一类新的关于二维 Lamé 方程的唯一延拓性

献给李大潜教授 80 华诞

王彦博¹, 刘逸侃², 程晋^{1,3*}

1. 上海财经大学数学学院, 上海 200433;

2. Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, Tokyo 153-8914, Japan;

3. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: yabo68@hotmail.com, ykliu@ms.u-tokyo.ac.jp, jcheng@fudan.edu.cn

收稿日期: 2016-10-27; 接受日期: 2016-12-15; 网络出版日期: 2017-01-23; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11331004) 资助项目

摘要 唯一延拓性是指偏微分方程在部分区域上的解可以唯一决定在整个连通域上的解的性质. 本文主要针对弹性力学中的基本方程—Lamé 方程, 研究一种新的唯一延拓性. 问题如下: 如果只能测量到部分区域上位移场的部分分量, 那么可以决定整个位移场的多少信息? 本文将证明, 对于二维 Lamé 方程, 一个位移分量在小区域上的测量值, 可以在相差最多 4 个常数意义下, 唯一决定整个位移场.

关键词 唯一延拓性 Lamé 方程 反问题

MSC (2010) 主题分类 35Q72, 35R30, 65L80

1 引言

唯一延拓性 (unique continuation) 是指偏微分方程的解在小区域上的值可以唯一决定偏微分方程在大范围的解. 粗略地讲, 对于一个在区域 Ω 上定义的偏微分算子 $\mathcal{P}$, 唯一延拓性回答的是如下的一类问题: 如果已知方程

$$\mathcal{P}u = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}$$

的解 u 在 Ω 的某个子区域 ω 上为零, 那么 u 是否能在一个更大的子区域上也为零? 唯一延拓性作为方程的基本性质之一, 反映的是方程较为本质的属性. 例如, 我们知道 Laplace 方程和热方程具有很强的唯一延拓性, 因为只要 u 在 Ω 的任意子区域 ω 上为零, 就能推出 u 在整个区域 Ω 上为零; 而对于波动方程, 由于波的传播速度是有限的, 一般我们只能得到 u 在一个比 ω 略大的“锥状”区域上为零的结论. 关于这些经典结论, 可参见专著 [1–3] 或综述 [4] 等.

除了偏微分方程的定性分析以外, 唯一延拓性在研究数学物理方程的反问题时经常被用于解决由方程解的局部测量值决定解在全局或者其他部分的信息的问题, 具有非常重要的工程和应用价值. 同时, 这也是数学工作者所关心的一个问题. 例如, 在考虑线性反问题的唯一性时, 我们往往能利用唯一延拓性将小区域上的零观测数据延拓到较大的区域上, 进而结合其他相应方法获得方程中某些系数

英文引用格式: Wang Y B, Liu Y K, Cheng J. A new unique continuation property for the Lamé system in two dimensions (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1327–1334, doi: 10.1360/N012016-00195

的唯一性 (参见文献 [5–7] 等). 此外, 唯一延拓性还与可控性理论, 尤其是零精确可控性 (null exact controllability) 有着密切的关系. 例如, 我们希望确定方程的某个控制参数, 使得方程的解在最终时刻或部分边界为零, 我们可以采用对偶方法, 将其转化为 (齐次) 对偶系统的能观不等式或者唯一延拓性 (参见文献 [8–10] 等).

由于测量信息的局限性, 如何有效地利用解在局部的信息或者尽量地减少所需要的测量信息是一个非常重要的研究课题. 这也是应用数学所面临的一个具有挑战性的问题. 特别是当我们处理耦合系统时, 由于系统的各个分量之间存在相互作用和影响, 我们自然要问: 是否只利用部分分量的观测数据, 就能获得关于整个系统的完整信息? 在数学物理反问题中, 这相当于利用部分信息同时反演多个未知系数; 在可控性理论中, 这相当于通过较少的控制系数来控制整个系统. 关于这类问题, 近年来, 文献 [11–14] 等对抛物型方程组作出了开创性的工作, 而对其他方程的研究还不多. 从文献中可以看到, 系统的耦合性越强, 各个分量的相互作用就越紧密, 利用局部信息“管中窥豹”的可能性就越大.

本文主要研究二维 Lamé 方程 (Lamé equation) 的一种新的唯一延拓性问题. 具体地, 如果我们知道 Lamé 方程解的一个位移分量在部分区域上的值, 我们可否在附加有限个条件的基础上, 决定 Lamé 方程的解在整个连通区域上的值.

关于 Lamé 方程解的唯一延拓性的研究可以追溯到 20 多年前. 对各向同性的介质, 文献 [15] 首先在系数是 C^∞ 的情形下证明了 Lamé 方程的唯一延拓性, 而系数的正则性在文献 [16] 中得以降低. 对各向异性的介质, 文献 [17] 首先在系数接近于各向同性的假设下证明了唯一延拓性, 之后, 文献 [18, 19] 则在系数为 Lipschitz 连续的条件下获得了同样的结果. 我们发现, 现有文献主要通过降低 Lamé 方程中系数的正则性以获得更一般的结论, 但都需要方程中所有分量在某一小区域上为零的假设. 本文与上述文献最大的区别在于, 我们仅假设二维 Lamé 方程解的一个位移分量在小区域上为零, 而运用方程本身的耦合性质将这一信息转移到另一分量上, 进而推出方程的解在整个区域上为零. 这在 Lamé 方程的唯一延拓性的研究上具有一定的独创性, 并且具有很高的应用价值.

2 问题的提出和主要结果

假设 Ω 是二维空间 $\mathbb{R}^2$ 中的一个连通的区域, $\omega \subset \Omega$ 是包含在 Ω 中的一个开集. 不失一般性, 我们假设原点 $0 \in \omega$.

我们考虑一般的 Lamé 方程

$$\operatorname{div}(\mu(\nabla u + (\nabla u)^T)) + \nabla(\lambda \operatorname{div} u) = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (2.1)$$

其中 $u = (u_1, u_2)^T$ 是位移向量场, $\lambda, \mu \in C^1(\overline{\Omega})$ 是 Lamé 系数.

这里假设 Lamé 系数满足条件

$$\mu > 0, \quad 2\mu + \lambda > 0, \quad \text{在 } \overline{\Omega} \text{ 内}.$$

我们研究的问题是, 如何通过 u_1 在 ω 的值, 在一些“简单”的附加条件下, 决定 u 在整个 Ω 上的值.

我们的主要结果是定理 1.

定理 1 假设 $u \in (C^2(\overline{\Omega}))^2$ 是 Lamé 方程 (2.1) 的经典解. 如果位移场 u 的第一个分量 u_1 满足, 对于 $(x, y) \in \omega$,

$$u_1(x, y) = 0,$$

且第二个分量 u_2 满足

$$u_2(0,0) = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(0,0) = 0, \quad (2.2)$$

则对于 $(x, y) \in \Omega$, 成立

$$u(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y))^T = 0.$$

注 1 新的唯一延拓性与已有的唯一延拓性相比, 只需要解的一个分量在小区域上的值以及第二个分量在一点上的值及其导数值. 这对于解决具有实际背景的反问题时非常有意义, 因为所需要的测量值要少很多.

注 2 下面这个例子说明, 我们这个结果基本上是最好的结果. 如果 μ 和 λ 都是常数, 这时, 我们很容易利用 Lamé 方程 Green 函数的解析性和文献 [20] 中的方法证明: 假设

$$u_1 = 0, \quad \text{在 } \omega \text{ 内,}$$

则对于 $(x, y) \in \Omega$, 成立

$$u_1(x, y) = 0,$$

且

$$u_2(x, y) = a_1 x^2 - \frac{\mu}{2\mu + \lambda} a_1 y^2 + b_1 x + b_2 y + c_1,$$

其中 a_1, b_1, b_2 和 c_1 是常数, 可以根据函数 u_2 在一些点上的值来确定.

注 3 条件 (2.2) 中的 $\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(0,0) = 0$ 可改为 $\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}(0,0) = 0$. 事实上, 展开方程 (2.1) 的 u_2 分量就能看出, $\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(0,0)$ 和 $\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}(0,0)$ 两者有一个为零即可推出另一个为零.

3 主要引理和主要结果的证明

为了证明我们的结论, 首先叙述和证明几个引理.

引理 1 (唯一延拓性) 假设 u 是 Lamé 方程 (2.1) 的一个经典解. 如果对于 $(x, y) \in \omega$ 成立

$$u(x, y) = 0,$$

则对于 $(x, y) \in \Omega$ 成立

$$u(x, y) = 0.$$

这个引理的证明参见文献 [16].

在原点的邻域 $O_\delta(0)$ 里, 考虑下面的双曲型方程:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + A(x, y) \frac{\partial W}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial W}{\partial y} + C(x, y) W = F(x, y). \quad (3.1)$$

引理 2 方程 (3.1) 存在唯一的 Riemann 函数 $R(x, y, \xi, \eta)$ 满足

$$\begin{aligned} R(x, y, \xi, \eta) - \int_{\xi}^x B(\eta_1, y) R(\eta_1, y, \xi, \eta) d\eta_1 - \int_{\eta}^y A(x, \eta_2) R(x, \eta_2, \xi, \eta) d\eta_2 \\ + \int_{\xi}^x d\eta_1 \int_{\eta}^y C(\eta_1, \eta_2) R(\eta_1, \eta_2, \xi, \eta) d\eta_2 = 1. \end{aligned}$$

这个引理中的存在性可以利用 Volterra 算子在加权函数空间是一个压缩算子的性质进行证明. 具体可以参见文献 [21].

容易直接验证: $R(x, y, \xi, \eta)$ 关于变量 ξ 和 η 满足方程 (3.1), 并且关于变量 x 和 y 满足方程 (3.1) 的共轭方程

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(A(x, y)R)}{\partial x} - \frac{\partial(B(x, y)R)}{\partial y} + C(x, y)R = 0,$$

且满足

$$\begin{cases} \frac{\partial R(x, y, \xi, \eta)}{\partial x} - B(x, y)R(x, y, \xi, \eta) = 0, & y = \eta, \\ \frac{\partial R(x, y, \xi, \eta)}{\partial y} - A(x, y)R(x, y, \xi, \eta) = 0, & x = \xi \end{cases}$$

和 $R(x, y, x, y) = 1$.

引理 3 方程 (3.1) 的解可以用 Riemann 函数 $R(x, y, \xi, \eta)$ 表示:

$$W(\xi, \eta) = \int_0^\xi R(x, 0, \xi, \eta)\phi(x) dx + \int_0^\eta R(0, y, \xi, \eta)\psi(y) dy + \int_0^\xi \int_0^\eta R(x, y, \xi, \eta)F(x, y) dx dy,$$

其中函数 $\phi(x)$ 和 $\psi(y)$ 分别是

$$\phi(x) = \frac{\partial W(x, 0)}{\partial x} + B(x, 0)W(x, 0), \quad \psi(y) = \frac{\partial W(0, y)}{\partial y} + A(0, y)W(0, y).$$

证明 利用上面的等式和引理 2 的结论, 我们首先验证

$$\frac{\partial^2(RW)}{\partial x \partial y} - RF = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ W \left(\frac{\partial R}{\partial y} - AR \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ W \left(\frac{\partial R}{\partial x} - BR \right) \right\}.$$

对等式的两边进行积分, 利用 Riemann 函数的边界条件, 我们可以得到引理的结论. 证毕. $\square$

现在, 我们可以开始证明定理 1 了.

定理 1 的证明 首先在 ω 内考虑 Lamé 方程的解 $u(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y))^T$.

由于在 ω 内, 有

$$u_1(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \omega,$$

因此, 我们可以得到解的第二个分量 $w(x, y) = u_2(x, y)$ 满足:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((2\mu + \lambda) \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.3)$$

显然 w 是一个超定方程组的解. 第一个方程 (3.2) 是一个双曲型方程, 第二方程 (3.3) 是一个椭圆型方程.

为了应用前面的引理, 我们将第一个方程 (3.2) 变形为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + A(x, y) \frac{\partial w}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (3.4)$$

其中

$$A(x, y) = \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{\partial \mu}{\partial y}, \quad B(x, y) = \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{\partial \lambda}{\partial x}.$$

由引理 2 和 3, 我们知道存在唯一的 Riemann 函数 $R(x, y, \xi, \eta)$, 并且方程 (3.4) 的解可以表示为

$$w(x, y) = \int_0^x R(\xi, 0, x, y) \phi(\xi) d\xi + \int_0^y R(0, \eta, x, y) \psi(\eta) d\eta, \quad (3.5)$$

这里有

$$\phi(x) = \frac{\partial w}{\partial x}(x, 0) + B(x, 0)w(x, 0), \quad \psi(y) = \frac{\partial w}{\partial y}(0, y) + A(0, y)w(0, y).$$

从假设 (2.2), 我们很容易验证

$$\phi(0) = \phi'(0) = \psi(0) = \psi'(0) = 0.$$

利用表达式 (3.5), 我们可以计算得到

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, y) = R(x, 0, x, y) \phi(x) + \int_0^x \frac{\partial R}{\partial x}(\xi, 0, x, y) \phi(\xi) d\xi + \int_0^y \frac{\partial R}{\partial x}(0, \eta, x, y) \psi(\eta) d\eta, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x, y) = R(0, y, x, y) \psi(y) + \int_0^x \frac{\partial R}{\partial y}(\xi, 0, x, y) \phi(\xi) d\xi + \int_0^y \frac{\partial R}{\partial y}(0, \eta, x, y) \psi(\eta) d\eta, \quad (3.7)$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y) &= R(x, 0, x, y) \phi'(x) + \left(\frac{\partial R}{\partial x} + 2 \frac{\partial R}{\partial \xi} \right)(x, 0, \xi, y) \Big|_{\xi=x} \phi(x) \\ &\quad + \int_0^x \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(\xi, 0, x, y) \phi(\xi) d\xi + \int_0^y \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(0, \eta, x, y) \psi(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y) &= R(0, y, x, y) \psi'(y) + \left(\frac{\partial R}{\partial y} + 2 \frac{\partial R}{\partial \eta} \right)(0, y, x, \eta) \Big|_{\eta=y} \psi(y) \\ &\quad + \int_0^x \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}(\xi, 0, x, y) \phi(\xi) d\xi + \int_0^y \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}(0, \eta, x, y) \psi(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (3.9)$$

我们将表达式 (3.6)–(3.9) 代入方程 (3.3), 可以得到

$$\begin{aligned} 0 &= \mu(x, y) R(x, 0, x, y) \phi'(x) + P_1(x, y) \phi(x) + \int_0^x K_1(x, \xi, y) \phi(\xi) d\xi \\ &\quad + (2\mu + \lambda)(x, y) R(0, y, x, y) \psi'(y) + P_2(x, y) \psi(y) + \int_0^y K_2(y, \eta, x) \psi(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (3.10)$$

这里表达式中的函数是

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= \mu(x, y) \left(\frac{\partial R}{\partial x} + 2 \frac{\partial R}{\partial \xi} \right)(x, 0, \xi, y) \Big|_{\xi=x} + \frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y) R(x, 0, x, y), \\ P_2(x, y) &= (2\mu + \lambda)(x, y) \left(\frac{\partial R}{\partial y} + 2 \frac{\partial R}{\partial \eta} \right)(0, y, x, \eta) \Big|_{\eta=y} + \frac{\partial(2\mu + \lambda)}{\partial y}(x, y) R(0, y, x, y) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} K_1(x, \xi, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(x, y) \frac{\partial R}{\partial x}(\xi, 0, x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((2\mu + \lambda)(x, y) \frac{\partial R}{\partial y}(\xi, 0, x, y) \right), \\ K_2(y, \eta, x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(x, y) \frac{\partial R}{\partial x}(0, \eta, x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((2\mu + \lambda)(x, y) \frac{\partial R}{\partial y}(0, \eta, x, y) \right). \end{aligned}$$

在等式 (3.10) 中, 取 $y = 0$, 我们有

$$\begin{cases} \mu(x, 0)\phi'(x) + P_1(x, 0)\phi(x) + \int_0^x K_1(x, \xi, 0)\phi(\xi) d\xi \\ \quad + (2\mu + \lambda)(x, 0)R(0, 0, x, 0)\psi'(0) + P_2(x, 0)\psi(0) = 0, \\ \phi(0) = \psi(0) = \psi'(0) = 0. \end{cases}$$

用文献 [21] 中的 Volterra 算子在加权函数空间为压缩算子的结论和方法, 容易证明 $\phi(x) = 0$. 同样, 在等式 (3.10) 中, 取 $x = 0$, 我们有

$$\begin{cases} (2\mu + \lambda)(0, y)\psi'(y) + P_2(0, y)\psi(y) + \int_0^y K_2(y, \eta, 0)\psi(\eta) d\eta \\ \quad + \mu(0, y)R(0, 0, 0, y)\phi'(0) + P_1(0, y)\phi(0) = 0, \\ \psi(0) = \phi(0) = \phi'(0) = 0. \end{cases}$$

同理, 有 $\psi(y) = 0$. 代入 (3.5), 我们可以得到

$$w(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega.$$

最后, 应用引理 1, 有

$$u(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y))^T = 0, \quad (x, y) \in \Omega.$$

结论得证. □

4 一些注解

从定理 1 的结论, 我们可以知道, 对于二维 Lamé 方程的解, 一个分量的信息可以在相差 4 个常数意义下确定第二个分量. 我们前面的例子也说明这个结论. 但是, 在 Lamé 系数 μ 和 λ 是函数的情形, 这个结论有可能更好. 我们举一个例子说明.

例 1 我们在原点的邻域里讨论二维 Lamé 方程 (2.1). 假设

$$\mu(x, y) = e^x, \quad \lambda(x, y) = e^y.$$

如果

$$u_1(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \omega,$$

则 u_2 仅依赖于两个常数.

由于 $w(x, y) = u_2(x, y)$ 同时满足双曲方程 (3.2) 和椭圆方程 (3.3), 从方程 (3.2) 可以得到

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

进而, 我们得到

$$w(x, y) = p(x) + q(y), \tag{4.1}$$

其中 p 是仅依赖于 x 的函数, q 是仅依赖于 y 的函数.

将 (4.1) 代入 (3.3), 我们有

$$\frac{\partial(e^x p'(x))}{\partial x} + 2e^x q''(y) + \frac{\partial(e^y q'(y))}{\partial y} = 0.$$

在不混淆的情形下, 我们记 $p'(x)$ 为 $p(x)$ 关于 x 的导数, $q'(y)$ 为 $q(y)$ 关于 y 的导数.

对于上式两边对 y 求导, 有

$$2e^x q'''(y) + (e^y q'(y))'' = 0.$$

利用 e^x 与 1 的线性无关性, 可以得到

$$q'''(y) = 0, \quad (e^y q'(y))'' = 0.$$

从上面第一个方程中可以得到

$$q'(y) = ay + b,$$

其中 a 和 b 为常数. 从第二个方程中可以得到

$$q'(y) = (cy + d)e^{-y},$$

其中 c 和 d 为常数. 比较这两个等式, 利用函数 e^y 的性质, 我们有

$$a = b = c = d = 0,$$

即 $q(y)$ 是一个常数函数.

这时, 我们可以得到 $w(x, y) = p(x) + q(y)$ 仅依赖于 x , 并且满足

$$(e^x w'(x))' = 0.$$

换句话说讲, 第二分量 $u_2(x, y) = w(x, y)$ 仅依赖于两个常数.

由于常数一定是 Lamé 方程的解, 基于这个例子, 我们有如下的猜测.

猜测 1 存在这样的函数 μ 和 λ , 使得二维 Lamé 方程的第一个分量可以在相差一个常数的意义下决定 Lamé 方程解.

5 结论和一些展望

本文证明了对于一般的二维 Lamé 方程, 解的第一个分量在相差最多 4 个常数的意义下决定方程的解. 这个结论具有重大的实际意义, 因为这将实际问题中对数据测量的要求基本减少了一半. 这从另外一个角度也解释了在一些实际问题中, 即使少量的数据也能得到比较满意的结果.

作为今后的研究方向, 我们将从以下几个角度对唯一延拓性问题进行进一步的研究:

- (1) Lamé 系数 μ 和 λ 仅具有 L^∞ 的正则性;
- (2) 二维 Lamé 方程 (2.1) 带有低阶项系数;
- (3) 三维 Lamé 方程, 即 $u = (u_1, u_2, u_3)^T$.

此外, 我们研究的另外一个重点是如何将得到的结果应用于 Lamé 方程有关反问题与控制问题的研究. 从实际应用的角度, 我们也将针对上述问题研究相应的计算方法.

参考文献

- 1 Egorov Y V. Linear Differential Equations of Principal Type. New York: Consultants Bureau, 1986
- 2 Hörmander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators I–IV. Berlin: Springer, 1985
- 3 Rauch J. Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1991
- 4 Saut J C, Scheurer B. Unique continuation for some evolution equations. *J Differential Equations*, 1987, 66: 118–139
- 5 Canuto B, Rosset E, Vessella S. Quantitative estimates of unique continuation for parabolic equations and inverse initial-boundary value problems with unknown boundaries. *Trans Amer Math Soc*, 2001, 354: 491–535
- 6 Vessella S. Quantitative estimates of unique continuation for parabolic equations, determination of unknown time-varying boundaries and optimal stability estimates. *Inverse Problems*, 2008, 24: 023001
- 7 Yamamoto M. Carleman estimates for parabolic equations and applications. *Inverse Problems*, 2009, 25: 123013
- 8 Imanuvilov O Y. Exact boundary controllability of the parabolic equation. *Russian Math Surveys*, 1993, 48: 211–212
- 9 Russell D L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: Recent progress and open questions. *SIAM Rev*, 1978, 20: 639–739
- 10 Tataru D. Boundary controllability for conservative PDE. *Appl Math Optim*, 1995, 31: 257–795
- 11 Benabdallah A, Cristofol M, Gaitan P, et al. Controllability to trajectories for some parabolic systems of three and two equations by one control force. *Math Control Related Fields*, 2014, 4: 17–44
- 12 Benabdallah A, Cristofol M, Gaitan P, et al. Inverse problem for a parabolic system with two components by measurements of one component. *Appl Anal*, 2009, 88: 683–709
- 13 Cristofol M, Gaitan P, Ramoul H. Inverse problems for a 2×2 reaction-diffusion system using a Carleman estimate with one observation. *Inverse Problems*, 2006, 22: 1561–1574
- 14 Cristofol M, Gaitan P, Ramoul H, et al. Identification of two coefficients with data of one component for a nonlinear parabolic system. *Appl Anal*, 2012, 91: 2073–2081
- 15 Dehman B, Robbiano L. La propriété du prolongement unique pour un système elliptique: Le système de Lamé. *J Math Pures Appl* (9), 1993, 72: 475–492
- 16 Ang D D, Ikehata M, Trong D D, et al. Unique continuation for a stationary isotropic Lamé system with variable coefficients. *Comm Partial Differential Equations*, 1998, 23: 371–385
- 17 Nakamura G, Wang J N. Unique continuation for an elasticity system with residual stress and its applications. *SIAM J Math Anal*, 2003, 35: 304–317
- 18 Lin C L, Wang J N. Strong unique continuation for the Lamé system with Lipschitz coefficients. *Math Ann*, 2005, 331: 611–629
- 19 Nakamura G, Wang J N. Unique continuation for the two-dimensional anisotropic elasticity system and its applications to inverse problems. *Trans Amer Math Soc*, 2006, 358: 2837–2853
- 20 Cheng J, Yamamoto M. Unique continuation on a line for harmonic functions. *Inverse Problems*, 1998, 14: 869–882
- 21 程晋. 一类三阶非线性偏微分方程初边值问题解的存在性. *复旦学报 (自然科学版)*, 1998, 27: 453–457

A new unique continuation property for the Lamé system in two dimensions

WANG YanBo, LIU YiKan & CHENG Jin

Abstract The unique continuation for partial differential equations means that the solutions on a small domain can uniquely determine the solutions on a larger connected domain. In this note, a new unique continuation property for the Lamé system in two dimensions is studied. We prove that, if only one component of the solution to a Lamé system can be measured on a small domain, the solution on a larger connected domain can be determined up to at most four constants.

Keywords unique continuation, Lamé systems, inverse problems

MSC(2010) 35Q72, 35R30, 65L80

doi: 10.1360/N012016-00195