 函数 $\Upsilon \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2(\mu)$ (意味着 $M_\mu^P(\Upsilon | \tilde{\mathcal{P}}) = 0$, 且 $(\Upsilon^2 * \mu)^{1/2}$ 局部可积). N' 为零初值局部鞅, 满足 $[S, N'] = 0$. 当 $\Delta N > 0$ 时, 有

$$\Lambda > -1, \quad \Lambda + \Upsilon > 0, \quad (2.13)$$

函数 Λ 可以表示为

$$\Lambda = K + \frac{\hat{K}}{1-a} I_{\{a < 1\}}, \quad (2.14)$$

其中 K 具有一个较好的值得 $\{a_t = 1\} \subset \{\hat{K} = 0\}$.

局部鞅 N 的上述分解叫作 Jacod 分解, 对于该分解的详细论述, 具体的证明可参见文献 [21, 23]. 要使市场不存在套利机会, 则应该使价格过程在该测度下为局部鞅. 因此有如下引理.

引理 2.4 令 $Z = \mathcal{E}(N)$ 为一个非负局部鞅, N 满足定理 2.3, 且 $1 + \Delta N > 0$, 则 ZS 为一局部鞅, 当且仅当 $(x - h(x) + x(\Lambda + \Upsilon)) * \mu$ 为一局部可积过程, 且

$$b \cdot A + c\eta \cdot A + (x - h(x) + x\Lambda) * \nu = 0. \quad (2.15)$$

引理 2.4 的证明参见文献 [21, 引理 2.8] 和 [22, 引理 3.1].

在最小熵鞅测度 Q^* 下, 风险资产的价格过程则可以表示为

$$S = S_0 + x * (\mu - \nu^*) + S^{c,*}. \quad (2.16)$$

接下来考虑指数效用函数, 它具有如下形式:

$$U(x) = -\exp(-\alpha x), \quad (2.17)$$

其中 $\alpha \in (0, \infty)$ 为风险厌恶系数. 对于期权 H , H 为 $\mathbb{R}$ 值有界 $\mathcal{F}_T$ 可测随机变量, $H \in L^\infty(\mathcal{F}_T, P)$. 对期权 H 的定价, 采用指数效用无差异方法来解决这个问题. 在给定指数效用函数和初始投资资金 x_t 时, 我们用一个有界的右连左极 (RCLL) 的半鞅 $C_t(H; \alpha)$ 来表示未定权益的价值, 它满足

$$\operatorname{esssup}_{\vartheta \in \mathcal{A}} E[U(x_t + X_{t,T}(\vartheta)) \mid \mathcal{F}_t] = \operatorname{esssup}_{\vartheta \in \mathcal{A}} E[U(x_t + C_t(H; \alpha) + X_{t,T}(\vartheta) - H) \mid \mathcal{F}_t]. \quad (2.18)$$

对指数效用无差异价值过程 $C_t(H; \alpha)$, 我们有如下命题.

命题 2.5 无差异指数效用价值过程 $C_t(H; \alpha)$, 可以表示为

$$C_t(H; \alpha) = \frac{1}{\alpha} \ln \operatorname{essinf}_{\vartheta \in \mathcal{A}} E_{Q^*}[e^{\alpha(H - X_{t,T}(\vartheta))} \mid \mathcal{F}_t], \quad (2.19)$$

这表明 $e^{C_t(H; \alpha)}$ 是下面随机最优控制的动态价值过程,

$$\operatorname{minimize} E_{Q^*}[e^{\alpha(H - X_T(\vartheta))}]. \quad (2.20)$$

证明 命题 2.5 的证明过程参见文献 [10, 命题 3]. $\square$

3 无差异价值过程的倒向随机微分方程

为解决期权定价问题, 我们在此引入一个倒向随机微分方程

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 + \int_t^T 1^{\text{tr}} df\left(t, \beta, U, \frac{\widehat{U}}{1-a}, V, L\right) + \beta \cdot S^{c,*} + W * (\mu - \nu^*) + V * \mu + L, \\ Y_T = H, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $1^{\text{tr}} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$, $\beta \in L_{\text{loc}}^2(S^{c,*})$, W 为有界函数, 且 $W \in \mathcal{G}_{\text{loc}}^2(\mu)$, V 为有界函数, 且 $V \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2(\mu)$, $L \in \mathcal{M}_{0,\text{loc}}^2(Q^*)$ 有界, 且与 $S^{c,*}$ 和随机积分空间 $\{\overline{W} * (\mu - \nu^*) \mid \overline{W} \in \mathcal{G}_{\text{loc}}^2(\mu)\}$ 强正交, 而且 W 可以表示成 $W = U + \frac{\widehat{U}}{1-a_s}$, 方程的有界解为 $(Y, \beta, U, \frac{\widehat{U}}{1-a}, V, L)$, $f(t, \beta, U, \frac{\widehat{U}}{1-a}, V, L)$ 为方程的生成元, 具有如下形式:

$$f\left(t, \beta, U, \frac{\widehat{U}}{1-a}, V, L\right) := \operatorname{essinf}_{\vartheta \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{\alpha}{2} (\beta - \vartheta)^{\text{tr}} c(\beta - \vartheta) \cdot A_t + \frac{\alpha}{2} \cdot \langle L^c \rangle_t \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{M_\mu^P(e^V | \tilde{\mathcal{P}})e^{\alpha(U-\vartheta x)} - \alpha(U - \vartheta x) - 1}{\alpha} \right) * \nu_t^* \\
& + \sum_{0 < s \leq t} \frac{(e^{\alpha(\Delta L_s - \frac{\hat{U}_s}{1-a_s})} - \alpha(\Delta L_s - \frac{\hat{U}_s}{1-a_s}) - 1)^P (1 - a_s)}{\alpha}, \quad (3.2)
\end{aligned}$$

在 (3.2) 中 K^P 表示过程 K 的可料对偶投影.

下面的工作主要是要证明期权的无差异价值过程 $C_t(H; \alpha)$ 即是方程 (3.1) 的解. 为此需要证明方程解的存在性和唯一性. 由于方程的生成元不满足 Lipschitz 条件, 我们需要对方程的生成元做相应的处理.

针对生成元的增量变化, 引入相应的过程 (在此假定 $\frac{0}{0} = 0$),

$$\lambda(\beta^1, \beta^2) := \begin{cases} \frac{f(t, \beta^1, U^1, \widehat{U}^1, V^1, L^1) - f(t, \beta^2, U^1, \widehat{U}^1, V^1, L^1)}{\beta^1 - \beta^2}, & \text{如果 } \beta^1 \neq \beta^2, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\gamma(U^1, U^2) := \begin{cases} \operatorname{essinf}_{\vartheta \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{M_\mu^P(e^{\alpha V^1} | \tilde{\mathcal{P}})e^{\alpha(U^1 - \vartheta x)} - M_\mu^P(e^{\alpha V^1} | \tilde{\mathcal{P}})e^{\alpha(U^2 - \vartheta x)}}{(U^1 - U^2)} - \alpha \right\}, & 1_{U^1 \leq U^2}, \\ \operatorname{esssup}_{\vartheta \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{M_\mu^P(e^{\alpha V^1} | \tilde{\mathcal{P}})e^{\alpha(U^1 - \vartheta x)} - M_\mu^P(e^{\alpha V^1} | \tilde{\mathcal{P}})e^{\alpha(U^2 - \vartheta x)}}{(U^1 - U^2)} - \alpha \right\}, & 1_{U^1 > U^2}, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\chi(V^1, V^2) := \begin{cases} \frac{e^{\alpha U^2} M_\mu^P(e^{\alpha V^1} | \tilde{\mathcal{P}}) - e^{\alpha U^2} M_\mu^P(e^{\alpha V^2} | \tilde{\mathcal{P}})}{V^1 - V^2} (1 - a), & \text{如果 } V^1 \neq V^2, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\rho(L^{1,c}, L^{2,c}) := \frac{\alpha}{2} (L^{1,c} + L^{2,c}), \quad (3.6)$$

$$\varphi(\Delta L^{1,d}, \Delta L^{2,d}) := \begin{cases} \sum \left\{ \frac{e^{\alpha \frac{\widehat{U}^2}{1-a}} (e^{\alpha \Delta L^{1,d}} - e^{\alpha \Delta L^{2,d}})}{\alpha} (1 - a) \right\}^P ((\Delta L^{1,d}) - (\Delta L^{2,d})), \\ \text{如果 } \Delta L^{1,d} \neq \Delta L^{2,d}, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (3.7)$$

对上述过程, 我们做相应的假设.

假设 3.1 (1) 对任意 $\mathbb{R}^d$ 值过程 $\beta \in L_{\text{loc}}^2(S^{c,*})$, 有界函数 $U \in \mathcal{G}_{\text{loc}}^2(\mu)$, 有界函数 $V \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2(\mu)$, 有界零初值鞅 L , 且满足 $[L, S] = 0$, 有

$$\begin{aligned}
0 \leq f\left(t, \beta, U, \frac{\widehat{U}}{1-a}, V, L\right) & \leq \frac{\alpha}{2} \beta^{\text{tr}} c \beta \cdot A_t + \frac{\alpha}{2} \cdot \langle L^c \rangle_t + \left(\frac{M_\mu^P(e^V | \tilde{\mathcal{P}})e^{\alpha U} - \alpha U - 1}{\alpha} \right) * \nu_t^* \\
& + \sum_{0 < s \leq t} \frac{(e^{\alpha(\Delta L_s - \frac{\widehat{U}_s}{1-a_s})} - \alpha(\Delta L_s - \frac{\widehat{U}_s}{1-a_s}) - 1)^P (1 - a_s)}{\alpha}; \quad (3.8)
\end{aligned}$$

(2) 存在常数 $C_1 > 0$, $\kappa \in \text{BMO}[S^{c,*}]$, 对任意 $\beta^1, \beta^2 \in \mathbb{R}^d$, 有

$$\lambda(\beta^1, \beta^2) \leq C_1 (\kappa + |\beta^1| + |\beta^2|) (|\beta^1 - \beta^2|); \quad (3.9)$$

(3) 对任意有界函数 $U^1, U^2 \in \mathcal{G}_{\text{loc}}^2(\mu)$, 有

$$f(t, \beta^2, U^1, \widehat{U^1}, V^1, L^1) - f(t, \beta^2, U^2, \widehat{U^2}, V^1, L^1) \leq \gamma(U^1, U^2)(U^1 - U^2) * \nu_t; \quad (3.10)$$

(4) 对任意有界函数 $U^1, U^2 \in \mathcal{G}_{\text{loc}}^2(\mu)$, 有

$$f(t, \beta^2, U^2, \widehat{U^1}, V^1, L^1) - f(t, \beta^2, U^2, \widehat{U^2}, V^1, L^1) \leq \phi(\widehat{U^1}, \widehat{U^2}) \left(\frac{\widehat{U^1}}{1-a} - \frac{\widehat{U^2}}{1-a} \right); \quad (3.11)$$

(5) 对任意有界函数 $V^1, V^2 \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2(\mu)$, 有

$$f(t, \beta^2, U^2, \widehat{U^2}, V^1, L^1) - f(t, \beta^2, U^2, \widehat{U^2}, V^2, L^1) \leq \chi(V^1, V^2)(V^1 - V^2); \quad (3.12)$$

(6) 对任意有界零初值鞅 L^1, L^2 且满足 $[L^1, S] = [L^2, S] = 0$, 有

$$f(t, \beta^2, U^2, \widehat{U^2}, V^2, L^1) - f(t, \beta^2, U^2, \widehat{U^2}, V^2, L^2) \leq \varphi(\Delta L^{1,d}, \Delta L^{2,c})(\Delta L^{1,d} - \Delta L^{2,d}). \quad (3.13)$$

上述假设的合理性在于针对期权定价, 期权的无差异价值过程 $C(H; \alpha)$ 是有界的, 具体可参见文献 [10, 命题 4].

为证明方程解的唯一性, 还需证明方程的鞅部分均为 BMO 鞅, 我们有引理 3.2.

引理 3.2 对于生成元 f 满足上述条件, 对方程 (3.1) 的解 $(Y, \beta, U, \frac{\widehat{U}}{1-a}, V, L)$ 有

- (1) 存在常数 C_2 和 C_3 , 使得 $C_2 \leq |Y|_t \leq C_3$;
- (2) $\int_0^t \beta_s dS_s^{c,*}, W * (\mu - \nu^*)_t, V * \mu_t, L$ 均为 BMO 鞅.

证明 令 τ 为任意停时, 对 $e^{\alpha Y_t}$ 用 Itô 公式, 有

$$\begin{aligned} de^{\alpha Y} &= \alpha e^{\alpha Y_-} dY + \frac{\alpha^2}{2} e^{\alpha Y_-} d\langle Y^c \rangle + e^{\alpha Y_-} (e^{\alpha \Delta Y} - \alpha \Delta Y - 1) \\ &= \alpha e^{\alpha Y_{t-}} \{ df + \beta_t dS_t^{c,*} + W(\mu - \nu^*)(dt, dx) + V\mu(dt, dx) + dL_t \} \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{2} \beta_t^{\text{tr}} c_t \beta_t dA_t + \frac{\alpha^2}{2} d\langle L^c \rangle_t + e^{\alpha Y_{t-}} (e^{\alpha(U+V)} - \alpha(U+V) - 1) \mu(dt, dx) \\ &\quad + e^{\alpha Y_{t-}} d \left(\sum_{0 < s \leq t} \left(e^{\alpha(\Delta L_s - \frac{\widehat{U}_s}{1-a_s})} - \alpha \left(\Delta L_s - \frac{\widehat{U}_s}{1-a_s} \right) - 1 \right) \right), \end{aligned}$$

对上式在 $[\tau, T]$ 之间积分, 并取条件期望有

$$\begin{aligned} E_{Q^*}[e^{\alpha Y_\tau} - e^{\alpha Y_T} | \mathcal{F}_\tau] &= E_{Q^*} \left[\int_\tau^T d(Q^* \text{ 局部鞅}) \mid \mathcal{F}_\tau \right] \\ &\quad + E_{Q^*} \left[\int_\tau^T \alpha e^{\alpha Y_-} d \left\{ f - \frac{\alpha}{2} \beta^{\text{tr}} c \beta \cdot A_T + \frac{\alpha}{2} \langle L^c \rangle_T \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha e^{\alpha Y_-} M_\mu^P \left(\left(\frac{e^{\alpha(U+V)} - \alpha(U+V) - 1}{\alpha} \right) \mid \tilde{\mathcal{P}} \right) * \nu_T^* \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\tau < s \leq T} \alpha e^{\alpha Y_-} \left(\frac{(e^{\alpha(\Delta L_s - \frac{\widehat{U}_s}{1-a_s})} - \alpha(\Delta L_s - \frac{\widehat{U}_s}{1-a_s}) - 1)^P (1-a_s)}{\alpha} \right) \right\} \mid \mathcal{F}_\tau \right], \end{aligned}$$

对上式用局部化程序, 即存在一个停时列 τ_n 平稳收敛到 T , 当 $n \nearrow \infty$ 时, 使得对每一个局部鞅 m , $(m)^{\tau_n}$ 为零初值一致可积鞅, 由上式和 Lebesgue 控制收敛定理, 可知第一项为 0, 又由假设 3.1 可知,

$$E[e^{\alpha Y_\tau} - e^{\alpha Y_T} | \mathcal{F}_\tau] \leq 0,$$

从而有

$$e^{\alpha Y_\tau} \leq E_{Q^*}[e^{\alpha B} | \mathcal{F}_\tau] \leq e^{\alpha \|H\|_\infty},$$

取 $C_3 = \|H\|_\infty$, 则有 $Y_t \leq C_3$.

对 Y_t 积分有

$$Y_t = Y_T + \int_t^T df - W * (\mu - \nu)_t + V * \mu_t + \int_t^T dL_s,$$

由于生成元 f 非负, 从而有

$$E_{Q^*}[e^{\alpha Y_t} | \mathcal{F}_t] \geq -\alpha \|H\|,$$

取 $C_2 = -\|H\|$, 结论 (1) 可得.

为证结论 (2), 我们对 Y^2 应用 Itô 公式, 并积分, 有

$$\begin{aligned} Y_T^2 - Y_\tau^2 &= 2 \int_\tau^T Y_{s-} df + 2 \int_\tau^T Y_{s-} \beta_s dS_s^{c,*} + 2 \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^d} W Y_{s-} (\mu - \nu)(ds, dx) \\ &\quad + 2 \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^d} Y_{s-} V \mu(ds, dx) + 2 \int_\tau^T Y_{s-} dL_s + \int_\tau^T Y_{s-}^2 d\langle Y^c \rangle_s \\ &\quad + \int_\tau^T Y_{s-}^2 \beta_s^{\text{tr}} c_s \beta_s dA_s + (U + V)^2 * \mu_T + \sum_{\tau < s \leq T} \left(\Delta L_s - \frac{\hat{U}_s}{1 - a_s} \right)^2 \\ &\geq + 2 \int_\tau^T Y_{s-} \beta_s dS_s^{c,*} + 2 \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^d} W Y_{s-} (\mu - \nu)(ds, dx) + 2 \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^d} Y_{s-} V \mu(dt, dx) \\ &\quad + 2 \int_\tau^T Y_{s-} dL_s + \int_\tau^T Y_{s-}^2 d\langle Y^c \rangle_s + \int_\tau^T Y_{s-}^2 d\langle \beta \cdot S^{c,*} \rangle_s + \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^d} U^2 \mu(ds, dx) \\ &\quad + \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^d} V^2 \mu(ds, dx) + \sum_{\tau < s \leq T} (\Delta L_s)^2 - 2 \Delta L_s \frac{\hat{U}_s}{1 - a_s} + \left(\frac{\hat{U}_s}{1 - a_s} \right)^2, \end{aligned}$$

两端取条件期望, 并应用上述证明中类似的局部化程序有

$$\begin{aligned} E_{Q^*} \left\{ \int_\tau^T Y_{s-}^2 d\langle \beta \cdot S^{c,*} \rangle_s \middle| \mathcal{F}_\tau \right\} &+ E_{Q^*} \left\{ \int_\tau^T Y_{s-}^2 d\langle L^c \rangle_s \middle| \mathcal{F}_\tau \right\} + E_{Q^*} \left\{ \int_\tau^T d[W * (\mu - \nu)]_s \middle| \mathcal{F}_\tau \right\} \\ &+ E_{Q^*} \left\{ d \int_\tau^T [V * \mu]_s \middle| \mathcal{F}_\tau \right\} + E_{Q^*} \left\{ \int_\tau^T d[L^d]_s \middle| \mathcal{F}_\tau \right\} \leq E_{Q^*} \{ Y_T^2 - Y_\tau^2 | \mathcal{F}_\tau \}. \end{aligned}$$

由 Y 的有界性可知存在常数 C_4 使得

$$\begin{aligned} E_{Q^*} \left\{ \int_\tau^T Y_{s-}^2 d\langle \beta \cdot S^{c,*} \rangle_s \middle| \mathcal{F}_\tau \right\} &+ E_{Q^*} \left\{ \int_\tau^T Y_{s-}^2 d\langle L^c \rangle_s \middle| \mathcal{F}_\tau \right\} + E_{Q^*} \left\{ \int_\tau^T d[W * (\mu - \nu)]_s \middle| \mathcal{F}_\tau \right\} \\ &+ E_{Q^*} \left\{ \int_\tau^T d[V * \mu]_s \middle| \mathcal{F}_\tau \right\} + E_{Q^*} \left\{ \int_\tau^T d[L^d]_s \middle| \mathcal{F}_\tau \right\} \leq C_4. \end{aligned}$$

由文献 [20, 定理 10.9] 可知,

$$\int_0^t \beta_s dS_s^{c,*}, W * (\mu - \nu)_t, V * \mu_t, L \text{ 均为 BMO 鞅.}$$

由此引理得证. □

在方程满足上述条件之后, 可以证明方程存在唯一解, 由此我们先给出引理 3.3.

引理 3.3 假设方程有两个解, 且满足假设 3.1, 则有

(1) $\gamma * \nu^* + \phi(1-a)$ 是 $[1 * (\mu - \nu^*), (\gamma + \phi) * (\mu - \nu^*)]$ 的补偿子, 即

$$\langle 1 * (\mu - \nu^*), (\gamma + \phi) * (\mu - \nu^*) \rangle = \gamma * \nu^* + \phi(1-a); \quad (3.14)$$

(2) $\frac{e^{\alpha U^2} M_\mu^P(e^{\alpha V^1} | \tilde{\mathcal{P}}) - e^{\alpha U^2} M_\mu^P(e^{\alpha V^2} | \tilde{\mathcal{P}})}{\alpha}$ 是 $[(V^1 - V^2) * \mu, \chi(V^1, V^2) * (\mu - \nu^*)]$ 的补偿子, 即

$$\langle (V^1 - V^2) * \mu, \chi(V^1, V^2) * (\mu - \nu^*) \rangle = \frac{e^{\alpha U^2} M_\mu^P(e^{\alpha V^1} | \tilde{\mathcal{P}}) - e^{\alpha U^2} M_\mu^P(e^{\alpha V^2} | \tilde{\mathcal{P}})}{\alpha}; \quad (3.15)$$

(3) $\frac{e^{\alpha \frac{\widehat{U}^2}{1-a}} (e^{\alpha \Delta L^{1,d}} - e^{\alpha \Delta L^{2,d}})}{\alpha}$ 是 $[(\Delta L^{1,d} - \Delta L^{2,d}), \varphi(\Delta L^{1,d}, \Delta L^{2,d})]$ 的补偿子, 即

$$\langle (\Delta L^{1,d} - \Delta L^{2,d}), \varphi(\Delta L^{1,d}, \Delta L^{2,d}) \rangle = \frac{e^{\alpha \frac{\widehat{U}^2}{1-a}} (e^{\alpha \Delta L^{1,d}} - e^{\alpha \Delta L^{2,d}})}{\alpha}. \quad (3.16)$$

引理 3.3 的证明放在附录里, 接下来我们证明方程解的唯一性. 由此有定理 3.4.

定理 3.4 假定方程 (3.1) 的生成元 $f(t, \beta, U, \frac{\widehat{U}}{1-a}, V, L)$ 满足引理 3.3, 方程的解存在, 则方程有唯一解.

证明 假定方程有解 $(Y^i, \beta^i, U^i, \frac{\widehat{U}^i}{1-a}, V^i, L^i)$, $i = 1, 2$. 令

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= Y^1 - Y^2, \quad \bar{\beta} = \beta^1 - \beta^2, \quad \bar{U} = U^1 - U^2, \\ \bar{V} &= V^1 - V^2, \quad \bar{L} = L^1 - L^2, \quad \frac{\widehat{\bar{U}}}{1-a} = \frac{\widehat{U}^1}{1-a} - \frac{\widehat{U}^2}{1-a}, \end{aligned}$$

令 τ 为任意停时, 对 $\bar{Y}$ 用 Itô 公式并积分有

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{t \wedge \tau} - \bar{Y}_\tau &= \int_{t \wedge \tau}^\tau 1^{\text{tr}} d \left(f \left(u, \beta^1, U^1, \frac{\widehat{U}^1}{1-a}, V^1, L^1 \right) - f \left(u, \beta^2, U^2, \frac{\widehat{U}^2}{1-a}, V^2, L^2 \right) \right) - \bar{\beta} \cdot S_t^{c,*} \\ &\quad + \bar{U} * (\mu - \nu^*)_t + \bar{V} * \mu_t + \bar{L}_t. \end{aligned}$$

而生成元 $f(t, \beta, U, \frac{\widehat{U}}{1-a}, V, L)$ 可以写成

$$\begin{aligned} &f \left(t, \beta^1, U^1, \frac{\widehat{U}^1}{1-a}, V^1, L^1 \right) - f \left(t, \beta^2, U^2, \frac{\widehat{U}^1}{1-a}, V^2, L^2 \right) \\ &= f \left(t, \beta^1, U^1, \frac{\widehat{U}^1}{1-a}, V^1, L^1 \right) - f \left(t, \beta^2, U^1, \frac{\widehat{U}^1}{1-a}, V^1, L^1 \right) + f \left(t, \beta^2, U^1, \frac{\widehat{U}^1}{1-a}, V^1, L^1 \right) \\ &\quad - f \left(t, \beta^2, U^2, \frac{\widehat{U}^1}{1-a}, V^1, L^1 \right) + f \left(t, \beta^2, U^2, \frac{\widehat{U}^1}{1-a}, V^1, L^1 \right) - f \left(t, \beta^2, U^2, \frac{\widehat{U}^2}{1-a}, V^1, L^1 \right) \\ &\quad + f \left(t, \beta^2, U^2, \frac{\widehat{U}^2}{1-a}, V^1, L^1 \right) - f \left(t, \beta^2, U^2, \frac{\widehat{U}^2}{1-a}, V^2, L^1 \right) + f \left(t, \beta^2, U^2, \frac{\widehat{U}^2}{1-a}, V^2, L^1 \right) \\ &\quad - f \left(t, \beta^2, U^2, \frac{\widehat{U}^2}{1-a}, V^2, L^2 \right). \end{aligned}$$

由引理 3.3, 方程可以改写成

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{t \wedge \tau} - \bar{Y}_\tau &= \int_t^{t \wedge \tau} \bar{\beta} dS_s^{c,*} - \int_t^{t \wedge \tau} \lambda(\beta_1, \beta_2) \bar{\beta} dA_s \\ &\quad + \int_t^{t \wedge \tau} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{W}(\mu - \nu^*)(ds, dx) - \int_t^{t \wedge \tau} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{W}(\gamma(U^1, U^2) + \phi(\widehat{U}^1, \widehat{U}^2)) \nu^*(ds, dx) \\ &\quad + \int_t^{t \wedge \tau} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{V} \mu(ds, dx) - \int_t^{t \wedge \tau} \int_{\mathbb{R}^d} \chi(V^1, V^2) \bar{V} \nu^*(ds, dx) \\ &\quad + \int_t^{t \wedge \tau} d\bar{L}_s^c - \int_t^{t \wedge \tau} d\langle \bar{L}^c, \rho(L^{1,c}, L^{2,c}) \rangle_s + \int_t^{t \wedge \tau} d\bar{L}_s^d - \int_t^{t \wedge \tau} d\langle \bar{L}^d, \varphi(\Delta L^{1,d}, \Delta L^{2,d}) \rangle_s,\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}M_1 &:= \lambda \cdot S^{c,*}, \quad M_2 := (\gamma + \phi) * (\mu - \nu^*), \quad M_3 := \chi * \mu, \quad M_4 := \rho, \quad M_5 := \varphi, \\ M &:= M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5.\end{aligned}$$

由此可以定义

$$\bar{\nu}^* := (1 + \gamma + \phi) \cdot \nu^*.$$

由随机测度的 Girsanov 定理可知,

$$\Gamma * (\mu - \bar{\nu}^*), \quad \Gamma \in \mathcal{G}_{\text{loc}}^2(\mu)$$

为 Q^* 局部鞅. 我们定义一个测度 $\bar{Q}^*$, $d\bar{Q}^* := \mathcal{E}(M)_T dQ^*$. 由假设 3.1 可知, M_i , $i = 1, \dots, 5$ 均为 BMO 鞅, 由 Kazamaki [24] 的引理可知, $\bar{Q}^*$ 为一概率测度, 令

$$\begin{aligned}(S^{c,*})^\lambda &= S^{c,*} - \lambda \cdot A, \\ \bar{W}^{\gamma, \phi} &= \bar{W} * (\mu - \nu^*) - \langle \bar{W} * (\mu - \nu^*), (\gamma + \phi) * (\mu - \nu^*) \rangle, \\ \bar{V}^\chi &= \bar{V} * \mu - \langle \bar{V} * \mu, \chi * (\mu - \nu^*) \rangle, \\ (\bar{L}^c)^\rho &= \bar{L}^c - \langle \bar{L}^c, \rho \rangle, \\ (\bar{L}^d)^\varphi &= \bar{L}^d - \langle \bar{L}^d, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

方程可以改写为

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{t \wedge \tau} - \bar{Y}_\tau &= \int_t^{t \wedge \tau} \bar{\beta} d(S_s^{c,*})^\lambda + \int_t^{t \wedge \tau} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{W}^{\gamma, \phi}(\mu - \bar{\nu}^*)(ds, dx) + \int_t^{t \wedge \tau} \int_{\mathbb{R}^d} (\bar{V})^\chi \mu(ds, dx) \\ &\quad + \int_t^{t \wedge \tau} d(\bar{L}_s^c)^\rho + \int_t^{t \wedge \tau} d(\bar{L}_s^d)^\varphi,\end{aligned}$$

而

$$\bar{\beta} \cdot (S^{c,*})^\lambda, \quad \bar{W}^{\gamma, \phi} * (\mu - \bar{\nu}^*), \quad (\bar{V})^\chi, \quad (\bar{L}^c)^\rho, \quad (\bar{L}^d)^\varphi$$

均为 $\bar{Q}^*$ 局部鞅, 应用局部化程序, 有

$$\bar{Y}_t \leq E_{\bar{Q}^*}[\bar{Y}_T \mid \mathcal{F}_t],$$

由于 $Y_T^1 = Y_T^2 = H$, 可知 $\bar{Y}_t \leq 0$, $\bar{Q}^*$ a.s. 由于问题的对称性, 可知 $\bar{Y}_t = 0$, 方程解的唯一性得证. $\square$

接下来的工作是证明方程解的存在性. 我们需要引入无差异价值过程在一般情形下为上鞅, 在最小熵测度 Q^* 下为鞅的引理.

引理 3.5 假定 S 有界, $\mathbb{P}_{e,l} \neq \emptyset$, 且 $H \in L^\infty(\mathcal{F}_T, P)$, 固定 $\alpha > 0$, 则有

(1) 存在一个 RCLL 过程 $J^H = (J_t^H)_{0 \leq t \leq T}$ 使得对任意 $t \in [0, T]$, 有

$$J_t^H = \operatorname{ess\,inf}_{\vartheta \in \mathcal{A}} E_{Q^*} [e^{\alpha(H - X_{t,T}(\vartheta))} | \mathcal{F}_t], \quad Q^* - \text{a.s.} \quad (3.17)$$

J_t^H 是 J 的最大 RCLL 过程且 $J_T = e^{\alpha H}$, $J e^{-\alpha X(\vartheta)}$ 对任意 $\vartheta \in \mathcal{A}$ 是 Q^* 下鞅.

(2) 下列三个性质等价,

(a) $\vartheta^* \in \mathcal{A}$ 为 (3.17) 的最优解, 即 $\vartheta^* \in \mathcal{A}$;

(b) $\vartheta^* \in \mathcal{A}$ 在任意 t 下都是最优的, 即 $J_t^H = E_{Q^*} [e^{\alpha(H - X_{t,T}(\vartheta^*))} | \mathcal{F}_t]$;

(c) $\vartheta^* \in \mathcal{A}$ 时, $J e^{-\alpha X(\vartheta^*)}$ 是 Q^* 鞅.

(3) 我们可以选择 $\frac{1}{\alpha} \ln J^H$ 作为 $C(H; \alpha)$ 的 RCLL 版本, 对任意停时 $\sigma \leq \varepsilon \leq T$, 有

$$C_\sigma(H; \alpha) = \frac{1}{\alpha} \ln \operatorname{ess\,inf}_{\vartheta \in \mathcal{A}} E_{Q^*} [e^{\alpha(C_\varepsilon(H; \alpha) - X_{\sigma,T}(\vartheta))} | \mathcal{F}_\sigma]. \quad (3.18)$$

证明 参见文献 [10, 定理 12]. □

接下来还需要证明生成元的最小值是可达的, 即存在一个 $\vartheta^* \in \mathcal{A}$ 为期权的无差异价值过程的最优投资策略.

引理 3.6 假定 $\mathbb{R}^d$ 值可料过程 $\beta \in L_{\text{loc}}^2(S^{c,*})$, $W \in \mathcal{G}_{\text{loc}}^2(\mu)$, $V \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2(\mu)$, $L \in \mathcal{M}_{0,\text{loc}}(Q^*)$, 且满足 $[L, S] = 0$, $\mathcal{C}$ 为一紧集族, 则有

$$\begin{aligned} f\left(t, \beta, U, \frac{\widehat{U}}{1-a}, V, L\right) = & \operatorname{ess\,inf}_{\vartheta \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{\alpha}{2} (\beta - \vartheta)^{\text{tr}} c(\beta - \vartheta) \cdot A_t + \frac{\alpha}{2} \cdot \langle L^c \rangle_t \right. \\ & + M_\mu^P \left(\frac{e^{\alpha(U+V-\vartheta x)} - \alpha(U+V-\vartheta x) - 1}{\alpha} \middle| \widetilde{\mathcal{P}} \right) * \nu_t^* \\ & \left. + \sum_{0 < s \leq t} \frac{(e^{\alpha(\Delta L_s - \frac{\widehat{U}_s}{1-a_s})} - \alpha(\Delta L_s - \frac{\widehat{U}_s}{1-a_s}) - 1)^P (1-a_s)}{\alpha} \right\}, \end{aligned}$$

仍为一可料过程, 且最优投资策略 ϑ^* 存在, 即 $\vartheta^* \in \mathcal{C}$.

证明 由于有 $[L, S] = 0$, 因此对于生成元, 我们可以考虑将其分成两种情形来考虑, 即 $[\Delta A = 0]$ 和 $[\Delta A \neq 0]$. 当 $[\Delta A = 0]$ 时生成元 $f(t, \beta, U, \frac{\widehat{U}}{1-a}, V, L)$ 可以简化成

$$\begin{aligned} f(t, \beta, U, V) = & \operatorname{ess\,inf}_{\vartheta \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{\alpha}{2} (\beta - \vartheta)^{\text{tr}} c(\beta - \vartheta) \cdot A_t + \frac{\alpha}{2} \cdot \langle L^c \rangle_t \right. \\ & \left. + M_\mu^P \left(\frac{e^{\alpha(U+V-\vartheta x)} - \alpha(U+V-\vartheta x) - 1}{\alpha} \middle| \widetilde{\mathcal{P}} \right) * \nu_t^* \right\}. \end{aligned}$$

当 $[\Delta A \neq 0]$ 时, 我们有

$$[L, S] = \langle L^c, S^c \rangle + \sum \Delta L \Delta S = 0,$$

生成元 $f(t, \beta, U, \frac{\widehat{U}}{1-a}, V, L)$ 可以简化成

$$\begin{aligned} f\left(t, U, \frac{\widehat{U}}{1-a}, V\right) = & \operatorname{ess\,inf}_{\vartheta \in \mathcal{C}} \left\{ M_\mu^P \left(\frac{e^{\alpha(U+V-\vartheta x)} - \alpha(U+V-\vartheta x) - 1}{\alpha} \middle| \widetilde{\mathcal{P}} \right) * \nu_t^* \right. \\ & \left. + \sum_{0 < s \leq t} \frac{(e^{-\alpha \frac{\widehat{U}_s}{1-a_s}} + \alpha \frac{\widehat{U}_s}{1-a_s} - 1)^P (1-a_s)}{\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

对于第一种情形的证明思路我们参考了文献 [6, 引理 6]. 定义

$$f^n(t, \beta, U, V, L) := \operatorname{ess\,inf}_{\{\vartheta^n \in \mathbb{Q}, \operatorname{dist}(\vartheta^n, \mathcal{C}) \leq \frac{1}{n}\}} \left\{ \frac{\alpha}{2} (\beta - \vartheta^n)^{\operatorname{tr}} c(\beta - \vartheta^n) \cdot A_t + \frac{\alpha}{2} \cdot \langle L^c \rangle_t \right. \\ \left. + \frac{M_\mu^P(e^V | \tilde{\mathcal{P}}) e^{\alpha(U - \vartheta^n x)} - \alpha(U - \vartheta^n x) - 1}{\alpha} * \nu_t^* \right\},$$

对于上式而言, 首先, 本性下确界在有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一个可数子集内可达. 其次, β, L 和 U 均为可料过程, $M_\mu^P(e^V | \tilde{\mathcal{P}})$ 本身也为可料过程, 都是左连续过程, 它们的简单运算也为左连续过程, 由此可知 $f^n(t, \beta, U, V, L)$ 可料. 我们对 $f^n(t, \beta, U, V, L)$ 取极限, 有

$$\lim_n f^n(t, \beta, U, V, L) = f(t, \beta, U, V, L),$$

从而 $f(t, \beta, U, V, L)$ 为 $\mathbb{F}$ 可料过程.

对以最优投资策略 ϑ^* 存在性的证明与文献 [6, 引理 6 的 b)] 类似. 构建一个集合

$$O := \{(t, \omega) \mid |f(t, \omega, \vartheta_t(\omega), \beta_t(\omega), U_t(\omega), V_t(\omega)) - \operatorname{ess\,inf}_{\vartheta \in \mathcal{C}}(f(t, \omega, \vartheta_t(\omega), \beta_t(\omega), U_t(\omega), V_t(\omega)))| \\ + (1 - 1_{\mathcal{C}}(\vartheta)) \neq 0\},$$

其中 $f(t, \beta, U, V, L) := f(t, \omega, \vartheta_t(\omega), \beta_t(\omega), U_t(\omega), V_t(\omega))$, 由于 $f(t, \beta, U, V, L)$ 为 $\mathbb{F}$ 可料, 从而得到一个可料截口. 然后运用截口定理 (具体参见文献 [20, 定理 4.8]), 可知集合 O 为不足道集, 则有 $(1 - 1_{\mathcal{C}}(\vartheta)) = 0$, 可以确保 $\vartheta := \vartheta(t, \omega)$ 在可取投资组合 $\mathcal{C}$ 中取值.

对第二种情形, 生成元

$$f\left(t, U, \frac{\hat{U}}{1-a}, V\right)$$

为可料过程的证明与第一种情形类似, 对于最优投资策略 ϑ^* , 我们甚至可以给出其具体的解析式, 即

$$\vartheta^* = U - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{x}{M_\mu^P(e^V | \tilde{\mathcal{P}})}.$$

对于 $\vartheta^* \in \mathcal{C}$ 证明, 可以直接计算

$$(\vartheta \cdot S)^2 = (\vartheta \cdot S)_- \vartheta dS + \sum (\vartheta x)^2 = (\vartheta \cdot S)_- \vartheta dS + (\vartheta x)^2 * \mu_t.$$

令 $(\vartheta \cdot S)^* = \sup_{0 \leq t \leq T} \vartheta \cdot S$, 由 U, V 的有界性可知,

$$(\vartheta x)^2 * \mu_t < \infty,$$

从而有 $E_{Q^*}((\vartheta \cdot S)^*)^2 < \infty$, 由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式可知存在常数 c 和 C 使得

$$cE_{Q^*}[\theta \cdot S] \leq E_{Q^*}((\theta \cdot S)^*)^2 \leq CE_{Q^*}[\theta \cdot S],$$

可知 $E_{Q^*}[\theta \cdot S] < \infty$, 即 $E_{Q^*}\{\int_0^T \vartheta_s^{\operatorname{tr}} d[S]_s \vartheta_s\} < \infty$. □

现在来证明方程 (3.1) 的解的存在性, 即无差异指数效用价值过程 $C(H; \alpha)$ 是方程 (3.1) 的解, 这是最主要的结果, 有定理 3.7.

定理 3.7 假定 $\mathbb{P}_{e,l} \neq \emptyset$, $H \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$, 无差异指数效用价值过程 $C(H; \alpha)$ 在最小熵鞅测度 Q^* 下, 是方程 (3.1) 的唯一解.

证明 由引理 3.5, 我们知道投资策略 ϑ^* 在最小熵鞅测度 Q^* 下, $J e^{-\alpha X(\vartheta^*)}$ 是 Q^* 鞅, 期权的指数效用无差异价值过程 $C_t(H; \alpha)$ 可以表示为

$$C_t(H; \alpha) = \frac{1}{\alpha} \ln J_t^H = \frac{1}{\alpha} \ln(J_t^H e^{-\alpha X_{t,T}(\vartheta^*)}) + X_{t,T}(\vartheta^*),$$

由 (3.3) 可知, $C_T(H; \alpha) = \frac{1}{\alpha} \ln J_T^H = H$, 而

$$\begin{aligned} J_t^H e^{-\alpha X_{t,T}(\vartheta^*)} &= E_{Q^*}(J_T^H e^{-\alpha X_{T,T}(\vartheta^*)} | \mathcal{F}_t) = E_{Q^*}(J_T^H | \mathcal{F}_t) \\ &= E_{Q^*}(e^{\alpha C_T(H; \alpha)} | \mathcal{F}_t) \geq e^{\alpha E_{Q^*}(C_T | \mathcal{F}_t)}, \end{aligned}$$

其中不等式来自于 Jensen 不等式, 且 $X_{t,T}(\vartheta^*) \geq 0$, 从而有

$$C_t(H; \alpha) \geq E_{Q^*}(C_T(H; \alpha) | \mathcal{F}_t),$$

由此可见期权的指数效用无差异价值过程 $C(H; \alpha)$ 为在最小熵鞅测度下为一 Q^* 上鞅, 由上鞅的 Doob-Meyer 分解,

$$C(H; \alpha) = C_0(H; \alpha) + M^H(\alpha) - D^H(\alpha),$$

其中 $M^H(\alpha)$ 为 Q^* 鞅, $D^H(\alpha)$ 为一适应可料增过程, 此处的上标 H 表示与期权 H 有关. $M^H(\alpha)$ 有 GKW 分解, 存在有界 $\mathbb{R}^d$ 值可料过程 ϕ 使得

$$M^B(\alpha) = \phi \cdot M + q.$$

我们可以将 $\phi \cdot M + q$ 表示成

$$\phi \cdot M + q = \beta \cdot S^{c,*} + W * (\mu - \nu) + V * \mu + L,$$

其中 $\beta \in L_{\text{loc}}^2(S^{c,*})$, W 为有界过程, 且 $W \in \mathcal{G}_{\text{loc}}^2(\mu)$, $V \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2(\mu)$, $L \in \mathcal{M}_{0,\text{loc}}^2(Q^*)$ 且与 $S^{c,*}$ 以及随机积分空间 $\{\bar{W} * (\mu - \nu) \mid \bar{W} \in \mathcal{G}_{\text{loc}}^2(\mu)\}$ 强正交, 而且 W 可以表示成 $W = U + \frac{\hat{U}}{1-a}$. 上述过程的有界性来自于 $C(H; \alpha)$ 有界, 具体可参见文献 [10, 命题 4].

令 R_t^ϑ 具有如下形式:

$$\begin{aligned} R_t^\vartheta &:= \exp\{\alpha(C_t(B, \alpha) - X_t(\vartheta))\} \\ &= \exp\{\alpha C_0(B, \alpha) + \alpha(\beta - \vartheta) \cdot S_t^{c,*} + \alpha(W - \vartheta x) * (\mu - \nu)_t + \alpha V * \mu_t + \alpha L_t - \alpha D_t^B(\alpha)\}, \end{aligned}$$

对 R_t^ϑ 用 Itô 公式, 有

$$\begin{aligned} dR_t^\vartheta &= \alpha R_{t-}^\vartheta d(C_t(H; \alpha) - X_t(\vartheta)) + \frac{\alpha^2}{2} R_{t-}^\vartheta (\beta - \vartheta)^{\text{tr}} c(\beta - \vartheta) dA_t + \frac{\alpha^2}{2} R_{t-}^\vartheta d\langle L^c \rangle_t \\ &\quad + d\left(\sum_{0 \leq s \leq t} e^{\alpha(C_s(B; \alpha) - X_s(\vartheta))} - e^{\alpha(C_s(B; \alpha) - X_s(\vartheta))_-} \right. \\ &\quad \left. - \alpha e^{\alpha(C_s(B; \alpha) - X_s(\vartheta))} \Delta(C_s(H; \alpha) - X_s(\vartheta)) - dD_s^H(\alpha)\right) \\ &= \alpha R_{t-}^\vartheta \left\{ d(Q^* \text{ 局部鞅}) + \frac{\alpha}{2} (\beta - \vartheta)^{\text{tr}} c(\beta - \vartheta) dA_t + \frac{\alpha}{2} d\langle L^c \rangle_t \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_\mu^P(e^V | \tilde{\mathcal{P}}) e^{U - \vartheta x} - \alpha(U - \vartheta x) - 1}{\alpha} \nu^*(dt, dx) \right. \\ &\quad \left. + d\left(\sum_{0 < s \leq t} \frac{(e^{\alpha(\Delta L_s - \frac{\hat{U}_s}{1-a_s})} - \alpha(\Delta L_s - \frac{\hat{U}_s}{1-a_s}) - 1)^P (1 - a_s)}{\alpha}\right) - dD_t^H(\alpha) \right\}. \end{aligned}$$

在上式中求可料对偶投影时, 我们利用了 $G * \mu$ 的可料对偶投影为 $M_\mu^P(G | \tilde{\mathcal{P}}) * \nu^*$ 和 $M_\mu^P(V | \tilde{\mathcal{P}}) * \nu^* = 0$ 的事实. 对上式积分有

$$\begin{aligned} R_t^\vartheta - R_0^\vartheta &= Q^* \text{ 局部鞅} + \alpha \int_0^t R_{s-}^\vartheta \frac{\alpha}{2} (\beta_s - \vartheta_s)^{\text{tr}} c_s (\beta_s - \vartheta_s) dA_s \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^t R_{s-}^\vartheta d\langle L^c \rangle_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} R_{t-}^\vartheta \frac{M_\mu^P(e^V | \tilde{\mathcal{P}}) e^{U-\vartheta x} - \alpha(U-\vartheta x) - 1}{\alpha} F^*(ds, dx) dA_s \\ &\quad + \left(\sum_{0 < s \leq t} \alpha R_{s-}^\vartheta \frac{(e^{\alpha(\Delta L_s - \frac{\hat{U}_s}{1-a_s})} - \alpha(\Delta L_s - \frac{\hat{U}_s}{1-a_s}) - 1)^P (1-a_s)}{\alpha} \right) - D_t^B(\alpha). \end{aligned}$$

由引理 3.5 可知, 对任意 $\vartheta \in \mathcal{C}$, R_t^ϑ 为 Q^* 下鞅, 对最优投资策略 ϑ^* , R_t^ϑ 是 Q^* 鞅, 又由于 $R_t^\vartheta > 0$ 意味着

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha}{2} (\beta - \vartheta)^{\text{tr}} c (\beta - \vartheta) \cdot A_t + \frac{\alpha}{2} \langle L^c \rangle_t + \frac{M_\mu^P(e^V | \tilde{\mathcal{P}}) e^{U-\vartheta x} - \alpha(U-\vartheta x) - 1}{\alpha} * \nu_t^* \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t} \frac{(e^{\alpha(\Delta L_s - \frac{\hat{U}_s}{1-a_s})} - \alpha(\Delta L_s - \frac{\hat{U}_s}{1-a_s}) - 1)^P (1-a_s)}{\alpha} - D_t^H(\alpha) \end{aligned}$$

是个增过程, 对于最优投资策略 ϑ^* , 上式则为零, 有

$$\begin{aligned} D_t^H(\alpha) &= \text{essinf}_{\vartheta \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{\alpha}{2} (\beta - \vartheta)^{\text{tr}} c (\beta - \vartheta) \cdot A_t + \frac{\alpha}{2} \cdot \langle L^c \rangle_t \right. \\ &\quad \left. + M_\mu^P \left(\frac{e^{\alpha(U+V-\vartheta x)} - \alpha(U+V-\vartheta x) - 1}{\alpha} \middle| \tilde{\mathcal{P}} \right) * \nu_t^* \right. \\ &\quad \left. + \sum_{0 < s \leq t} \frac{(e^{\alpha(\Delta L_s - \frac{\hat{U}_s}{1-a_s})} - \alpha(\Delta L_s - \frac{\hat{U}_s}{1-a_s}) - 1)^P (1-a_s)}{\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

而由引理 3.6 可知, 最优投资策略 ϑ^* 存在, 令

$$\begin{aligned} f\left(t, \beta, U, \frac{\hat{U}}{1-a}, V, L\right) &= \text{essinf}_{\vartheta \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{\alpha}{2} (\beta - \vartheta)^{\text{tr}} c (\beta - \vartheta) \cdot A_t + \frac{\alpha}{2} \cdot \langle L^c \rangle_t \right. \\ &\quad \left. + M_\mu^P \left(\frac{e^{\alpha(U+V-\vartheta x)} - \alpha(U+V-\vartheta x) - 1}{\alpha} \middle| \tilde{\mathcal{P}} \right) * \nu_t^* \right. \\ &\quad \left. + \sum_{0 < s \leq t} \frac{(e^{\alpha(\Delta L_s - \frac{\hat{U}_s}{1-a_s})} - \alpha(\Delta L_s - \frac{\hat{U}_s}{1-a_s}) - 1)^P (1-a_s)}{\alpha} \right\}, \end{aligned}$$

从而可知无差异价值过程 $C_t(H; \alpha)$ 是方程的解. 解的唯一性由定理 3.4 可得, 从而定理得证. □

致谢 全体作者感谢两位匿名审稿人给出有益建议.

参考文献

- 1 Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. J Polit Econ, 1973, 81: 637-654
- 2 Schachermayer W. Utility maximization in incomplete markets. In: Lecture Notes in Mathematics, vol. 1856. Berlin: Springer, 2004, 255-293

- 3 Biagini S, Frittelli M. Utility maximization in incomplete markets for unbounded processes. *Finance Stoch*, 2005, 9: 493–517
- 4 Biagini S, Frittelli M. The supermartingale property of the optimal wealth process for general semimartingales. *Finance Stoch*, 2007, 11: 253–266
- 5 Hu Y, Imkeller P, Muller M. Utility maximization in incomplete markets. *Ann Appl Probab*, 2005, 15: 1691–1712
- 6 Morlais M. Utility maximization in a jump market model. *Stoch Stoch Rep*, 2009, 81: 1–27
- 7 Hodges S D, Neuberger A. Optimal replication of contingent claim under transaction costs. *Rev Futures Markets*, 1989, 8: 222–239
- 8 Rouge R, El-Karoui N. Pricing via utility maximization and entropy. *Math Finance*, 2000, 10: 259–276
- 9 Musiela M, Zariphopoulou T. An example of indifference prices under exponential preferences. *Finance Stoch*, 2004, 8: 229–239
- 10 Mania M, Schweizer M. Dynamic exponential utility indifference valuation. *Ann Appl Probab*, 2005, 15: 2113–2143
- 11 Becherer D. Bounded solutions to Backward SDE's with jumps for utility optimization and indifference hedging. *Ann Appl Probab*, 2006, 16: 2027–2054
- 12 Xiong D W, Kohlmann M. Optimal exponential utility in a jump bond market. *Stoch Anal Appl*, 2011, 29: 78–105
- 13 Wang K M, Zhang H Y, Yao J. A pricing defaultable claim model based in exponential utility indifference value process in an incomplete market (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2013, 43: 1209–1222
- 14 Frei C, Schweizer M. Exponential utility indifference valuation in a general semimartingale model. In: *Optimality and Risk-Modern Trends in Mathematical Finance*. Berlin: Springer, 2010
- 15 Bismut J. Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients. *SIAM J Control Optim*, 1976, 14: 419–444
- 16 Pardoux E, Peng S. Adapted solutions of backward stochastic differential equations. *Syst Control Lett*, 1990, 14: 51–61
- 17 El-karoui N, Hamadène S. BSDEs and risk-sensitive control, zero-sum and non zero-sum game problems of stochastic functional differential equations. *Stoch Proc Appl*, 2003, 107: 145–169
- 18 Jeanblanc M, Mania M, Santacorce M, et al. Mean-variance hedging via stochastic control and BSDEs for general semimartingales. *Ann Appl Probab*, 2012, 22: 2388–2428
- 19 Jacod J, Shiryaev A N. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. 2nd ed. Berlin: Springer, 2003
- 20 He S W, Yan J A, Wang J G. *Semimartingale and Stochastic Analysis* (in Chinese). Beijing: Science Press, 1995
- 21 Choulli T, Schweizer M. Stability of sigma-martingale densities in LlogL under an equivalent change of measure. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1986855, 2011
- 22 Choulli T, Stricker C. More on minimal entropy-Hellinger martingale measure. *Math Finance*, 2006, 16: 1–19
- 23 Jacod J. Calcul stochastique et problemes de martingales. In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 714. Berlin: Springer, 1979
- 24 Kazamaki N. A sufficient condition for the uniform integrability of exponential martingales. *Math Rep Toyama Univ*, 1979, 2: 1–11

附录

我们在此给出引理 3.3 的证明.

证明 先证明结论 (1), 由二次协变差过程的定义, 可知

$$\begin{aligned}
 [1 * (\mu - \nu^*), (\gamma + \phi) * (\mu - \nu^*)] &= \sum (\gamma + \phi) \\
 &= \sum (\gamma + \phi) I_{\{\Delta S \neq 0\}} + \sum (\gamma + \phi) I_{\{\Delta S = 0\}} \\
 &= \gamma * \mu + \sum \phi I_{\{\Delta S = 0\}},
 \end{aligned}$$

从而有

$$\langle 1 * (\mu - \nu^*), (\gamma + \phi) * (\mu - \nu^*) \rangle = \gamma * \nu^* + \phi(1 - a).$$

再证明结论 (2),

$$\begin{aligned} &= \sum (V^1 - V^2) \chi(V^1, V^2) \\ &= \sum \frac{e^{\alpha U^2} M_\mu^P(e^{\alpha V^1} | \tilde{\mathcal{P}}) - e^{\alpha U^2} M_\mu^P(e^{\alpha V^2} | \tilde{\mathcal{P}})}{\alpha} \\ &= \left(\frac{e^{\alpha U^2} M_\mu^P(e^{\alpha V^1} | \tilde{\mathcal{P}}) - e^{\alpha U^2} M_\mu^P(e^{\alpha V^2} | \tilde{\mathcal{P}})}{\alpha} \right) * \mu, \end{aligned}$$

从而有

$$\frac{e^{\alpha U^2} M_\mu^P(e^{\alpha V^1} | \tilde{\mathcal{P}}) - e^{\alpha U^2} M_\mu^P(e^{\alpha V^2} | \tilde{\mathcal{P}})}{\alpha} = \langle (V^1 - V^2) * \mu, \chi(V^1, V^2) * (\mu - \nu^*) \rangle.$$

现在证明结论 (3),

$$[(\Delta L^{1,d} - \Delta L^{2,d}), \varphi(\Delta L^{1,d}, \Delta L^{2,d})] = \sum (\Delta L^{1,d} - \Delta L^{2,d})^2 \left\{ \frac{e^{\alpha \frac{\bar{U}^2}{1-a}} (e^{\alpha \Delta L^{1,d}} - e^{\alpha \Delta L^{2,d}})}{\alpha ((\Delta L^{1,d}) - (\Delta L^{2,d}))^2} \right\}^P,$$

对上式取可料对偶投影

$$\left(\sum (\Delta L^{1,d} - \Delta L^{2,d})^2 \left\{ \frac{e^{\alpha \frac{\bar{U}^2}{1-a}} (e^{\alpha \Delta L^{1,d}} - e^{\alpha \Delta L^{2,d}})}{\alpha ((\Delta L^{1,d}) - (\Delta L^{2,d}))^2} \right\}^P \right)^P = \sum \frac{e^{\alpha \frac{\bar{U}^2}{1-a}} (e^{\alpha \Delta L^{1,d}} - e^{\alpha \Delta L^{2,d}})^P}{\alpha},$$

即

$$\sum \frac{e^{\alpha \frac{\bar{U}^2}{1-a}} (e^{\alpha \Delta L^{1,d}} - e^{\alpha \Delta L^{2,d}})}{\alpha} = \langle (\Delta L^{1,d} - \Delta L^{2,d}), \varphi(\Delta L^{1,d}, \Delta L^{2,d}) \rangle.$$

由此引理 3.3 得证. □

Exponential utility indifference value process in a general jump model based on random measures

WANG KaiMing, ZHANG HuiYan & LIU JiMo

Abstract This paper deals with the dynamic exponential utility indifferent value process of a contingent claim. We regard the risky asset pricing process as a semimartingale with general jumps based on a random measure, where the GKW (Galtchouk-Kunita-Watanabe) decomposition of the martingale part of the exponential utility indifferent value process's Doob-Meyer decomposition satisfies the Jacod decomposition. A backward stochastic differential equation (BSDE) is established from the fact that the exponential utility indifferent value process is a martingale for the optimal investment strategy under the minimal entropy measure. The uniqueness of the solution to the equation is proved by converting the BSDE to bounded mean oscillation (BMO) martingales under a new probability measure. The division of the equation's generator into $[\Delta A = 0]$ and $[\Delta A \neq 0]$ proves the existence of an optimal investment strategy. As a result, the exponential utility indifference value process of the contingent claim is the solution of the BSDE.

Keywords exponential utility indifference value process, general jump, BSDE, Jacod decomposition, BMO martingale

MSC(2010) 60H15, 91B25, 91G40

doi: 10.1360/012015-32