分数 Brown 运动驱动带 Markov 切换的随机微分方程解的密度存在性

孙晓斌, 谢颖超*

江苏师范大学数学与统计学院, 徐州 221116
E-mail: xbsun@mail.nankai.edu.cn, ycxie@jsnu.edu.cn

收稿日期: 2015-02-07; 接受日期: 2015-03-19; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11271169) 和江苏高校优势学科资助项目

摘要 本文研究分数 Brown 运动驱动带 Markov 切换的随机微分方程, 获得了方程解的存在唯一性, 定义了关于解的条件 Malliavin 分析, 在扩散系数非退化的条件下, 证明了解的 Malliavin 正则性, 从而得到了解分布关于 Lebesgue 测度绝对连续.

关键词 随机微分方程 Malliavin 分析 分数 Brown 运动 Markov 切换

MSC (2010) 主题分类 34D08, 34D25, 60H20

1 引言

设 $\{B_t^H, t \geq 0\}$ 是一个 Hurst 参数为 H 的 d -维分数 Brown 运动, 其分量 $B_t^{H,1}, \dots, B_t^{H,d}$ 为 d 个协方差函数为

$$R_H(s, t) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H})$$

的中心 Gauss 过程.

本文固定 $H \in (1/2, 1)$, 考虑如下 $\mathbb{R}^n$ 上的随机微分方程:

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t b(X_s, \alpha_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, \alpha_s) dB_s^H, \\ (X_0, \alpha_0) = (x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\mathbb{S} = \{1, 2, \dots, m\}$, m 是某个确定的正整数, $b(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$, $\{\alpha_t, t \geq 0\}$ 是一个与 B_t^H 独立的 $\mathbb{S}$ -值 Markov 过程, 并且满足

$$\mathbb{P}\{\alpha_{t+\Delta} = j \mid \alpha_t = i\} = \begin{cases} q_{ij}\Delta + o(\Delta), & i \neq j, \\ 1 + q_{ii}\Delta + o(\Delta), & i = j, \end{cases}$$

这里 $Q = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ 是一个 Q -矩阵.

方程 (1.1) 中的随机积分可以这样理解: 记 τ_k 为 Markov 过程 α_t 的第 k 个跳时, 假设

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty,$$

英文引用格式: Sun X B, Xie Y C. The existence of the density for the solution of stochastic differential equation driven by fractional Brownian motion with Markovian switching (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 639–646, doi: 10.1360/N012015-00085

注意到 $\alpha_t \equiv \alpha_{\tau_k}$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, 因此, 对任意固定的时间 $t > 0$, 我们有

$$\int_0^t \sigma(X_s, \alpha_s) dB_s^H = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tau_k \wedge t}^{\tau_{k+1} \wedge t} \sigma(X_s, \alpha_{\tau_k}) dB_s^H.$$

上式右边除了有限项外均为 0, 积分 $\int_{\tau_k \wedge t}^{\tau_{k+1} \wedge t} \sigma(X_s, \alpha_{\tau_k}) dB_s^H$ 可理解为按轨道定义的 Riemann-Stieltjes 积分, 即可表示为用分数型分部积分公式表示的 Lebesgue 积分 (参见文献 [1]).

带 Markov 切换的随机微分方程已经被很多学者所研究 (参见文献 [2, 3] 及其相关的参考文献), 然而, 这些文献考虑的噪声都是经典的 Brown 运动噪声. 就我们的知识而言, 关于这个模型还没有研究驱动噪声是分数 Brown 运动的情形. 本文主要研究方程 (1.1) 解的存在唯一性, 并在扩散系数 $\sigma(\cdot)$ 非退化的条件下, 证明解的分布关于 Lebesgue 测度的绝对连续, 即方程 (1.1) 的解存在密度.

Malliavin 分析是研究随机变量的分布密度存在性和光滑性的有力工具之一, 虽然关于分数 Brown 运动驱动的随机微分方程, 文献 [4–7] 已经研究了其 Malliavin 分析及其性质, 但是对含有 Markov 切换的随机微分方程 (1.1), 研究其 Malliavin 分析及其性质是一个新问题, 其困难在于 Markov 切换项的出现. 根据 B_t^H 和 α_t 的独立性, 受文献 [8, 9] 的启发, 我们构造概率空间 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ 和 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$, 并在乘积空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)$ 上定义和研究 Malliavin 分析, 具体做法是引入条件 Malliavin 分析 (参见文献 [8, 9]).

本文的结构如下: 第 2 节引进一些符号和假设, 并给出方程 (1.1) 解的存在唯一性; 第 3 节研究方程 (1.1) 的 Malliavin 分析, 并获得其解密度的存在性.

2 解的存在唯一性

对任意固定的 $T > 0$, 记 $\Omega_1 = C_0([0, T]; \mathbb{R}^d)$ 为所有区间 $[0, T]$ 上初值为 0 的连续函数全体. 对固定 $H \in (1/2, 1)$, 则存在 Ω_1 上唯一的概率测度 $\mathbb{P}_1$, 使得在 $\mathbb{P}_1$ 下, 坐标过程 $B_t^H(\omega_1) = \omega_1(t)$, $t \in [0, T]$ 是一个 Hurst 参数为 H 的 d -维分数 Brown 运动. 记 $\mathcal{F}_1$ 为 Ω_1 上 Borel σ 域关于概率测度 $\mathbb{P}_1$ 的完备化, $\{\mathcal{F}_1(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ 为 $\{B_t^H, t \in [0, T]\}$ 的自然 σ 域流. 记 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ 为另一个完备带流且满足通常条件的概率空间, 使得 $\{\alpha_t, t \geq 0\}$ 为此概率空间上 $\mathbb{S}$ -值 Markov 过程. 在带流乘积概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1(t) \times \mathcal{F}_2(t), \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)$ 上, 定义 $B_t^H(\omega) = \omega_1(t)$ 和 $\alpha_t(\omega) = \alpha_t(\omega_2)$, 则随机过程 B_t^H 与 α_t 相互独立. 记 $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{E}_1$ 分别表示关于概率测度 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{P}_1$ 所对应的数学期望.

对于 $k \in \mathbb{N}$, 记 $C_b^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}; \mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}$ 上关于第一变量 k -次连续可微且直至 k 阶导数都有界 (对任意给定的 $\alpha \in \mathbb{S}$) 的 $\mathbb{R}^n$ -值函数 $f(x, \alpha)$ 的全体, $\nabla^k f(x, \alpha)$ 为 f 关于 x 的 k -阶导数. 对于任意的 $0 \leq a < b \leq T$, $\gamma > 0$, 定义 $C^\gamma([a, b]; \mathbb{R}^n)$ 为所有 γ -Hölder 连续函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的集合. 对于 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$, 定义

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}, \quad |\sigma| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d |\sigma_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

本文假设函数 $b(\cdot)$ 和 $\sigma(\cdot)$ 满足以下条件:

(H1) $b, \sigma_i \in C_b^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}; \mathbb{R}^n)$, $i = 1, \dots, d$;

(H2) 存在正常数 C 和 $\lambda > \frac{1}{H} - 1$ 使得

$$|\nabla \sigma_i(x, \alpha) - \nabla \sigma_i(y, \alpha)| \leq C|x - y|^\lambda, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{S}, \quad i = 1, \dots, d.$$

切换速率矩阵 $Q = (q_{ij})$ 满足如下条件:

(i) 存在常数 $K > 0$ 使得

$$\sup_{i,j \in \mathbb{S}} |q_{ij}| \leq K;$$

(ii) 对于 $i \neq j$, $q_{ij} \geq 0$;

(iii) 对于 $i \in \mathbb{S}$,

$$q_{ii} = - \sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

在上述假设下, 我们可以证明方程 (1.1) 存在唯一的强解. 对于 Markov 过程 α_t , 定义 $\tau_0 = 0$,

$$\tau_{k+1} := \inf\{t > \tau_k : \alpha_t \neq \alpha_{\tau_k}\}, \quad k \geq 0,$$

则 τ_k 为 α_t 的跳时, 而且

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k < \cdots.$$

利用条件 $\sup_{i,j \in \mathbb{S}} |q_{ij}| \leq K$, 我们可以得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

定理 2.1 假设条件 (H1) 和 (H2) 成立, 则方程 (1.1) 存在唯一的强解, 记为 $\{X_t\}_{t \geq 0}$, 并且 $X_*(\omega) \in C^{H-\epsilon}([\tau_k, \tau_{k+1}]; \mathbb{R}^n)$, $\mathbb{P}$ -a.s., $\forall k \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in (0, H)$.

证明 首先考虑区间 $[0, \tau_1]$. 由于 $t \in [0, \tau_1)$, $\alpha_t \equiv \alpha$. 考虑如下的随机微分方程:

$$X_t^{(1)} = x + \int_0^t b(X_s^{(1)}, \alpha) ds + \int_0^t \sigma(X_s^{(1)}, \alpha) dB_s^H, \quad t \in [0, \tau_1]. \quad (2.1)$$

由文献 [1, 定理 2.1] 可知, 在条件 (H1) 和 (H2) 下, 方程 (2.1) 有唯一的强解, 记为 $X_t^{(1)}$, 并且对于任意的 $\epsilon \in (0, H)$, 其轨道在 $[0, \tau_1]$ 上是 $(H - \epsilon)$ -Hölder 连续. 记

$$X_t = X_t^{(1)}, \quad 0 \leq t \leq \tau_1. \quad (2.2)$$

考虑随机微分方程

$$X_t^{(2)} = X_{\tau_1} + \int_{\tau_1}^t b(X_s^{(2)}, \alpha_{\tau_1}) ds + \int_{\tau_1}^t \sigma(X_s^{(2)}, \alpha_{\tau_1}) d\tilde{B}_s^H, \quad t \in [0, \tau_2 - \tau_1], \quad (2.3)$$

其中 $\tilde{B}_t^H := B_{t+\tau_1}^H - B_{\tau_1}^H$ 也是 Hurst 参数为 H 的 d -维分数 Brown 运动. 再由文献 [1, 定理 2.1], 方程 (2.3) 有唯一的强解 $X_t^{(2)}$, 并且对于任意的 $\epsilon \in (0, H)$, 其轨道在 $[0, \tau_2 - \tau_1]$ 上 $(H - \epsilon)$ -Hölder 连续.

类似文献 [10, 11] 中的方法, 令

$$X_t = X_{t-\tau_1}^{(2)}, \quad \tau_1 \leq t \leq \tau_2, \quad (2.4)$$

则 (2.2) 和 (2.4) 给出了在区间 $[0, \tau_2]$ 上, 方程 (1.1) 存在唯一的强解 X_t , 并且对 $j = 0, 1$ 和任意的 $\epsilon \in (0, H)$, $X_*(\omega) \in C^{H-\epsilon}([\tau_j, \tau_{j+1}]; \mathbb{R}^n)$. 重复以上步骤, 对于任意的 $k \in \mathbb{N}$, 我们可以得到在区间 $[0, \tau_k]$ 上, 方程 (1.1) 有唯一的强解 X_t , 并且对于 $j = 0, 1, \dots, k-1$ 和任意的 $\epsilon \in (0, H)$, $X_*(\omega) \in C^{H-\epsilon}([\tau_j, \tau_{j+1}]; \mathbb{R}^n)$. 因为 Markov 切换过程 $\alpha(t)$ 在有限时间内只有有限多个跳, 并且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.},$$

所以, 利用文献 [10, 11] 中的方法可以证明方程 (1.1) 存在唯一的全局解 X_t . 进一步地, 通过直接的计算可以得到

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s, \alpha_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, \alpha_s) dB_s^H, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

证毕. $\square$

3 解密度的存在性

由 Malliavin 分析的性质知, 要获得方程 (1.1) 解密度存在, 我们只需研究方程 (1.1) 解的 Malliavin 正则性.

记 Γ 为 $[0, T]$ 上所有 $\mathbb{R}^d$ - 值纯断函数全体, 定义 $\mathcal{H}$ 为 Γ 关于如下内积的闭包:

$$\langle (\mathbf{1}_{[0, t_1]}, \dots, \mathbf{1}_{[0, t_d]}), (\mathbf{1}_{[0, s_1]}, \dots, \mathbf{1}_{[0, s_d]}) \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^d R_H(t_i, s_i),$$

其中

$$\begin{aligned} R_H(t, s) &= \int_0^{t \wedge s} K_H(t, r) K_H(s, r) dr, \quad t > s, \\ K_H(t, s) &= c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du, \quad t > s, \\ c_H &= \left(\frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H, H-\frac{1}{2})} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

$\beta(\cdot)$ 为 Beta 函数. 对于 $t \leq s$, 定义 $K_H(t, s) = 0$.

映射 $(\mathbf{1}_{[0, t_1]}, \dots, \mathbf{1}_{[0, t_m]}) \mapsto \sum_{i=1}^m B_{t_i}^{H,i}$ 能被等距延拓为从 $\mathcal{H}$ 到 $L^2(\Omega, \mathbb{P}_1)$ 的一个子空间上, 并记这个等距映射为 $\varphi \mapsto B^H(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{H}$.

定义算子 $K_H^*: \Gamma \rightarrow L^2([0, T], \mathbb{R}^d)$ 为

$$K_H^*((\mathbf{1}_{[0, t_1]}, \dots, \mathbf{1}_{[0, t_d]})) = (K_H(t_1, \cdot), \dots, K_H(t_d, \cdot)).$$

对于任意的 $\varphi, \psi \in \Gamma$, 定义

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle K_H^* \varphi, K_H^* \psi \rangle_{L^2([0, T], \mathbb{R}^d)} = \mathbb{E}_1(B^H(\varphi) B^H(\psi)).$$

于是, K_H^* 能被等距延拓为从 $\mathcal{H}$ 到 $L^2([0, T], \mathbb{R}^d)$ 的一个闭子空间上.

定义算子 $\mathcal{K}_H: L^2([0, T], \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{H}_H := \mathcal{K}_H(L^2([0, T], \mathbb{R}^d))$ 如下:

$$(\mathcal{K}_H h)(t) := \int_0^t K_H(t, s) h(s) ds.$$

空间 $\mathcal{H}_H$ 为分数维版本下的 Cameron-Martin 空间.

另一个算子 $\mathcal{R}_H = \mathcal{K}_H \circ K_H^*: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_H$ 定义为

$$\mathcal{R}_H \varphi(\cdot) = \int_0^\cdot K_H(\cdot, s) (K_H^* \varphi)(s) ds.$$

可以证明 $L^{1/H}([0, T], \mathbb{R}^d) \subset \mathcal{H}$. 并且对于任意的 $\varphi, \psi \in L^{1/H}([0, T], \mathbb{R}^d)$,

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} = H(2H-1) \int_0^T \int_0^T |s-t|^{2H-2} \langle \varphi(s), \psi(t) \rangle_{\mathbb{R}^d} ds dt.$$

记 $\mathcal{S}(\Omega_1)$ 是 Ω_1 上所有光滑柱状随机变量全体, $C_p^\infty(\mathbb{R}^m)$ 为 $\mathbb{R}^m$ 上光滑且所有阶导数均多项式增长的函数全体, 则对 $F \in \mathcal{S}(\Omega_1)$, 存在 $m \geq 1$, $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^m)$ 以及 $(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \mathcal{H}^m$, 使得 F 有如下形式:

$$F = f(B^H(\varphi_1), \dots, B^H(\varphi_m)).$$

定义 F 的 Malliavin 导数为

$$DF = \sum_{i=1}^m \partial_i f(B^H(\varphi_1), \dots, B^H(\varphi_m)) \varphi_i,$$

其中 $\partial_i f(\cdot)$ 为函数 f 关于第 i 个变量的导函数.

对任意的整数 $k > 1$, 我们可以同样定义 F 的 k 阶 Malliavin 导数 $D^k F$, $D^k F$ 可视为取值于 $\mathcal{H}^{\otimes k}$ 上的随机变量.

因为算子 $D^k: \mathcal{S}(\Omega_1) \mapsto L^p(\Omega_1, \mathcal{H}^{\otimes k})$ 可闭 (参见文献 [6]), 所以, 对于任意的 $p \geq 1$ 和 $k \in \mathbb{N}^*$, 我们可以在 $\mathcal{S}(\Omega_1)$ 上定义范数

$$\|F\|_{k,p} := [\mathbb{E}_1(|F|^p) + \sum_{j=1}^k \mathbb{E}_1(\|D^j F\|_{\mathcal{H}^{\otimes j}}^p)]^{\frac{1}{p}}.$$

记空间 $\mathbb{D}^{k,p}(\Omega_1)$ 为 $\mathcal{S}(\Omega_1)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{k,p}$ 的完备化空间. 局部化空间 $\mathbb{D}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega_1)$ 是满足以下条件随机变量 F 的全体. 若存在一序列 $\{(\Omega_{1,n}, F_n), n \geq 1\}$ 使得 $\Omega_{1,n} \uparrow \Omega_1$, $F_n \in \mathbb{D}^{k,p}(\Omega_1)$ 且在 $\Omega_{1,n}$ 上 $F = F_n$.

设 $F(\omega)$ 为 Ω 上的一个随机变量, 记 $F^{\omega_2}(\omega_1) := F(\omega_1, \omega_2)$,

$$\mathbb{D}^{k,p} := \mathbb{D}^{k,p}(\Omega) := \{F \text{ 为 } \Omega \text{ 上随机变量且 } F^{\omega_2} \in \mathbb{D}^{k,p}(\Omega_1) \text{ } \mathbb{P}_2\text{-a.s. } \omega_2 \in \Omega_2\}$$

和

$$\mathbb{D}_{\text{loc}}^{k,p} := \mathbb{D}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega) := \{F \text{ 为 } \Omega \text{ 上随机变量且 } F^{\omega_2} \in \mathbb{D}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega_1) \text{ } \mathbb{P}_2\text{-a.s. } \omega_2 \in \Omega_2\}.$$

设 $F = (F_1, \dots, F_n)$ 为 Ω 上的随机向量且满足 $F_i \in \mathbb{D}^{k,p}$, $i = 1, \dots, n$. F 的 Malliavin 协方差矩阵定义为

$$(M_F)_{ij}(\omega_1, \omega_2) := \langle DF_i^{\omega_2}, DF_j^{\omega_2} \rangle_{\mathcal{H}}, \quad i, j \leq n.$$

定理 3.1 设 $F = (F_1, \dots, F_n)$ 为 Ω 上满足如下条件的随机向量:

- (1) $F_i \in \mathbb{D}_{\text{loc}}^{k,p}$, $i = 1, \dots, n$;
- (2) Malliavin 协方差矩阵 M_F $\mathbb{P}$ -a.s. 可逆,

则 F 的分布函数关于 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度绝对连续.

证明 根据条件 (1) 和 (2), 由文献 [6, 定理 2.1.2] 可知, 对于几乎处处的 $\omega_2 \in \Omega_2$, F^{ω_2} 的分布关于 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度绝对连续, 因此, 对于任意 Lebesgue 测度为 0 的 Borel 集 $A \subset \mathbb{R}^n$, 我们有

$$\int_{\Omega_1} \mathbf{1}_A(F^{\omega_2}) d\mathbb{P}_1 = 0, \quad \mathbb{P}_2\text{-a.s.},$$

于是,

$$\int_{\Omega} \mathbf{1}_A(F) d\mathbb{P} = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \mathbf{1}_A(F^{\omega_2}) d\mathbb{P}_1 d\mathbb{P}_2 = 0,$$

即 F 的分布关于 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度绝对连续. 证毕. $\square$

对于给定的 $\omega_2 \in \Omega_2$ 和初值 $x \in \mathbb{R}^n$, 记 $X_t^{\omega_2}$ 为如下随机微分方程的解,

$$X_t^{\omega_2} = x + \int_0^t b(X_s^{\omega_2}, \alpha_s(\omega_2)) ds + \int_0^t \sigma(X_s^{\omega_2}, \alpha_s(\omega_2)) dB_s^H.$$

定义 $J_t^{\omega_2}$ 为 $X_t^{\omega_2}$ 关于初值 x 的导数矩阵. 根据文献 [4, 引理 4.2], 容易证明 $J_t^{\omega_2}$ 满足如下方程:

$$J_t^{\omega_2} = \mathbf{I} + \int_0^t \nabla b(X_s^{\omega_2}, \alpha_s(\omega_2)) J_s^{\omega_2} ds + \int_0^t \nabla \sigma(X_s^{\omega_2}, \alpha_s(\omega_2)) J_s^{\omega_2} dB_s^H,$$

其中 $\mathbf{I}$ 为单位矩阵.

设 $b, \sigma_i \in C_b^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}, \mathbb{R}^n)$, $i = 1, \dots, d$, 根据文献 [7, 定理 6] 可知, $X_t^{i, \omega_2} \in \mathbb{D}_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega_1)$, $i = 1, \dots, n$, $t \in [0, T]$, 其中 X_t^{i, ω_2} 为 $X_t^{\omega_2}$ 的第 i 个分量. 进一步地, 再利用文献 [4, 引理 4.2], 我们有

$$D_s^j X_t^{\omega_2} := (D_s^j X_t^{1, \omega_2}, \dots, D_s^j X_t^{n, \omega_2})^T = J_t^{\omega_2} \circ (J_s^{\omega_2})^{-1} \sigma_j(X_s^{\omega_2}, \alpha_s(\omega_2)),$$

其中 $D_s^j X_t^{i, \omega_2}$ 为 $D_s X_t^{i, \omega_2}$ 的第 j 个分量.

因此, X_t 的 Malliavin 协方差矩阵可表为

$$M_t = \langle DX_t^{\omega_2}, (DX_t^{\omega_2})^T \rangle_{\mathcal{H}} = J_t^{\omega_2} C_t (J_t^{\omega_2})^T,$$

其中

$$\begin{aligned} C_t &:= H(2H-1) \int_0^t \int_0^t |u-\nu|^{2H-2} (J_u^{\omega_2})^{-1} \sigma(X_u^{\omega_2}, \alpha_u(\omega_2)) \sigma^T(X_\nu^{\omega_2}, \alpha_\nu(\omega_2)) ((J_\nu^{\omega_2})^{-1})^T du d\nu \\ &= \langle (J_t^{\omega_2})^{-1} \sigma(X_t^{\omega_2}, \alpha_t(\omega_2)) \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot), ((J_t^{\omega_2})^{-1} \sigma(X_t^{\omega_2}, \alpha_t(\omega_2)))^T \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot) \rangle_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

σ^T , $(J_t^{\omega_2})^T$ 和 $((J_s^{\omega_2})^{-1})^T$ 为相应矩阵 σ , $J_t^{\omega_2}$ 和 $(J_s^{\omega_2})^{-1}$ 的转置.

定理 3.2 假设 $b, \sigma_i \in C_b^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}, \mathbb{R}^n)$ ($i = 1, \dots, d$), 并且由 $\{\sigma_1(x, \alpha), \dots, \sigma_d(x, \alpha)\}$ 张成的向量空间为 $\mathbb{R}^n$, 则对于任意的 $t \in [0, T]$, X_t 的分布关于 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度绝对连续.

证明 根据上述讨论, 对于任意的 $t \in [0, T]$, $i = 1, \dots, n$, 我们可以得到 $X_t^{i, \omega_2} \in \mathbb{D}_{\text{loc}}^{1,2}$. 因此, 定理 3.1 表明, 我们只需证明 X_t 的 Malliavin 协方差矩阵 $M_t = J_t^{\omega_2} C_t (J_t^{\omega_2})^T$ $\mathbb{P}$ -a.s. 可逆, 即只要证明

$$\mathbb{P}(\det C_t = 0) = 0.$$

假设存在一个向量 $\nu \in \mathbb{R}^n$, $\nu \neq 0$, 使得 $\nu^T C_t \nu = 0$. 记 $\{f_m, m \geq 1\}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一组完备正交基. 由 (3.1) 可知,

$$\nu^T C_t \nu = \sum_{m \geq 1} | \langle (J_t^{\omega_2})^{-1} \sigma(X_t^{\omega_2}, \alpha_t(\omega_2)) \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot), f_m \rangle_{\mathcal{H}}, \nu \rangle_{\mathbb{R}^n} |^2.$$

于是, 对于任意的 $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \langle (J_t^{\omega_2})^{-1} \sigma(X_t^{\omega_2}, \alpha_t(\omega_2)) \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot), f_m \rangle_{\mathcal{H}}, \nu \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \left\langle \int_0^t (J_s^{\omega_2})^{-1} \sigma(X_s^{\omega_2}, \alpha_s(\omega_2)) d(\mathcal{R}_H f_m)(s), \nu \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \int_0^t ((J_s^{\omega_2})^{-1} \sigma(X_s^{\omega_2}, \alpha_s(\omega_2)))_{ij} \nu_i d(\mathcal{R}_H f_m)_j(s) \\
&= \sum_{j=1}^d \int_0^t \sum_{i=1}^n ((J_s^{\omega_2})^{-1} \sigma(X_s^{\omega_2}, \alpha_s(\omega_2)))_{ij} \nu_i d(\mathcal{R}_H f_m)_j(s) \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n ((J_s^{\omega_2})^{-1} \sigma(X_s^{\omega_2}, \alpha_s(\omega_2)))_{i\cdot} \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot), f_m \right\rangle_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

进而有

$$\left\| \sum_{i=1}^n ((J_s^{\omega_2})^{-1} \sigma(X_s^{\omega_2}, \alpha_s(\omega_2)))_{i\cdot} \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot) \right\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

因此, 对于任意的 $s \in [0, t]$,

$$\sum_{i=1}^n ((J_s^{\omega_2})^{-1} \sigma(X_s^{\omega_2}, \alpha_s(\omega_2)))_{i\cdot} \nu_i = 0.$$

特别地, 取 $s = 0$, 我们有 $\sum_{i=1}^n \sigma_{ij}(x, \alpha) \nu_i = 0, j = 1, \dots, d$. 此与 $\sigma(x, \alpha)$ 非退化的假设矛盾. 证毕. $\square$

致谢 非常感谢胡耀忠教授有价值的讨论, 以及审稿专家给予的宝贵修改意见.

参考文献

- 1 Nualart D, Rascanu A. Differential equations driven by fractional Brownian motion. *Collect Math*, 2002, 53: 55–81
- 2 Mao X. Stability of stochastic differential equations with Markovian switching. *Stochastic Process Appl*, 1999, 79: 45–67
- 3 Yuan C, Mao X. Asymptotic stability in distribution of stochastic differential equations with Markovian switching. *Stochastic Process Appl*, 2003, 103: 277–291
- 4 Baudoin F, Hairer M. A version of Hörmander's theorem for the fractional Brownian motion. *Probab Theory Related Fields*, 2007, 139: 373–395
- 5 Hu Y, Nualart D. Differential equations driven by Hölder continuous functions of order greater than 1/2. In: *Stochastic Analysis and Applications Abel Symposia*, vol. 2. Berlin: Springer, 2007, 399–413
- 6 Nualart D. *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Berlin: Springer, 2006
- 7 Nualart D, Saussereau B. Malliavin calculus for stochastic differential equations driven by a fractional Brownian motion. *Stochastic Process Appl*, 2009, 119: 391–409
- 8 Zhang X. Densities for SDEs driven by degenerate α -stable processes. *Ann Probab*, 2014, 42: 1885–1910
- 9 Zhang X. Nonlocal Hörmander's hypoellipticity theorem. *Arxiv:1306.5016*, 2014
- 10 Dong Z, Xie Y. Global solutions of stochastic 2D Navier-Stokes equations with Lévy noise. *Sci China Ser A*, 2009, 52: 1497–1524
- 11 Dong Z, Xie Y. Ergodicity of stochastic 2D Navier-Stokes equation with Lévy noise. *J Differential Equations*, 2011, 251: 196–222

The existence of the density for the solution of stochastic differential equation driven by fractional Brownian motion with Markovian switching

SUN XiaoBin & XIE YingChao

Abstract This paper studies the solution of stochastic differential equation driven by fractional Brownian motion with Markovian switching. We get the existence and uniqueness for the solution. The conditional Malliavin

calculus is defined. And the Malliavin regularity of the solution is obtained under the nondegenerate condition of the diffusion coefficient. This yields that the law of the solution is absolute continuity with respect to the Lebesgue measure.

Keywords stochastic differential equation, Malliavin calculus, fractional Brownian motion, Markovian switching

MSC(2010) 34D08, 34D25, 60H20

doi: 10.1360/N012015-00085