自由随机变量和的凹 Φ 不等式

彭丽华, 焦勇*

中南大学数学与统计学院, 长沙 410085

E-mail: lihuap@csu.edu.cn, jiaoyong@csu.edu.cn

收稿日期: 2015-01-31; 接受日期: 2015-03-26; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11471337) 和湖南省自然科学基金 (批准号: 14JJ1004) 资助项目

摘要 设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是非交换的概率空间, $(x_k)_{k=1}^n$ 是 $L_0(\mathcal{M})$ 中的一个自由的随机变量序列. 设 Φ 是 $[0, \infty)$ 上递增的凹函数, 满足 $\Phi(0) = 0$. 本文主要研究当 $x_k, 1 \leq k \leq n$ 是正随机变量时, $\tau\Phi(\sum_{k=1}^n x_k)$ 与这个随机变量序列不交和的 Φ -距 $(\tau \otimes \text{tr})\Phi(\sum_{k=1}^n x_k \otimes e_k)$ 之间的关系.

关键词 自由随机变量 Φ -不等式 Kruglov 算子 非交换的极大算子

MSC (2010) 主题分类 46L53, 60G42

1 引言

在 1970 年, Rosenthal^[1] 证明了, 对任意均值为 0 的定义在 $[0, 1]$ 上的独立随机变量序列 $\{f_k\}_{1 \leq k \leq n}$ 和任意的 $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \approx \max \left\{ \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_2, \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \right)^{1/p} \right\}, \quad 2 < p < \infty. \quad (1.1)$$

设 $\bar{f}_k(t) = f_k(t-k+1)\chi_{[k-1, k)}(t), t > 0$, 则随机变量 $f_k, 1 \leq k \leq n$ 的不交和 $\bigoplus_{k=1}^n f_k := \sum_{k=1}^n f_k(\cdot - k + 1)\chi_{[k-1, k)}$ 是一个定义在区间 $(0, \infty)$ 上的 Lebesgue 可测函数. 那么, (1.1) 的等价性也就是说,

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \approx \left\| \bigoplus_{k=1}^n f_k \right\|_{L_p \cap L_2}, \quad 2 < p < \infty.$$

在对称函数空间的情形下, Johnson 和 Schechtman^[2] 给出了 Rosenthal 不等式的推广. 如果 E 是定义在 $[0, 1]$ 上的对称空间且 $1 \leq p \leq \infty$, Z_E^p 是定义在 $(0, \infty)$ 上的所有可测函数的集合且满足

$$\|f\|_{Z_E^p} = \|\mu(f)\chi_{[0, 1]}\|_E + \|\mu(f)\chi_{[1, \infty)}\|_{L_p} < \infty,$$

其中 $\mu(f)$ 是 f 的非增重排函数, 具体定义见第 2 节. Johnson 和 Schechtman^[2] 证明了, 对任意独立的均值为 0 的独立随机变量序列 (f_k) , 当存在某个 $p < \infty$ 使得 $L_p \subset E$ 时,

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \approx \left\| \bigoplus_{k=1}^n f_k \right\|_{Z_E^2}. \quad (1.2)$$

并且, 对任意独立的非负的随机变量序列 (f_k) , 当存在某个 $p < \infty$ 使得 $L_p \subset E$ 时,

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \approx \left\| \bigoplus_{k=1}^n f_k \right\|_{Z_E^1}. \quad (1.3)$$

基于文献 [3] 介绍的算子方法, Astashkin 和 Sukochev 证明了 (1.2) 和 (1.3) 成立当且仅当文献 [3] 定义的 Kruglov 算子在 E 上有界. 这个条件明显比存在 $p < \infty$ 使得 $L_p \subset E$ 要弱. 更多的 Kruglov 算子的应用参见文献 [4, 5]. 特别地, 文献 [3] 的算子方法最近在文献 [6] 中被扩展到 (非交换) 自由概率论领域. 通过定义和研究自由 Kruglov 算子, 他们得到了在自由概率理论中的 Johnson-Schechtman 不等式. 我们简要的回顾一下他们的主要结果. 设 $\mathcal{M}$ 是一个有限的 von Neumann 代数并赋予一个正规忠实规范的迹. 设 $E(\mathcal{M})$ 是一个具有 Fatou 范数的对称 Banach 算子空间, 则对任意 $E(\mathcal{M})$ 中的自由独立的对称分布随机变量序列 $(x_k)_{k=1}^n$, 有

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|_{E(\mathcal{M})} \approx \left\| \sum_{k=1}^n x_k \otimes e_k \right\|_{Z_E^2(\mathcal{M} \otimes \ell_\infty)}; \quad (1.4)$$

并且, 对任意 $E(\mathcal{M})$ 中的自由的非负随机变量序列 $(x_k)_{k=1}^n$, 有

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|_p \approx \left\| \sum_{k=1}^n x_k \otimes e_k \right\|_{Z_E^1(\mathcal{M} \otimes \ell_\infty)}, \quad (1.5)$$

其中, 这里的 (e_k) 是 ℓ_∞ 的标准基. 当 $E = L_p$, $1 \leq p < \infty$, 上述结果扩展了文献 [7, 的定理 A]; 并且取 $E = L_\infty$ 也可以扩展文献 [8] 的结果.

在文献 [9–12] 中关于非交换的 Φ - 不等式被研究, 在最近的文献 [13] 中, (1.4) 和 (1.5) 被扩展到 Φ - 不等式情形下, 其中 Φ 是一个满足 Δ_2 - 条件的 Orlicz 函数 (见第 2 节, Δ_2 - 条件的定义). 本文考虑当 Φ 是凹函数时自由随机变量和的 Φ - 不等式和相应的极大不等式. 为了描述本文的主要结果, 对定义在 $(0, \infty)$ 上的任意可测函数 f 和 $0 < q \leq \infty$, 我们定义

$$\Phi_q(f) = \Phi(\mu(f)\chi_{[0,1]}) + \Phi(\|\mu(f)\chi_{[1,\infty)}\|_q).$$

本文的主要结果可概括如下.

定理 1 设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个非交换概率空间, $(x_k)_{k=1}^n \in L_0(\mathcal{M})$ 是正的自由随机变量序列. 设 $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是一个增加的凹函数并满足 $\Phi(0) = 0$, 则

$$\tau\Phi\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \leq C_\Phi(\tau \otimes \text{tr})\Phi_1\left(\sum_{k=1}^n x_k \otimes e_k\right).$$

第 4 节也讨论了相关的反向不等式 (见推论 1).

Pisier^[14] (或 Junge^[15]) 定义了非交换极大算子, Bekjan 等人^[16] 介绍了非交换极大算子的 Φ - 距形式. 利用文献 [16] 中符号, 我们有如下定理.

定理 2 设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个非交换概率空间, $(x_k)_{k=1}^n \in L_0(\mathcal{M})$ 是正的自由随机变量序列. 设 $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是一个增加的凹函数并满足 $\Phi(0) = 0$, 则

$$\tau\Phi(\sup_{1 \leq k \leq n}^+ x_k) \approx (\tau \otimes \text{tr})\Phi_\infty\left(\sum_{k=1}^n x_k \otimes e_k\right).$$

在本文中, C_Φ 总是记为依赖于 Φ 的常数, 并且在各处取值不同. 对任意两个非负数 X 和 Y , $X \approx Y$ 的意思是存在一个常数 $C > 0$ 使得 $X \leq CY$ 并且 $Y \leq CX$.

2 准备工作

本节将介绍非交换概率空间、自由随机变量的一些基本定义和所需要用到的结果. 我们用算子代数的一些标准概念, 这些概念都可以在文献 [17, 18] 中找到.

2.1 非交换概率空间和凹函数

设 $\mathcal{M}$ 是一个有限的 von Neumann 代数并赋予一个忠实正规的迹 τ . 如果 $\tau(1) = 1$, 则称 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个非交换概率空间. $L_0(\mathcal{M})$ 记为关于 $(\mathcal{M}, \tau)$ 可测的所有算子的 $*$ - 拓扑代数. $L_0(\mathcal{M})$ 的拓扑是由依测度收敛确定的. 记 $L_0^h(\mathcal{M})$ 为在 $L_0(\mathcal{M})$ 中的所有自伴元素的集合, 这些元素称作随机变量. 任意 $x \in L_0^h(\mathcal{M})$, x 的分布函数定义为

$$\lambda(s, x) = \tau(e_{(s, \infty)}(x)), \quad -\infty < s < \infty,$$

其中 $e_{(s, \infty)}(x)$ 是 x 关于区间 (s, ∞) 的谱投影, 则 x 的非增奇异值函数 $\mu(x) : t \rightarrow \mu(t, x)$ 定义为

$$\mu(t, x) = \inf\{s > 0 : \lambda(s, |x|) \leq t\}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

如果 $\lambda(x) = \lambda(y)$, 那么随机变量 $x, y \in L_0^h(\mathcal{M})$ 称为同分布的. 对这样的算子, 我们也有 $\mu(x) = \mu(y)$. 更多的奇异值函数的性质请参见文献 [19].

设 Φ 是定义在 $[0, \infty)$ 上连续递增的函数满足 $\Phi(0) = 0$. 我们用 $\mathcal{S}$ 记这样函数的全体. 如果存在常数 $C > 0$ 使得对任意的 $t > 0$, $\Phi(2t) \leq C\Phi(t)$, 那么称 Φ 满足 Δ_2 - 条件. 在这种情形下, 我们记 $\Phi \in \Delta_2$. 容易看到 $\Phi \in \Delta_2$ 当且仅当对任意的 $a > 0$, 存在一个常数 $C_a > 0$ 使得对所有的 $t > 0$, $\Phi(at) \leq C_a\Phi(t)$ 成立. 设 $\Phi \in \mathcal{S}$ 是一个凹函数, 则 Φ 是次可加的, 也就是说, $\Phi(t+s) \leq \Phi(t) + \Phi(s)$. 显然, Φ 满足 Δ_2 - 条件. 给定一个 $\Phi \in \mathcal{S}$, 定义下列指标:

$$p_\Phi = \sup \left\{ p > 0 : \int_0^t s^{-p} \Phi(s) \frac{ds}{s} = O(t^{-p} \Phi(t)), \forall t > 0 \right\},$$

$$q_\Phi = \inf \left\{ q > 0 : \int_t^\infty s^{-q} \Phi(s) \frac{ds}{s} = O(t^{-q} \Phi(t)), \forall t > 0 \right\}.$$

在文献 [20] 中, 下列性质被证明,

- (1) 当 $\Phi \in \mathcal{S}$ 是一个凸函数时, $1 \leq p_\Phi \leq q_\Phi \leq \infty$;
- (2) $\Phi \in \Delta_2$ 当且仅当 $q_\Phi < \infty$ 当且仅当 $\sup_{t>0} t\Phi'(t)/\Phi(t) < \infty$.

更多信息参见文献 [20, 21]. 当 Φ 有凹函数时, 总有 $0 < p_\Phi \leq q_\Phi < \infty$.

任意 $x \in L_0(\mathcal{M})$, 由 $|x|$ 的谱分解, 我们有

$$\tau(\Phi(|x|)) = \int_0^\infty \lambda(s, |x|) d\Phi(s) = \int_0^\infty \Phi(\mu(t, x)) dt.$$

由文献 [19, 命题 4.6], 对任意 $\Phi \in \mathcal{S}$ 的凹函数, 我们有

$$\tau(\Phi(|x+y|)) \leq \tau(\Phi(|x|)) + \tau(\Phi(|y|)). \quad (2.1)$$

记 $L_\Phi(\mathcal{M})$ 是 $L_0(\mathcal{M})$ 中所有自伴元 x 的集合, 且满足拟范数

$$\|x\|_{L_\Phi(\mathcal{M})} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_0^\infty \Phi\left(\frac{|\mu(t, x)|}{\lambda}\right) dt \leq 1 \right\} < \infty.$$

2.2 自由随机变量和自由 Kruglov 算子

设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个非交换概率空间. 我们称 $\mathcal{M}$ 的 von Neumann 子代数 $\mathcal{M}_i, i \in I$ 是关于 τ 自由的 (或自由的), 如果对任意的 $1 \leq j \leq n, n \in \mathbb{N}$, 当 $x_j \in \mathcal{M}_{i_j}, i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_n$ 且 $\tau(x_j) = 0$ 时, 有 $\tau(x_1 \cdots x_n) = 0$. 如果由 $\{x_j\}_{j=1}^n$ 生成的 von Neumann 子代数是自由的, 则称随机变量序列 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 为自由的.

下面的定义来自文献 [22, 23].

定义 1 一个 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 称为一个 von Neumann 子代数 $\mathcal{M}_i, i \in I$ 的自由积, 如果对每个 von Neumann 代数 $\mathcal{N}$ 和每个 $*$ -同态 $\pi_i: \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{N}$, 存在唯一的一个 $*$ -同态 $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ 使得 $\pi_i = \pi|_{\mathcal{M}_i}$. von Neumann 子代数 $\mathcal{M}_i, i \in I$ 的自由积记为 $\star_{i \in I} \mathcal{M}_i$.

设 $\mathbb{F}_\infty$ 是可数个生成子的自由群. 我们把关于 $\mathbb{F}_\infty$ 上的 von Neumann 群代数记为 $L_\infty(\mathbb{F}_\infty)$. 众所周知, 这个代数是有限因子并且满足 $L_\infty(\mathbb{F}_\infty) \simeq L_\infty(\mathbb{F}_\infty) \star L_\infty(\mathbb{F}_\infty)$.

引理 1 [6] 设 $x_1, \dots, x_n \in L_0^h(\mathcal{M})$ 是自由随机变量序列, 则 $\sum_{k=1}^n x_k$ 的分布是由 $x_k, 1 \leq k \leq n$ 的分布唯一确定, 即如果对 $1 \leq k \leq n, \mu(x_k) = \mu(y_k)$, 那么,

$$\mu\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) = \mu\left(\sum_{k=1}^n y_k\right).$$

下面介绍文献 [6] 中定义的自由 Kruglov 算子, 它是基于文献 [24] 中的构造.

定义 2 设 $L_\infty(\mathbb{F}_\infty) = \mathcal{M}_0 \star \mathcal{M}_1$, 其中 $\mathcal{M}_i \simeq L_\infty(\mathbb{F}_\infty), i = 0, 1$. 设 $w \in \mathcal{M}_1$ 是一个半圆随机变量, 也即随机变量的分布函数支撑在区间 $(-2, 2)$ 且有密度 $\frac{1}{2\pi}(4-t^2)^{1/2}$. 选择适当的迹使得 $L_0(0, 1)$ 保距嵌入到 $L_0^h(\mathcal{M}_0)$. 定义 Kruglov 算子 $K: L_0(0, 1) \rightarrow L_0(\mathbb{F}_\infty)$ 是映射 $x \rightarrow wxw$ (从 $L_0(\mathbb{F}_\infty)$ 到 $L_0(\mathbb{F}_\infty)$), 将 $L_0(\mathbb{F}_\infty)$ 限制到子代数 $L_0(0, 1)$ 上.

下面的定理参见文献 [24, 推论 1.8] 或 [6, 定理 22].

定理 3 如果 $x_k \in L_0(0, 1), 1 \leq k \leq n$ 是不交支撑函数序列, 则 $Kx_k, 1 \leq k \leq n$ 是自由随机变量序列.

为了描述 Kruglov 算子的技巧性估计, 我们回忆一下扩张算子 $\sigma_s: L_0(0, 1) \rightarrow L_0(0, 1), s \in (0, 1)$ 定义为 $(\sigma_s x)(t) = x(\frac{t}{s})$, 如果 $t \in (0, s)$; 否则 $(\sigma_s x)(t) = 0$. 下面的引理是文献 [6, 命题 25].

引理 2 对每个正的 $x \in L_0(0, 1)$, 我们有

$$\frac{2}{5}\sigma_{1/20}\mu(x) \leq \mu(Kx) \leq 4\mu(x).$$

3 定理 1 的证明

本节主要来证明定理 1. 这里的方法和技巧来源于文献 [6, 13].

引理 3 设 $\Phi \in \mathcal{S}$ 是一个凹函数. 设 $(x_k)_{k=1}^n \subset L_0(\mathcal{M})$ 和 $(y_k)_{k=1}^n \subset L_0(\mathbb{F}_\infty)$ 是自由随机变量序列. 如果对某个 $m \in \mathbb{N}$ 和任意 $1 \leq k \leq n$, 有 $x_k, y_k \geq 0$ 和 $\mu(y_k) = \sigma_{1/m}\mu(x_k)$, 则

$$\tau\Phi\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \tau\Phi\left(\sum_{k=1}^n y_k\right). \quad (3.1)$$

证明 设 $L_\infty(\mathbb{F}_\infty) = \star_{k=1}^n \mathcal{M}_k$, 其中 $\mathcal{M}_k \simeq L_\infty(\mathbb{F}_\infty), 1 \leq k \leq n$. 对任意的 k , 我们选择两两正交的投影 $p_{kj} \in \mathcal{M}_k$ 使得 $\tau(p_{kj}) = 1/m$. 假设 $\bar{y}_{kj} \subset L_0(\mathcal{M}_k)$ 是正的随机变量并满足 $\text{supp}(\bar{y}_{kj}) \leq p_{kj}$ 且

$\mu(\bar{y}_{kj}) = \mu(y_k)$. 由于对任意 $1 \leq j \leq m$, $\text{supp}(\bar{y}_{kj})$ 是两两正交的, 则 $\mu(\sum_{j=1}^m \bar{y}_{kj}) = \mu(x_k)$. 对每一个固定的 $1 \leq j \leq m$, 随机变量序列 $(\bar{y}_{kj})_k$ 是自由的; 更进一步, 随机变量序列 $(\sum_{j=1}^m \bar{y}_{kj})_k$ 也是自由的. 由引理 1,

$$\mu\left(\sum_{k=1}^n \bar{y}_{kj}\right) = \mu\left(\sum_{k=1}^n y_k\right), \quad \mu\left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{y}_{kj}\right) = \mu\left(\sum_{j=1}^m x_k\right), \quad 1 \leq j \leq m.$$

所以,

$$\begin{aligned} \tau\Phi\left(\left|\sum_{k=1}^n x_k\right|\right) &= \mathbb{E}\Phi\left(\mu\left(\sum_{j=1}^m x_k\right)\right) = \mathbb{E}\Phi\left(\mu\left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{y}_{kj}\right)\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^m \mathbb{E}\Phi\left(\mu\left(\sum_{k=1}^n \bar{y}_{kj}\right)\right) = m\mathbb{E}\Phi\left(\mu\left(\sum_{k=1}^n y_k\right)\right) \\ &\leq m\tau\Phi\left(\left|\sum_{k=1}^n y_k\right|\right). \end{aligned}$$

引理证毕. $\square$

命题 1 设 $\Phi \in \mathcal{S}$ 是一个凹函数. 设 $(x_k)_{k=1}^n \subset L_0(\mathcal{M})$ 是自由随机变量使得 $\sum_{k=1}^n \tau(\text{supp}(x_k)) \leq 1$, 则

$$\tau\Phi\left(\left|\sum_{k=1}^n x_k\right|\right) \leq 200(\tau \otimes \text{tr})\Phi\left(\left|\sum_{k=1}^n x_k \otimes e_k\right|\right). \quad (3.2)$$

证明 不失一般性我们假设 $x_k, 1 \leq k \leq n$ 是正的. 设 $L_\infty(\mathbb{F}_\infty) = \star_{k=1}^n \mathcal{M}_k$, 其中 $\mathcal{M}_k \simeq L_\infty(\mathbb{F}_\infty)$, $1 \leq k \leq n$. 由引理 2, 我们有

$$\sigma_{1/20}\mu(x_k) \leq \frac{5}{2}\mu(K\mu(x_k)) \leq 10\mu(x_k), \quad 1 \leq k \leq n.$$

所以, 我们可以选择 $y_k, C_k \in L_0^+(\mathcal{M}_k)$ 使得 $y_k \leq \frac{5}{2}C_k$ 且

$$\mu(y_k) = \sigma_{1/20}\mu(x_k), \quad \mu(C_k) = \mu(K\mu(x_k)), \quad 1 \leq k \leq n.$$

由引理 3 得到

$$\tau\Phi\left(\left|\sum_{k=1}^n x_k\right|\right) \leq 20\tau\Phi\left(\left|\sum_{k=1}^n y_k\right|\right) \leq 50\tau\Phi\left(\left|\sum_{k=1}^n C_k\right|\right). \quad (3.3)$$

因为 $\sum_{k=1}^n \tau(\text{supp}(x_k)) \leq 1$, 所以, $\bigoplus_{k=1}^n \mu(x_k) \in L_0(0, 1)$. 由定理 4、引理 1 和 2, 我们得到

$$\mu\left(\sum C_k\right) = \mu\left(K\left[\bigoplus_{k=1}^n \mu(x_k)\right]\right) \leq 4\mu\left(\bigoplus_{k=1}^n \mu(x_k)\right).$$

所以,

$$\tau\Phi\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \tau\Phi\left(K\left[\bigoplus_{k=1}^n \mu(x_k)\right]\right) \leq 200\tau\Phi\left(\bigoplus_{k=1}^n \mu(x_k)\right).$$

命题证毕. $\square$

定理 4 设 $\Phi \in \mathcal{S}$ 是一个凹函数. 如果 $(x_k)_{k=1}^n \subset L_0(\mathcal{M})$ 是正的自由随机变量序列, 那么,

$$\tau\Phi\left(\sum_k x_k\right) \leq C_\Phi(\tau \otimes \text{tr})\Phi_1\left(\sum_k x_k \otimes e_k\right).$$

证明 令 $X = \bigoplus_{k=1}^n \mu(x_k)$, 定义两个随机变量序列

$$A_{1k} = x_k e_{(\mu(1, X), \infty)}(x_k), \quad A_{2k} = x_k - A_{1k}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

则 (A_{1k}) 是自由随机变量序列, 所以, 随机变量序列 (A_{2k}) 也是自由的. 容易验证,

$$\mu(X)\chi_{[0,1]} = \max \left\{ \mu \left(\bigoplus_{k=1}^n \mu(A_{1k}) \right), \mu(1, X)\chi_{[0,1]} \right\}.$$

从而,

$$\mu \left(\bigoplus_{k=1}^n \mu(A_{1k}) \right) \leq \mu(X)\chi_{[0,1]}, \quad \mu \left(\bigoplus_{k=1}^n \mu(A_{2k}) \right) \leq \min\{\mu(X), \mu(1, X)\}. \quad (3.4)$$

我们注意到

$$\sum_{k=1}^n \tau(\text{supp}(A_{1k})) \leq \sum_{k=1}^n \{\mu(x_k) > \mu(1, X)\} = \{X > \mu(1, X)\} \leq 1.$$

由命题 1 得到

$$\tau\Phi \left[\sum_k^n x_k \right] \leq \tau\Phi \left[\sum_{k=1}^n A_{1k} \right] + \tau\Phi \left[\sum_{k=1}^n A_{2k} \right] \leq \tau\Phi \left[\bigoplus_{k=1}^n \mu(A_{1k}) \right] + \tau\Phi \left[\left\| \sum_{k=1}^n A_{2k} \right\| \right].$$

由文献 [6, 推论 3.3(a)], 我们有

$$\tau\Phi \left[\sum_{k=1}^n A_{2k} \right] \leq \tau\Phi \left[\left\| \sum_{k=1}^n A_{2k} \right\|_{\infty} \right] \leq C_{\Phi} \Phi \left[\left\| \bigoplus_{k=1}^n \mu(A_{2k}) \right\|_{L_1 \cap L_{\infty}} \right]. \quad (3.5)$$

因此,

$$\begin{aligned} \tau\Phi \left[\sum_k^n x_k \right] &\leq \tau\Phi \left[\sum_{k=1}^n A_{1k} \right] + \tau\Phi \left[\sum_{k=1}^n A_{2k} \right] \\ &\leq \tau\Phi \left[\bigoplus_{k=1}^n \mu(A_{1k}) \right] + \tau\Phi \left[\left\| \bigoplus_{k=1}^n \mu(A_{2k}) \right\|_{L_1 \cap L_{\infty}} \right] \\ &\leq C_{\Phi}(\tau\Phi[\mu(X)\chi_{[0,1]}] + \Phi[\|\min\{\mu(X), \mu(1, X)\}\|_{L_1 \cap L_{\infty}}]) \\ &\leq C_{\Phi}(\tau\Phi[\mu(X)\chi_{[0,1]}] + \Phi[\|\min\{\mu(X), \mu(1, X)\}\|_{L_1}] + \Phi(\mu(1, X))) \\ &\leq C_{\Phi}(\mathbb{E}\Phi[\mu(X)\chi_{[0,1]}] + \Phi[\|\min\{\mu(X), \mu(1, X)\}\|_{L_1}]). \end{aligned}$$

最后一个不等式是因为

$$\Phi(\mu(1, X)) = \mathbb{E}\Phi(\mu(1, X)\chi_{[0,1]}) \leq \mathbb{E}\Phi(\mu(X)\chi_{[0,1]}).$$

下面只需估计

$$\Phi(\|\min\{\mu(X), \mu(1, X)\}\|_{L_1}).$$

事实上,

$$\Phi(\|\min\{\mu(X), \mu(1, X)\}\|_{L_1}) \leq \Phi \left(\int_0^1 \mu(1, X) dt + \int_0^{\infty} \mu(X) dt \right)$$

$$\begin{aligned} &\leq 2\Phi(\mu(1, X)) + \Phi(\|\mu(X)\chi_{(1, \infty)}\|_{L_1}) \\ &\leq 2\mathbb{E}\Phi(\mu(X)\chi_{(0, 1)}) + \Phi(\|\mu(X)\chi_{(1, \infty)}\|_{L_1}). \end{aligned}$$

定理证毕. $\square$

注 1 在上述定理中, 如果对每个 $1 \leq k \leq n$, x_k 是对称分布, 则

$$\tau\Phi\left[\left\|\sum_{k=1}^n x_k\right\|\right] \leq C_\Phi(\tau \otimes \text{tr})\Phi_2\left[\left\|\sum_{k=1}^n x_k \otimes e_k\right\|\right].$$

事实上, 由文献 [6, 推论 3.3(b)], 我们仅仅需要将 (3.5) 换成

$$\tau\Phi\left[\left\|\sum_{k=1}^n A_{2k}\right\|\right] \leq \tau\Phi\left[\left\|\sum_{k=1}^n A_{2k}\right\|_\infty\right] \leq C_\Phi\Phi\left[\left\|\bigoplus_{k=1}^n \mu(A_{2k})\right\|_{L_2 \cap L_\infty}\right].$$

其他的证明完全类似定理 5 的证明.

4 极大 Φ - 不等式

本节将证明定理 2, 并且借助极大不等式讨论和定理 1 相关的反向不等式. 我们首先回忆非交换极大函数的定义, 这个定义的超有限情形是由 Pisier^[14] 介绍, 定义的一般情形由 Junge^[15] 介绍. 利用非交换极大函数, Junge 和 Xu^[25] 证明了非交换的极大遍历定理. 设 $1 \leq p \leq \infty$, 定义 $L_p(\mathcal{M}, \ell_\infty)$ 是由 $L_p(\mathcal{M})$ 中的序列 $x = (x_n)_{n \geq 1}$, 这些序列满足的条件是, 存在 $a, b \in L_{2p}(\mathcal{M})$ 和有界序列 $y = (y_n) \subset L_\infty(\mathcal{M})$ 使得

$$x_n = ay_nb, \quad n \geq 1.$$

$L_p(\mathcal{M}, \ell_\infty)$ 中的 x 范数定义为

$$\|x\|_{L_p(\mathcal{M}, \ell_\infty)} = \inf \left\{ \|a\|_{2p} \sup_n \|y_n\|_\infty \|b\|_{2p} \right\},$$

这里是对 x 的所有可能表达形式取的下确界. 容易看出 $(L_p(\mathcal{M}, \ell_\infty), \|\cdot\|_{L_p(\mathcal{M}, \ell_\infty)})$ 是一个 Banach 空间. 正的序列 $x = (x_n)$ 属于 $L_p(\mathcal{M}, \ell_\infty)$ 当且仅当存在一个 $a \in L_p^+(\mathcal{M})$ 使得对所有的 n , $x_n \leq a$. 更进一步, 在这种情形下,

$$\|x\|_{L_p(\mathcal{M}, \ell_\infty)} = \inf \{ \|a\|_p : a \in L_p^+(\mathcal{M}) \text{ 使得 } x_n \leq a, \forall n \geq 1 \}.$$

$L_p(\mathcal{M}, \ell_\infty)$ 中的 x 的范数常记为 $\|\sup_{n \geq 1}^+ x_n\|_p$. 请注意 $\|\sup_{n \geq 1}^+ x_n\|_p$ 仅仅是一个记号, 这是因为在非交换情形下, $\sup_{n \geq 1} x_n$ 没有任何意义. 我们用这个记号仅仅是为了方便. 容易看到

$$\|\sup_{n \geq 1}^+ x_n\|_p = \inf \left\{ \frac{1}{2} (\|a\|_{2p}^2 + \|b\|_{2p}^2) \sup_n \|y_n\|_\infty \right\}. \quad (4.1)$$

受到 (4.1) 的启发, Bekjan 等人^[16] 定义了对 Orlicz 函数的 $\tau\Phi[\sup^+ x_n]$.

定义 3 设 $\Phi \in \mathcal{S}$ 是一个凹函数并且 $x_n \in L_\Phi(\mathcal{M})$. 定义

$$\tau\Phi[\sup_{n \geq 1}^+ x_n] := \inf \left\{ \frac{1}{2} (\tau\Phi(|a|^2) + \tau\Phi(|b|^2)) \sup_{n \geq 1} \|y_n\|_\infty \right\}, \quad (4.2)$$

这里是对 $x_n = ay_nb$ 的所有分解取下确界, 对任意的这个分解中的 $a, b \in L_0(\mathcal{M})$ 且 $(y_n) \in L_\infty(\mathcal{M})$ 并满足 $|a|^2, |b|^2 \in L_\Phi(\mathcal{M})$ 和 $\sup_n \|y_n\|_\infty \leq 1$.

下面引理类似于文献 [16, 命题 3.1].

引理 4 设 $\Phi \in \mathcal{S}$ 是一个凹函数.

(1) 如果 $x = (x_n)$ 是一个正的序列并属于 $L_\Phi(\mathcal{M})$, 则

$$\tau\Phi[\sup_{n \geq 1}^+ x_n] \approx \inf\{\tau\Phi(a) : x_n \leq a, \forall n \geq 1, a \in L_\Phi^+(\mathcal{M})\};$$

(2) 对任意两个序 (x_n) 和 (y_n) 属于 $L_\Phi(\mathcal{M})$,

$$\tau\Phi[\sup_{n \geq 1}^+(x_n + y_n)] \leq \tau\Phi[\sup_{n \geq 1}^+ x_n] + \tau\Phi[\sup_{n \geq 1}^+ y_n].$$

证明 这个引理的证明几乎类似于文献 [16, 命题 3.1] 中的证明, 我们仅仅证明 (1). 首先不需要用到任何 Φ 的性质, $\tau\Phi[\sup_{n \geq 1}^+ x_n]$ 有下面的等价描述:

$$\tau\Phi[\sup_{n \geq 1}^+ x_n] = \inf \left\{ \frac{1}{2} (\tau\Phi(|a|^2) + \tau\Phi(|b|^2)) \right\}, \quad (4.3)$$

这里是对 $x_n = ay_nb$ 的所有分解取下确界, 其中 $a, b \in L_0(\mathcal{M})$ 且 $(y_n) \in L_\infty(\mathcal{M})$ 并满足 $|a|^2, |b|^2 \in L_\Phi(\mathcal{M})$ 和 $\sup_n \|y_n\|_\infty = 1$. 事实上, 对任意分解 $x_n = ay_nb$ 满足 $\sup_n \|y_n\|_\infty \leq 1$, 设 $\lambda = \sup_n \|y_n\|_\infty$ 并且 $\bar{a} = \lambda^{1/2}a$, $\bar{b} = \lambda^{1/2}b$ 和 $\bar{y}_n = y_n/\lambda$. 那么, $x_n = \bar{a}\bar{y}_n\bar{b}$ 并且 $\sup_n \|y_n\|_\infty = 1$, 而且

$$\tau\Phi(|\bar{a}|^2) + \tau\Phi(|\bar{b}|^2) \leq \lambda(\tau\Phi(|a|^2) + \tau\Phi(|b|^2)).$$

所以, (4.3) 成立. 现在设 $x_n = ay_nb$, 其中 $|a|^2, |b|^2 \in L_\Phi(\mathcal{M})$ 和 $\sup_n \|y_n\|_\infty = 1$. 不失一般性, 假设 $a, b \geq 0$. 令 $c = (a^2 + b^2)^{1/2}$, 那么存在部分等距同构 $u, v \in \mathcal{M}$ 使得 $a = cu$, $b = vc$. 于是, 对所有的 n , $x_n = cuy_nvc$ 并且 $x_n \leq c^2$. 通过 (2.1) 得到

$$\tau[\Phi(c^2)] = \tau[\Phi(a^2 + b^2)] \leq \tau[\Phi(a^2)] + \tau[\Phi(b^2)].$$

联合 (4.3), 我们证明了

$$\inf\{\tau\Phi(a) : x_n \leq a, \forall n \geq 1, a \in L_\Phi^+(\mathcal{M})\} \leq 2\tau\Phi[\sup_{n \geq 1}^+ x_n].$$

上述不等式的反向不等式是一个容易的事实, 这里省略细节. □

命题 2 设 $\Phi \in \mathcal{S}$ 是一个凹函数. 设 $(x_k)_{k=1}^n \subset L_\Phi(\mathcal{M})$ 是自由随机变量序列使得

$$\sum_{k=1}^n \tau(\text{supp}(x_k)) \leq 1,$$

则

$$\tau\Phi[\sup_{1 \leq k \leq n}^+ x_k] \leq (\tau \otimes \text{tr})\Phi\left(\sum_{k=1}^n x_k \otimes e_k\right). \quad (4.4)$$

证明 由引理 4 得到

$$\tau\Phi[\sup_{1 \leq k \leq n}^+ x_k] \leq \tau\Phi\left(\sum_{k=1}^n x_k\right).$$

由命题 1, 我们得到想要的结果. $\square$

定理 5 设 $(x_k)_{k=1}^n \subset L_\Phi(\mathcal{M})$ 是正的自由随机变量序列且满足 $\sum_{k=1}^n \tau(\text{supp}(x_k)) \leq 1$. 如果 $\Phi \in \mathcal{S}$ 是一个凹函数, 则

$$(\tau \otimes \text{tr})\Phi\left[\sum_k^n x_k \otimes e_k\right] \leq 2C_\Phi \tau\Phi[\text{sup}_{1 \leq k \leq n}^+ x_k].$$

证明 对任意的 $1 \leq k \leq n$, 设 $x_k \leq a \in L_\Phi(\mathcal{M})$. 选择合适的 $0 < p \leq 1$ 和 $1 \leq q < \infty$ 使得 $0 < p < p_\Phi \leq q_\Phi < pq < \infty$. 对任意的 $\lambda > 0$, 令

$$a_1 = ae_{(\lambda, \infty)}(a), \quad a_2 = a - a_1.$$

由于 $\Phi(t) = t^p$ 是一个算子单调函数, 对 $0 < p \leq 1$, 那么,

$$x_k^p \leq \text{supp}(x_k) a^p \text{supp}(x_k) = \text{supp}(x_k) a_1^p \text{supp}(x_k) + \text{supp}(x_k) a_2^p \text{supp}(x_k).$$

于是,

$$\begin{aligned} (\tau \otimes \text{tr})\left(e_{(\lambda, \infty)}\left(\sum_{k=1}^n x_k \otimes e_n\right)\right) &= e(\tau \otimes \text{tr})\left(e_{(\lambda^p, \infty)}\left(\sum_{k=1}^n x_k^p \otimes e_n\right)\right) \\ &\leq (\tau \otimes \text{tr})\left(e_{(\lambda^{p/2}, \infty)}\left(\sum_{k=1}^n \text{supp}(x_k) a_1^p \text{supp}(x_k) \otimes e_n\right)\right) \\ &\quad + (\tau \otimes \text{tr})\left(e_{(\lambda^{p/2}, \infty)}\left(\sum_{k=1}^n \text{supp}(x_k) a_2^p \text{supp}(x_k) \otimes e_n\right)\right). \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} (\tau \otimes \text{tr})\Phi\left(\sum_{k=1}^n x_k \otimes e_k\right) &= \int_0^\infty (\tau \otimes \text{tr})\left(e_{(\lambda^p, \infty)}\left(\sum_{k=1}^n x_k^p \otimes e_n\right)\right) d\Phi(\lambda) \\ &\leq \int_0^\infty (\tau \otimes \text{tr})\left(e_{(\lambda^{p/2}, \infty)}\left(\sum_{k=1}^n \text{supp}(x_k) a_1^p \text{supp}(x_k) \otimes e_n\right)\right) d\Phi(\lambda) \\ &\quad + \int_0^\infty (\tau \otimes \text{tr})\left(e_{(\lambda^{p/2}, \infty)}\left(\sum_{k=1}^n \text{supp}(x_k) a_2^p \text{supp}(x_k) \otimes e_n\right)\right) d\Phi(\lambda) \\ &\leq 2\left(\int_0^\infty \lambda^{-p} \left\|\sum_{k=1}^n \text{supp}(x_k) a_1^p \text{supp}(x_k) \otimes e_n\right\|_1 d\Phi(\lambda)\right. \\ &\quad \left.+ \int_0^\infty \lambda^{-pq} \left\|\sum_{k=1}^n \text{supp}(x_k) a_2^p \text{supp}(x_k) \otimes e_n\right\|_q^q d\Phi(\lambda)\right) \\ &=: 2(A + B). \end{aligned}$$

由假设 $\sum_{k=1}^n \tau(\text{supp}(x_k)) \leq 1$, 我们有

$$\left\|\sum_{k=1}^n \text{supp}(x_k)\right\|_\infty \leq 64.$$

事实上, 因为 $x_k, 1 \leq k \leq n$ 是自由的, 那么 x_k 的支撑序列 $\text{supp}(x_k), 1 \leq k \leq n$ 是自由的. 从而, 由文献 [6, 推论 33] 得到

$$\left\|\sum_{k=1}^n \text{supp}(x_k)\right\|_\infty \leq 64 \left\|\sum_{k=1}^n \text{supp}(x_k) \otimes e_k\right\|_{L_1 \cap L_\infty} = 64 \max\left\{\sum_{k=1}^n \tau(\text{supp}(x_k)), 1\right\} \leq 64.$$

由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} A &\leq \int_0^\infty \lambda^{-p} \left\| \sum_{k=1}^n \text{supp}(x_k) \right\|_\infty \|a_1\|_1 d\Phi(\lambda) \leq 64 \int_0^\infty \lambda^{-p} \|a_1\|_1 d\Phi(\lambda) \\ &\leq 64 \int_0^\infty \lambda^{-p} \int_\lambda^\infty t^p d\tau(e_t(a)) d\Phi(\lambda) = 64 \int_0^\infty t^p \left(\int_0^t \lambda^{-p} d\Phi(\lambda) \right) d\tau(e_t(a)). \end{aligned}$$

注意到 $\tau((\text{supp}(x_k) a_2^p \text{supp}(x_k))^q) \leq \tau(\text{supp}(x_k) a_2^{pq} \text{supp}(x_k))$. 记 $pq = r$, 则

$$\begin{aligned} B &\leq \int_0^\infty \lambda^{-r} \left\| \sum_{k=1}^n \text{supp}(x_k) \right\|_\infty \|a_2\|_r^r d\Phi(\lambda) \leq 64 \int_0^\infty \lambda^{-r} \|a_2\|_r^r d\Phi(\lambda) \\ &= \int_0^\infty t^r \left(\int_t^\infty \lambda^{-r} d\Phi(\lambda) \right) d\tau(e_t(a)). \end{aligned}$$

因 Φ 是凹函数, 我们知道 Φ 满足 Δ_2 - 条件, 这暗示了 $\sup_{t>0} \frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)} < \infty$, 则

$$\begin{aligned} (\tau \otimes \text{tr})\Phi \left(\sum_{k=1}^n x_k \otimes e_k \right) &\leq \int_0^\infty t^p \left(\int_0^t \lambda^{-p-1} \Phi(\lambda) d\lambda \right) d\tau(e_t(a)) \\ &\quad + \int_0^\infty t^q \left(\int_t^\infty \lambda^{-q-1} \Phi(\lambda) d\lambda \right) d\tau(e_t(a)). \end{aligned}$$

另一方面, 因 $0 < p < p_\Phi \leq q_\Phi < r < \infty$, 则对任意 $t > 0$, 我们有

$$\int_0^t \lambda^{-p} \Phi(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = O(t^{-p} \Phi(t)), \quad \int_t^\infty \lambda^{-r} \Phi(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = O(t^{-r} \Phi(t)).$$

所以,

$$(\tau \otimes \text{tr})\Phi \left(\sum_{k=1}^n x_k \otimes e_k \right) \leq C_\Phi \int_0^\infty \Phi(t) d\tau(e_t(a)) = C_\Phi \tau\Phi(a).$$

对 a 取下确界, 定理证毕. □

引理 4 和定理 5 给出了下面的推论.

推论 1 设 $(x_k)_{k=1}^n \subset L_\Phi(\mathcal{M})$ 是正的自由随机变量序列且满足 $\sum_{k=1}^n \tau(\text{supp}(x_k)) \leq 1$. 如果 Φ 是一个凹函数, 则

$$(\tau \otimes \text{tr})\Phi \left[\sum_k^n x_k \otimes e_k \right] \leq C_\Phi \tau\Phi \left[\sum_{k=1}^n x_k \right].$$

注 2 事实上, 上面的推论 1 是定理 1 在条件 $\sum_{k=1}^n \tau(\text{supp}(x_k)) \leq 1$ 下的反向不等式. 下面的两个定理给出了定理 2 的证明.

定理 6 设 $\Phi \in \mathcal{S}$ 是一个凹函数. 设 $(x_k)_{k=1}^n \subset L_0(\mathcal{M})$ 是正的自由随机变量序列, 则

$$\tau\Phi[\sup_{1 \leq k \leq n}^+ x_k] \leq 2(\tau \otimes \text{tr})\Phi_\infty \left[\sum_k^n x_k \otimes e_k \right].$$

证明 设 $X = \bigoplus_{k=1}^n \mu(x_k)$, 并定义两个随机变量序列

$$A_{1k} = x_k e_{(\mu(1.X), \infty)}(x_k), \quad A_{2k} = x_k - A_{1k}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

则 (A_{1k}) 是自由随机变量序列, 并且随机变量序列 (A_{2k}) 也是自由的. 不失一般性, 我们可以假定 (事实上, 在定理 4 的证明中我们也完全可以这样假设)

$$\mu\left(\bigoplus_{k=1}^n \mu(A_{1k})\right) = \mu(X)\chi_{[0,1]}, \quad \mu\left(\bigoplus_{k=1}^n \mu(A_{2k})\right) = \mu(X)\chi_{[1,\infty)}. \quad (4.5)$$

由引理 4、命题 1 和 (4.5), 得到

$$\begin{aligned} \tau\Phi[\sup_{1 \leq k \leq n}^+ x_k] &\leq \tau\Phi[\sup_{1 \leq k \leq n}^+ A_{1k}] + \tau\Phi[\sup_{1 \leq k \leq n}^+ A_{2k}] \\ &\leq \tau\Phi\left[\sum_{k=1}^n A_{1k} \otimes e_k\right] + \tau\Phi\left[\sup_k \|A_{2k}\|_\infty \cdot \mathcal{I}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\Phi[\mu(X)\chi_{(0,1)}] + \Phi\left[\sup_k \|A_{2k}\|_\infty\right] \\ &\leq \mathbb{E}\Phi[\mu(X)\chi_{(0,1)}] + \Phi[\mu(1, X)] \\ &\leq 2\mathbb{E}\Phi[\mu(X)\chi_{(0,1)}]. \end{aligned}$$

定理证毕. □

定理 7 设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是非交换概率空间. 若 $(x_k)_{k=1}^n \subset L_0(\mathcal{M})$ 是正的随机变量序列, 则

$$(\tau \otimes \text{tr})\Phi_\infty\left[\sum_k^n x_k \otimes e_k\right] \leq 4\tau\Phi[\sup_{1 \leq k \leq n}^+ x_k].$$

证明 设 $X = \bigoplus_{k=1}^n \mu(x_k)$. 定义 $A_{1k} = x_k e_{(\mu(1, X), \infty)}(x_k)$, $1 \leq k \leq n$, 则随机变量序列 A_{1k} , $1 \leq k \leq n$ 是自由的. 不失一般性, 我们有

$$\mu(X)\chi_{[0,1]} = \mu\left(\bigoplus_{k=1}^n \mu(A_{1k})\right).$$

由定理 5 得到

$$\begin{aligned} (\tau \otimes \text{tr})\Phi_\infty\left[\sum_k^n x_k \otimes e_k\right] &= \mathbb{E}\Phi(\mu(X)\chi_{[0,1]}) + \Phi(\|\mu(X)\chi_{[1,\infty)}\|_\infty) \\ &\leq 2\mathbb{E}\Phi(\mu(X)\chi_{(0,1)}) = 2\mathbb{E}\Phi\left(\mu\left(\bigoplus_{k=1}^n \mu(A_{1k})\right)\right) \\ &\leq 4\tau\Phi[\sup_{1 \leq k \leq n}^+ A_{1k}] \leq 4\tau\Phi[\sup_{1 \leq k \leq n}^+ x_k]. \end{aligned}$$

定理证毕. □

致谢 感谢两位匿名审稿人认真阅读和有帮助的建议.

参考文献

- 1 Rosenthal H. On the subspaces of L_2 ($p > 2$) spanned by the sequences of independent random variables. Israel J Math, 1970, 8: 273–303
- 2 Johnson W, Schechtman G. Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces. Ann Probab, 1989, 17: 789–808

- 3 Astashkin S, Sukochev F. Series of independent random variables in rearrangement invariant spaces: An operator approach. *Israel J Math*, 2005, 145: 125–156
- 4 Astashkin S, Sukochev F. Independent functions and the geometry of Banach spaces. *Russian Math Surveys*, 2010, 65: 1003–1081
- 5 Astashkin S, Sukochev F. Best constant in Rosenthal-type inequalities and the Kruglov operator. *Ann Probab*, 2010, 38: 1986–2008
- 6 Sukochev F, Zanin D. Josn-Schechman inequalities in the free probability theory. *J Funct Anal*, 2012, 263: 2921–1948
- 7 Junge M, Parcet J, Xu Q. Rosenthal type inequalities for free chaos. *Ann Probab*, 2007, 35: 1374–1437
- 8 Voiculescu D. A strengthened asymptotic freeness result for random matrices with applications to free entropy. *Int Math Res Not*, 1998, 1: 41–63
- 9 Bekjan T, Chen Z. Interpolation and Φ -moment inequalities of noncommutative martingales. *Probab Theory Related Fields*, 2012, 152: 179–206
- 10 Bekjan T, Chen Z, Liu P, et al. Noncommutative weak Orlicz spaces and martingale inequalities. *Studia Math*, 2011, 3: 195–212
- 11 Dirksen S. Weak-type interpolation for noncommutative maximal operators. *ArXiv:1212.5168v2*, 2013
- 12 Dirksen S, Ricard E. Some remarks on noncommutative Khintchine inequalities. *Bull Lond Math Soc*, 2013, 45: 618–624
- 13 Jiao Y, Sukochev F, Xie G, et al. Φ -moment inequalities for independent and freely independent random variables. Preprint, 2015
- 14 Pisier G. Non-commutative vector valued L_p -spaces and completely p -summing maps. *Astérisque*, 1998, 247: 1–131
- 15 Junge M. Doob's inequality for non-commutative martingales. *J Reine Angew Math*, 2002, 549: 149–190
- 16 Bekjan T, Chen Z, Osekowski A. Noncommutative maximal inequalities associated with convex functions. *ArXiv:1108.2795v5*, 2014
- 17 Kadison R V, Ringrose J R. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, vol. I: Elementary Theory. New York: Academic Press, 1983
- 18 Takesaki M. *Theory of Operator Algebras*, I. New York: Springer-Verlag, 1979
- 19 Fack T, Kosaki H. Generalised s -number of τ -measurable operators. *Pacific J Math*, 1986, 123: 269–300
- 20 Maligranda L. Indices and interpolation. *Dissertationes Math*, 1985, 234: 820076
- 21 Maligranda L. *Orlicz Spaces and Interpolation*. Seminars in Mathematics, Departamento de Matemática. Brasil: Universidade Estadual de Campinas, 1989
- 22 Nica A, Speicher R. *Lectures on the Combinatorics of Free Probability*. London Math Soc Lecture Note Ser, vol. 194. Cambridge: Cambridge University Press, 2006
- 23 Voiculescu D, Dykema K, Nica A. *Free Random Variables*. Providence, RI: Amer Math Soc, 1992
- 24 Nica A, Speicher R. On the multiplication of free N -tuples of noncommutative random variables. *Amer J Math*, 1996, 118: 799–837
- 25 Junge M, Xu Q. Noncommutative maximal ergodic theorems. *J Amer Math Soc*, 2006, 20: 385–439

Concave Φ -moment inequalities on sums of free random variables

PENG LiHua & JIAO Yong

Abstract Let $(\mathcal{M}, \tau)$ be a noncommutative probability space and $(x_k)_{k=1}^n \in L_0(\mathcal{M})$ be free random variables. Let Φ be an increasing and concave function on $[0, \infty)$ with $\Phi(0) = 0$. This paper characterize the quantity $\tau\Phi(\sum_{k=1}^n x_k)$ in term of the sum of disjoint copies of the given positive sequence.

Keywords free random variables, Φ -inequalities, Kruglov operator, noncommutative maximal operator

MSC(2010) 46L53, 60G42

doi: 10.1360/N012015-00070