Cantor 序列的 Hankel 行列式

文志雄^①, 武文^{②*}^① 华中科技大学数学与统计学院, 武汉 430074;^② 湖北大学数学与统计学学院, 武汉 430062

E-mail: zhi-xiong.wen@hust.edu.cn, wuwen@hubu.edu.cn

收稿日期: 2014-04-21; 接受日期: 2014-08-18; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11401188 和 11371156) 资助项目

摘要 本文给出 Cantor 序列的 Hankel 行列式的递推公式, 并证明其 Hankel 行列式是二维的 3- 自动机序列. 利用 Cantor 序列的 Hankel 行列式, 本文证明 Cantor 数 (即 b - 进制展式为 Cantor 序列的超越数) 的无理指数等于 2.

关键词 Cantor 序列 Hankel 行列式 自动机序列 无理指数

MSC (2010) 主题分类 11J04, 11J82, 41A21

1 引言

Cantor 代换 σ 是字符集 $\mathcal{A} = \{a, b\}$ 上的代换, 其定义如下:

$$\sigma : a \mapsto aba, \quad b \mapsto bbb.$$

因为词 $\sigma^n(a)$ 是 $\sigma^{n+1}(a)$ 的前缀, 即 $\sigma^{n+1}(a) = \sigma^n(a)w$, 其中 w 是字符集 $\mathcal{A}$ 上的有限词, 所以, 这一列有限词 $(\sigma^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ 收敛于无穷词

$$c := c_0 c_1 c_2 \cdots \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}},$$

称为 Cantor 序列. 本文取 $a = 1, b = 0$, 此时, 若 n 的 3- 进制展式中不含“1”, 则 $c_n = 1$; 否则 $c_n = 0$ (参见文献 [1, 2]). 下面是 Cantor 序列的前面几项:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
c_n	1	0	1	0	0	0	1	0	1	...

Cantor 序列是一个自动机序列^[1], 即它可以由有限自动机生成. 同时, Cantor 序列可以视为离散版本的 Cantor 三分集. 事实上, 利用 Dekking^[3] 介绍的办法, 我们可以从 Cantor 序列出发, 构造出 Cantor 三分集.

本文主要研究 Cantor 序列的 Hankel 行列式的性质.

英文引用格式: Wen Z X, Wu W. Hankel determinants of the Cantor sequence (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 1059–1072, doi: 10.1360/012014-53

1.1 Cantor 序列的 Hankel 行列式

设 $\mathbf{u} = u_0 u_1 \cdots u_n \cdots$ 为复数序列, 其 (p, n) 阶 Hankel 矩阵, 记为 H_n^p , 定义如下:

$$H_n^p = \begin{pmatrix} u_p & u_{p+1} & \cdots & u_{p+n-1} \\ u_{p+1} & u_{p+2} & \cdots & u_{p+n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ u_{p+n-1} & u_{p+n} & \cdots & u_{p+2n-2} \end{pmatrix},$$

其中 $n \geq 1$ 且 $p \geq 0$. $|H_n^p|$ 表示矩阵 H_n^p 的行列式.

一个序列的 Hankel 矩阵的正定性与矩问题的研究关联紧密^[4]. 序列的 Hankel 行列式的性质还与序列的组合性质的研究以及 Padé 逼近的问题相关^[5,6]. Kamae 等人^[7] 研究了 Fibonacci 词的 Hankel 行列式, 给出了 Hankel 行列式和 Padé 对的量化关系. 随后, Tamura^[8] 将这个结果推广到了一类特殊的序列. Allouche 等人^[9] 研究了 Thue-Morse 序列的 Hankel 行列式 $|\mathcal{E}_n^p|$, 并证明 Hankel 行列式 $|\mathcal{E}_n^p|$ (模 2) 是一个二维的 2- 自动机序列. 最近, Guo 等人^[10] 证明了折纸序列的 Hankel 行列式 (模 2) 是一个周期序列.

设 Γ_n^p 为 Cantor 序列的 (p, n) 阶 Hankel 矩阵. 本文主要研究二维序列 $\{|\Gamma_n^p|\}_{n,p \geq 0}$ 的性质, 证明如下结果 (本文主要结论):

- (1) 对任意 $p \geq 0$, 序列 $\{|\Gamma_n^p|\}_{n \geq 0}$ 是一个周期序列 (见定理 2);
- (2) 二维序列 $\{|\Gamma_n^p|(\text{模} 3)\}_{n,p \geq 0}$ 是 3- 自动机序列 (见定理 3).

当 $1 \leq n \leq 96$ 且 $0 \leq p \leq 127$ 时, 序列 $|\Gamma_n^p|$ (模 3) 的可视化图形如图 1 所示, 其中蓝色方块表示“0”, 绿色方块表示“1”, 红色方块表示“2”, 左上角方块表示 $|\Gamma_1^0|$, 右上角方块表示 $|\Gamma_1^{127}|$, 图中每一列方块表示序列 $\{|\Gamma_n^p|\}_{1 \leq n \leq 96}$.

图 1 序列 $\{|\Gamma_n^p|(\text{模} 3)\}_{1 \leq n \leq 96, 0 \leq p \leq 127}$ 的可视化

本文结构如下: 第 2 节主要介绍定义和预备知识; 第 3 节给出 Cantor 序列的 Hankel 行列式 (模 3) 的递推关系式; 第 4 节主要研究 Cantor 序列的 Hankle 行列式 (模 3) 的周期性和自动机性质; 第 5 节证明 Cantor 序列的生成级数的 Padé 逼近的存在性, 同时证明 Cantor 数的无理指数等 2.

2 预备知识

设 M 是一个 $n \times n$ 阶矩阵, M^T 表示 M 的转置. 用 $M^{(i)}$ 表示删除 M 的第 i 列后所得到的 $n \times (n-1)$ 阶矩阵. 类似地, $M_{(i)}$ 表示删除第 i 行后所得到的 $(n-1) \times n$ 阶矩阵. $|M|$ 表示矩阵 M 的行列式. $\mathbf{0}_{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 阶零矩阵.

容易验证, Cantor 序列 $\mathbf{c} = c_0 c_1 \cdots c_n \cdots \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 也可以由下列递推式来定义:

$$c_0 = 1, \quad c_{3n} = c_n, \quad c_{3n+1} = 0, \quad c_{3n+2} = c_n, \quad n \geq 0. \quad (2.1)$$

在后面的研究中, 我们将用到一个新的序列 $\mathbf{d}$, 其定义为 $d_n = c_n + c_{n+2}$. 从 $\mathbf{d}$ 的定义可得

$$d_{3n} = 2c_n, \quad d_{3n+1} = c_{n+1}, \quad d_{3n+2} = c_n. \quad (2.2)$$

序列 $\mathbf{d}$ 的 Hankel 矩阵记为 Δ_n^p . 不难发现,

$$\Delta_n^p = \Gamma_n^p + \Gamma_n^{p+2}.$$

令 $K_n^p := (u_{p+3(i+j-2)})_{1 \leq i, j \leq n}$. 当 $\mathbf{u} = \mathbf{c}$ 为 Cantor 序列时, 由 (2.1) 可知, 对任意 $n \geq 1, p \geq 0$,

$$K_n^{3p} = \Gamma_n^p, \quad K_n^{3p+1} = \mathbf{0}_{n \times n}, \quad K_n^{3p+2} = \Gamma_n^p. \quad (2.3)$$

当 $\mathbf{u} = \mathbf{d}$ 时, 由 (2.2) 可知, 对任意 $n \geq 1, p \geq 0$,

$$K_n^{3p} = 2\Gamma_n^p \equiv -\Gamma_n^p, \quad K_n^{3p+1} = \Gamma_n^{p+1}, \quad K_n^{3p+2} = \Gamma_n^p, \quad (2.4)$$

其中记号 “ $\equiv$ ”, 在本文中若无特别申明, 表示模 3 相等.

下面将给出一个关于矩阵的辅助引理.

引理 1 对任意 $n \geq 2, p \geq 0$,

$$\begin{vmatrix} \Gamma_n^p & \Gamma_n^{p+1} \\ \Gamma_n^{p+1} & -\Gamma_n^p \end{vmatrix} = (-1)^n |\Gamma_n^p| \cdot |\Delta_n^p| + (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^p| \cdot |\Delta_{n-1}^p|.$$

证明 设 α_p^n 表示形如 $(c_p, c_{p+1}, \dots, c_{p+n-1})^T$ 的列向量, 我们有

$$\begin{vmatrix} \Gamma_n^p & \Gamma_n^{p+1} \\ \Gamma_n^{p+1} & -\Gamma_n^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Gamma_n^p & \alpha_{p+n}^n & \alpha_p^n & \Gamma_n^{p+1} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & 1 & \mathbf{0}_{1 \times n} \\ \Gamma_n^{p+1} & \alpha_{p+n+1}^n & \mathbf{0}_{n \times 1} & -\Gamma_n^p \end{vmatrix}.$$

注意到 $(\Gamma_n^p \alpha_{p+n}^n) = (\alpha_p^n \Gamma_n^{p+1})$, 于是,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \Gamma_n^p & \Gamma_n^{p+1} \\ \Gamma_n^{p+1} & -\Gamma_n^p \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \Gamma_n^p & \alpha_{p+n}^n & 0 & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 & 0 & 0 \cdots 0(-1) \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & 1 & 0 \cdots 00 \\ \Gamma_n^{p+1} & \alpha_{p+n+1}^n & -\alpha_{p+1}^n & -\Delta_n^p \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Gamma_n^p & \mathbf{0} \\ \Gamma_n^{p+1} & -\Delta_n^p \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\Gamma_{n+1}^p)_{(n+1)} & \mathbf{0}_{n \times (n-1)} \\ (\Gamma_{n+1}^{p+1})_{(n+1)} & -(\Delta_n^p)^{(n)} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} (\Gamma_{n+1}^p)_{(n+1)} & \mathbf{0}_{n \times (n-1)} \\ (\Gamma_{n+1}^{p+1})_{(n+1)} & -(\Delta_n^p)^{(n)} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} (\Gamma_{n+1}^p)_{(n+1)} & \mathbf{0}_{n \times (n-1)} \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times (n+1)} & -(\Delta_n^p)^{(n)} \\ (\alpha_{p+n}^{n+1})^T & \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^p| \cdot |-\Delta_{n-1}^p| = |\Gamma_{n+1}^p| \cdot |\Delta_{n-1}^p|, \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{vmatrix} \Gamma_n^p & \Gamma_n^{p+1} \\ \Gamma_n^{p+1} & -\Gamma_n^p \end{vmatrix} = (-1)^n |\Gamma_n^p| \cdot |\Delta_n^p| + (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^p| \cdot |\Delta_{n-1}^p|.$$

证毕. □

令

$$P(n) = (e_1, e_4, \dots, e_{3n_1-2}, e_2, e_5, \dots, e_{3n_2-1}, e_3, e_6, \dots, e_{3n_3}),$$

其中 $n_1 = [\frac{n+2}{3}]$, $n_2 = [\frac{n+1}{3}]$, $n_3 = [\frac{n}{3}]$ 且 e_j 是第 j 个 n - 维单位列向量, 即第 j 个值为 1 其余值为 0 的列向量. 于是, $|P(n)| = \pm 1$. 在不引起混淆的情况下, 我们用 P 表示 $P(n)$. 下面的表格列出不同情况下 n_i 的取值, 这对后面的研究是有益的,

	n_1	n_2	n_3
$3n$	n	n	n
$3n+1$	$n+1$	n	n
$3n+2$	$n+1$	$n+1$	n

若 $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ 为 $n \times n$ 矩阵, 那么,

$$P^T M P = \begin{pmatrix} (m_{3i-2,3j-2})_{n_1 \times n_1} & (m_{3i-2,3j-1})_{n_1 \times n_2} & (m_{3i-2,3j})_{n_1 \times n_3} \\ (m_{3i-1,3j-2})_{n_2 \times n_1} & (m_{3i-1,3j-1})_{n_2 \times n_2} & (m_{3i-1,3j})_{n_2 \times n_3} \\ (m_{3i,3j-2})_{n_3 \times n_1} & (m_{3i,3j-1})_{n_3 \times n_2} & (m_{3i,3j})_{n_3 \times n_3} \end{pmatrix},$$

其中 $(m_{3i-2,3j-1})_{s \times t}$ 表示矩阵 $(m_{3i-2,3j-1})_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t}$.

当 $M = H_{3n}^p, H_{3n+1}^p$ 或 H_{3n+2}^p 时, 我们有

$$\begin{aligned} P^T H_{3n}^p P &= \begin{pmatrix} (u_{p+3(i+j-2)})_{n \times n} & (u_{p+3(i+j-2)+1})_{n \times n} & (u_{p+3(i+j-2)+2})_{n \times n} \\ (u_{p+3(i+j-2)+1})_{n \times n} & (u_{p+3(i+j-2)+2})_{n \times n} & (u_{p+3(i+j-2)+3})_{n \times n} \\ (u_{p+3(i+j-2)+2})_{n \times n} & (u_{p+3(i+j-2)+3})_{n \times n} & (u_{p+3(i+j-2)+4})_{n \times n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} K_n^p & K_n^{p+1} & K_n^{p+2} \\ K_n^{p+1} & K_n^{p+2} & K_n^{p+3} \\ K_n^{p+2} & K_n^{p+3} & K_n^{p+4} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$P^T H_{3n+1}^p P = \begin{pmatrix} K_{n+1}^p & (K_{n+1}^{p+1})^{(n+1)} & (K_{n+1}^{p+2})^{(n+1)} \\ (K_{n+1}^{p+1})^{(n+1)} & K_n^{p+2} & K_n^{p+3} \\ (K_{n+1}^{p+2})^{(n+1)} & K_n^{p+3} & K_n^{p+4} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$P^T H_{3n+2}^p P = \begin{pmatrix} K_{n+1}^p & K_{n+1}^{p+1} & (K_{n+1}^{p+2})^{(n+1)} \\ K_{n+1}^{p+1} & K_{n+1}^{p+2} & (K_{n+1}^{p+3})^{(n+1)} \\ (K_{n+1}^{p+2})^{(n+1)} & (K_{n+1}^{p+3})^{(n+1)} & K_n^{p+4} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

3 递推关系式

本节将建立序列 $|\Gamma_n^p|$ ($n \geq 2, p \geq 0$) 的递推关系式, 这是本文的关键部分. 通过下列 18 个递推关系式, 我们可以计算 Hankel 行列式 $|\Gamma_n^p|$ 和 $|\Delta_n^p|$ ($n \geq 2, p \geq 0$) 的值.

定理 1 对任意 $p \geq 0, n \geq 2$, 我们有

- (1) $|\Gamma_{3n}^{3p}| = (-1)^n |\Gamma_n^p|^2 \cdot |\Delta_n^p| + (-1)^{n+1} |\Gamma_n^p| \cdot |\Gamma_{n+1}^p| \cdot |\Delta_{n-1}^p|$;
- (2) $|\Gamma_{3n+1}^{3p}| = (-1)^n |\Gamma_n^p| \cdot |\Gamma_{n+1}^p| \cdot |\Delta_n^p| + (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^p|^2 \cdot |\Delta_{n-1}^p|$;
- (3) $|\Gamma_{3n+2}^{3p}| = (-1)^n |\Gamma_{n+1}^p|^2 \cdot |\Delta_n^p|$;
- (4) $|\Gamma_{3n}^{3p+1}| = (-1)^n |\Gamma_n^p| \cdot |\Gamma_{n+1}^{p+1}| \cdot |\Delta_n^p| + (-1)^{n+1} |\Gamma_n^{p+1}| \cdot |\Gamma_{n+1}^p| \cdot |\Delta_{n-1}^p|$;
- (5) $|\Gamma_{3n+1}^{3p+1}| = (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^p|^2 \cdot |\Delta_{n-1}^{p+1}|$;
- (6) $|\Gamma_{3n+2}^{3p+1}| = (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^p|^2 \cdot |\Delta_n^{p+1}|$;
- (7) $|\Gamma_{3n}^{3p+2}| = (-1)^n |\Gamma_n^{p+1}|^2 \cdot |\Delta_n^p|$;
- (8) $|\Gamma_{3n+1}^{3p+2}| = (-1)^n |\Gamma_n^{p+1}| \cdot |\Gamma_{n+1}^p| \cdot |\Delta_{n+1}^{p+1}| + (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^p| \cdot |\Gamma_{n+1}^{p+1}| \cdot |\Delta_{n-1}^{p+1}|$;
- (9) $|\Gamma_{3n+2}^{3p+2}| = (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^{p+1}|^2 \cdot |\Delta_n^p|$;
- (10) $|\Delta_{3n}^{3p}| \equiv (-1)^n |\Gamma_n^p| \cdot |\Delta_n^p|^2 + (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^p| \cdot |\Delta_{n-1}^p| \cdot |\Delta_n^p|$;
- (11) $|\Delta_{3n+1}^{3p}| \equiv (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^p| \cdot |\Delta_n^p|^2$;
- (12) $|\Delta_{3n+2}^{3p}| \equiv (-1)^n |\Gamma_{n+2}^p| \cdot |\Delta_n^p|^2 + (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^p| \cdot |\Delta_n^p| \cdot |\Delta_{n+1}^p|$;
- (13) $|\Delta_{3n}^{3p+1}| \equiv (-1)^n |\Gamma_n^{p+1}| \cdot |\Delta_n^p|^2$;
- (14) $|\Delta_{3n+1}^{3p+1}| \equiv (-1)^n |\Gamma_{n+1}^{p+1}| \cdot |\Delta_n^p|^2$;
- (15) $|\Delta_{3n+2}^{3p+1}| \equiv (-1)^n |\Gamma_{n+2}^p| \cdot |\Delta_n^p| \cdot |\Delta_{n+1}^{p+1}| + (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^p| \cdot |\Delta_n^{p+1}| \cdot |\Delta_{n+1}^p|$;
- (16) $|\Delta_{3n}^{3p+2}| \equiv (-1)^n |\Gamma_n^{p+1}| \cdot |\Delta_n^p| \cdot |\Delta_{n+1}^{p+1}| + (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^{p+1}| \cdot |\Delta_n^p| \cdot |\Delta_{n-1}^{p+1}|$;
- (17) $|\Delta_{3n+1}^{3p+2}| \equiv (-1)^n |\Gamma_{n+1}^p| \cdot |\Delta_n^{p+1}|^2$;

$$(18) |\Delta_{3n+2}^{3p+2}| \equiv (-1)^n |\Gamma_{n+2}^p| \cdot |\Delta_n^{p+1}|^2.$$

证明 (1) 由 (2.3) 和 (2.5) 可得

$$|P^T \Gamma_{3n}^{3p} P| = \begin{vmatrix} \Gamma_n^p & \mathbf{0}_{n \times n} & \Gamma_n^p \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \Gamma_n^p & \Gamma_n^{p+1} \\ \Gamma_n^p & \Gamma_n^{p+1} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Gamma_n^p & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \Gamma_n^p & \Gamma_n^{p+1} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \Gamma_n^{p+1} & -\Gamma_n^p \end{vmatrix}.$$

因此,

$$|\Gamma_{3n}^{3p}| = |P^T \Gamma_{3n}^{3p} P| = |\Gamma_n^p| \cdot \begin{vmatrix} \Gamma_n^p & \Gamma_n^{p+1} \\ \Gamma_n^{p+1} & -\Gamma_n^p \end{vmatrix}.$$

由引理 1,

$$|\Gamma_{3n}^{3p}| = (-1)^n |\Gamma_n^p|^2 \cdot |\Delta_n^p| + (-1)^{n+1} |\Gamma_n^p| \cdot |\Gamma_{n+1}^p| \cdot |\Delta_{n-1}^p|.$$

(2) 由 (2.3) 和 (2.6) 可得

$$|P^T \Gamma_{3n+1}^{3p} P| = \begin{vmatrix} \Gamma_{n+1}^p & \mathbf{0}_{n+1 \times n} & (\Gamma_{n+1}^p)^{(n+1)} \\ \mathbf{0}_{n \times n+1} & \Gamma_n^p & \Gamma_n^{p+1} \\ (\Gamma_{n+1}^p)^{(n+1)} & \Gamma_n^{p+1} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Gamma_{n+1}^p & \mathbf{0}_{n+1 \times n} & \mathbf{0}_{n+1 \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n+1} & \Gamma_n^p & \Gamma_n^{p+1} \\ \mathbf{0}_{n \times n+1} & \Gamma_n^{p+1} & -\Gamma_n^p \end{vmatrix}.$$

由引理 1,

$$|\Gamma_{3n+1}^{3p}| = |\Gamma_{n+1}^p| \cdot \begin{vmatrix} \Gamma_n^p & \Gamma_n^{p+1} \\ \Gamma_n^{p+1} & -\Gamma_n^p \end{vmatrix} = (-1)^n |\Gamma_n^p| \cdot |\Gamma_{n+1}^p| \cdot |\Delta_n^p| + (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^p|^2 \cdot |\Delta_{n-1}^p|.$$

(3) 由 (2.3) 和 (2.7) 可得

$$\begin{aligned} |P^T \Gamma_{3n+2}^{3p} P| &= \begin{vmatrix} \Gamma_{n+1}^p & \mathbf{0}_{(n+1) \times (n+1)} & (\Gamma_{n+1}^p)^{(n+1)} \\ \mathbf{0}_{(n+1) \times (n+1)} & \Gamma_{n+1}^p & (\Gamma_{n+1}^{p+1})^{(n+1)} \\ (\Gamma_{n+1}^p)^{(n+1)} & (\Gamma_{n+1}^{p+1})^{(n+1)} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \Gamma_{n+1}^p & \mathbf{0}_{(n+1) \times (n+1)} & \mathbf{0}_{(n+1) \times n} \\ \mathbf{0}_{(n+1) \times (n+1)} & \Gamma_{n+1}^p & (\Gamma_{n+1}^{p+1})^{(n+1)} \\ (\Gamma_{n+1}^p)^{(n+1)} & (\Gamma_{n+1}^{p+1})^{(n+1)} & -\Gamma_n^p \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \Gamma_{n+1}^p & \mathbf{0}_{(n+1) \times (n+1)} & \mathbf{0}_{(n+1) \times n} \\ \mathbf{0}_{(n+1) \times (n+1)} & \Gamma_{n+1}^p & \mathbf{0}_{(n+1) \times n} \\ (\Gamma_{n+1}^p)^{(n+1)} & (\Gamma_{n+1}^{p+1})^{(n+1)} & -\Gamma_n^p - \Gamma_n^{p+2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

因此,

$$|\Gamma_{3n+2}^{3p}| = |\Gamma_{n+1}^p|^2 \cdot |-\Gamma_n^p - \Gamma_n^{p+2}| = (-1)^n |\Gamma_{n+1}^p|^2 \cdot |\Delta_n^p|.$$

(4)–(18) 由类似的计算可得. 我们略去其证明. □

下面将上述等式推广到对任意 $n, p \geq 0$ 成立.

命题 1 对任意 $p \geq 0$, 令 $|\Delta_0^p| = 1$, 并且

$$|\Gamma_0^p| = \begin{cases} 2, & \text{若 } p = 0, \\ 1, & \text{若 } p \geq 1, \end{cases} \quad |\Delta_{-1}^p| = \begin{cases} 1, & \text{若 } p = 0, \\ 0, & \text{若 } p \geq 1, \end{cases}$$

此时, 定理 1 中的等式对任意 $p \geq 0$ 和 $n \geq 0$ 成立.

证明 利用 (2.1) 和 (2.2), 并注意到 $|\Gamma_1^p| = c_p$, 且 $|\Delta_1^p| = d_p$. 容易验证定理 1 中的等式. $\square$

4 周期性及自动机性质

本节讨论 Hankel 行列式 $|\Gamma_n^p|$ 和 $|\Delta_n^p|$ ($n, p \geq 0$) 的周期性和自动机性质. 由定理 1 和命题 1 可知, 在模 3 相等的意义下, 为求 $\{|\Gamma_n^p|\}_{n \geq 0, p \geq 0}$ 和 $\{|\Delta_n^p|\}_{n \geq 0, p \geq 0}$ 的值, 我们只需确定 $p = 0$ 和 1 时, 这两个量的值. 下面两个命题将处理这个问题.

命题 2 沿用前面的记号, 我们有

$$|\Gamma_n^0| \equiv \begin{cases} 1, & \text{若 } n \equiv 1, 2 \pmod{4}, \\ 2, & \text{若 } n \equiv 3, 0 \pmod{4}, \end{cases} \quad |\Delta_n^0| \equiv \begin{cases} 2, & \text{若 } n \equiv 1, 2 \pmod{4}, \\ 1, & \text{若 } n \equiv 3, 0 \pmod{4}. \end{cases} \quad (4.1)$$

证明 我们将同时证明这两个等式. 当 $n = 0, 1, 2$ 时, 可直接计算验证这两个等式. 假设 (4.1) 对 $n \leq k$ 成立. 由归纳假设可知, 对任意 $n < k$,

$$\begin{aligned} |\Gamma_n^0|^2 &\equiv |\Delta_n^0|^2 \equiv 1, \quad |\Gamma_n^0| \cdot |\Delta_n^0| \equiv 2, \\ |\Gamma_{n+1}^0| \cdot |\Delta_{n-1}^0| &\equiv 1, \quad |\Gamma_{n+1}^0| + |\Delta_{n-1}^0| \equiv |\Delta_{n+1}^2|. \end{aligned}$$

因此, 当 $n = k + 1 = 3l$ ($l \geq 1$) 时, 由定理 1 中的 (1) 和 (10) 可得

$$\begin{aligned} |\Gamma_n^0| &= (-1)^l |\Gamma_l^0|^2 \cdot |\Delta_l^0| + (-1)^{l+1} |\Gamma_l^0| \cdot |\Gamma_{l+1}^0| \cdot |\Delta_{l-1}^0| \equiv (-1)^l (2|\Gamma_l^0| - |\Gamma_l^0|) \equiv (-1)^l |\Gamma_l^0|, \\ |\Delta_n^0| &\equiv (-1)^l |\Gamma_l^0| \cdot |\Delta_l^0|^2 + (-1)^{l+1} |\Gamma_{l+1}^0| \cdot |\Delta_{l-1}^0| \cdot |\Delta_l^0| \equiv (-1)^l (2|\Delta_l^0| - |\Delta_l^0|) \equiv (-1)^l |\Delta_l^0|. \end{aligned}$$

因为 $n = 3l \equiv -l \pmod{4}$, 所以, 由上面两个等式可知, (4.1) 成立.

当 $n = k + 1 = 3l + 1$ ($l \geq 1$) 时, 由定理 1 中的 (2) 和 (11) 可得

$$\begin{aligned} |\Gamma_{3l+1}^0| &= (-1)^l |\Gamma_l^0| \cdot |\Gamma_{l+1}^0| \cdot |\Delta_l^0| + (-1)^{l+1} |\Gamma_{l+2}^0|^2 \cdot |\Delta_{l-1}^0| \equiv (-1)^l (2|\Gamma_{l+1}^0| - |\Delta_{l-1}^0|) \equiv (-1)^{l+1} |\Delta_{l+1}^0|, \\ |\Delta_{3l+1}^0| &\equiv (-1)^{l+1} |\Gamma_{l+1}^0| \cdot |\Delta_l^0|^2 \equiv (-1)^{l+1} |\Gamma_{l+1}^0|. \end{aligned}$$

注意到 $n = 3l + 1 \equiv 1 - l \pmod{4}$, 由上述两个等式可知, (4.1) 成立.

当 $n = k + 1 = 3l + 2$ ($l \geq 1$) 时, 由定理 1 中的 (3) 和 (12) 可得

$$\begin{aligned} |\Gamma_{3l+2}^0| &= (-1)^l |\Gamma_{l+1}^0|^2 \cdot |\Delta_l^0| \equiv (-1)^l |\Delta_l^0|, \\ |\Delta_{3l+2}^0| &\equiv (-1)^l |\Gamma_{l+2}^0| \cdot |\Delta_l^0|^2 + (-1)^{l+1} |\Gamma_{l+1}^0| \cdot |\Delta_l^0| \cdot |\Delta_{l+1}^0| \equiv (-1)^l (|\Delta_l^0| - 2|\Delta_l^0|) = (-1)^{l+1} |\Delta_l^0|. \end{aligned}$$

因为 $n = 3l + 2 \equiv 2 - l \pmod{4}$, 所以, 由上面两个等式可知, (4.1) 成立. $\square$

命题 3 当 $p = 1$ 时,

$$|\Gamma_n^1| \equiv |\Delta_n^1| \equiv \begin{cases} 0, & \text{若 } n \equiv 1, 3 \pmod{4}, \\ 2, & \text{若 } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 1, & \text{若 } n \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases} \quad (4.2)$$

证明 我们将同时证明 (4.2) 的两个等式. 当 $n = 0, 1, 2$ 时, 可直接计算验证. 假设 (4.2) 对任意 $n \leq k$ 成立. 由 (4.1), 对任意 $n \geq 1$,

$$|\Gamma_n^0|^2 \equiv |\Delta_n^0|^2 \equiv 1, \quad |\Gamma_n^0| \cdot |\Delta_n^0| \equiv 2, \quad |\Gamma_{n+1}^0| \cdot |\Delta_{n-1}^0| \equiv 1.$$

由归纳假设, 对任意 $1 \leq n < k$,

$$|\Gamma_{n-1}^1| \equiv -|\Gamma_{n+1}^1|.$$

因此, 当 $n = k + 1 = 3l$ ($l \geq 1$) 时, 由定理 1 中的 (4) 和 (13) 可得

$$\begin{aligned} |\Gamma_n^1| &= (-1)^l |\Gamma_l^0| \cdot |\Gamma_l^1| \cdot |\Delta_l^0| + (-1)^{l+1} |\Gamma_l^1| \cdot |\Gamma_{l+1}^0| \cdot |\Delta_{l-1}^0| \equiv (-1)^l (2|\Gamma_l^1| - |\Gamma_l^1|) \equiv (-1)^l |\Gamma_l^1|, \\ |\Delta_n^1| &\equiv (-1)^l |\Gamma_l^1| \cdot |\Delta_l^0|^2 \equiv (-1)^l |\Gamma_l^1|. \end{aligned}$$

因为 $n = 3l \equiv -l \pmod{4}$, 故此时 (4.2) 成立.

当 $n = k + 1 = 3l + 1$ ($l \geq 1$), 由定理 1 中的 (5) 和 (14) 可得

$$\begin{aligned} |\Gamma_n^1| &= (-1)^{l+1} |\Gamma_{l+1}^0|^2 \cdot |\Delta_{l-1}^1| \equiv (-1)^{l+1} |\Delta_{l-1}^1| \equiv (-1)^l |\Gamma_{l+1}^1|, \\ |\Delta_n^1| &\equiv (-1)^l |\Gamma_{l+1}^1| \cdot |\Delta_l^0|^2 \equiv (-1)^l |\Gamma_{l+1}^1|. \end{aligned}$$

因为 $n = 3l + 1 \equiv 1 - l \pmod{4}$, 故此时 (4.2) 成立.

当 $n = k + 1 = 3l + 2$ ($l \geq 1$), 由定理 1 中的 (6) 和 (15) 可得

$$\begin{aligned} |\Gamma_n^1| &= (-1)^{l+1} |\Gamma_{l+1}^0|^2 \cdot |\Delta_l^1| \equiv (-1)^{l+1} |\Delta_l^1|, \\ |\Delta_n^1| &\equiv (-1)^l |\Gamma_{l+2}^0| \cdot |\Delta_l^0| \cdot |\Delta_l^1| + (-1)^{l+1} |\Gamma_{l+1}^0| \cdot |\Delta_l^1| \cdot |\Delta_{l+1}^0| \equiv (-1)^l (|\Delta_l^1| - 2|\Delta_l^1|) \equiv (-1)^{l+1} |\Delta_l^1|. \end{aligned}$$

注意到 $n = 3l + 2 \equiv 2 - l \pmod{4}$, 所以, (4.2) 成立. $\square$

4.1 周期性

设 $\{u_n\}_{n \geq 0}$ 是取值于 $\mathbb{F}_3$ 的一个序列, 称形式幂级数

$$u(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$$

为序列 $\{u_n\}_{n \geq 0}$ 的生成级数. 序列 $\{u_n\}_{n \geq 0}$ 是周期为 t 的周期序列, 当且仅当其生成级数可以写成形如 $\frac{P(x)}{1-x^t}$ 的分式, 其中 $P(x)$ 次数不超过 t 的多项式.

设 $P(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 和 $Q(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ 为两个形式幂级数, 其中 $a_n, b_n \in \mathbb{F}_3$, 它们的 Hadamard 乘积记为

$$P(x) \star Q(x) = \sum_{n \geq 0} a_n b_n x^n.$$

若 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ 和 $\{b_n\}_{n \geq 0}$ 是两个周期分别为 s 和 t 的周期序列, 则 $P(x) \star Q(x)$ 是周期为 $[s, t]$ 的周期序列 $\{a_n b_n\}_{n \geq 0}$ 的生成级数, 其中 $[s, t]$ 表示 s 和 t 的最小公倍数.

对任意 $p \geq 0$, 令

$$\begin{aligned} f^{(p)}(x) &= \sum_{n \geq 0} |\Gamma_n^p| x^n, & g^{(p)}(x) &= \sum_{n \geq 0} |\Delta_n^p| x^n, \\ h_0(x) &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n, & h_1(x) &= \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} x^n, \end{aligned}$$

其中上述级数的系数都模 3.

由命题 2 和 3 可得

$$\begin{cases} f^{(0)} = \frac{2+x+x^2+2x^3}{1-x^4}, \\ g^{(0)} = \frac{1+2x+2x^2+x^3}{1-x^4}, \\ f^{(1)} = \frac{1+2x^2}{1-x^4}, \\ g^{(1)} = \frac{1+2x^2}{1-x^4}. \end{cases} \quad (4.3)$$

利用定理 1 中的递推关系式, 我们可以计算 $f^{(p)}$ 和 $g^{(p)}$. 作为示例, 下面给出 $f^{(2)}$ 和 $g^{(2)}$ 的计算,

$$\begin{aligned} f^{(2)} &= \sum_{n \geq 0} |\Gamma_n^2| x^n = \sum_{n \geq 0} (|\Gamma_{3n}^2| + |\Gamma_{3n+1}^2| x + |\Gamma_{3n+2}^2| x^2) x^{3n} \\ &= \sum_{n \geq 0} [(-1)^n |\Gamma_n^1|^2 |\Delta_n^0| + ((-1)^n |\Gamma_n^1| |\Gamma_{n+1}^0| |\Delta_n^1| \quad (\text{利用定理 1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^0| |\Gamma_{n+1}^1| |\Delta_{n-1}^1|) x + (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^1|^2 |\Delta_n^0| x^2] x^{3n} \\ &= (h_0 \star f^{(1)} \star f^{(1)} \star g^{(0)})^3 + x(h_0 \star f^{(1)} \star \widehat{f^{(0)}} \star g^{(1)}) \\ &\quad + h_1 \star \widehat{f^{(0)}} \star \widehat{f^{(1)}} \star \overline{g^{(1)}}^3 + x^2(h_1 \star \widehat{f^{(1)}} \star \widehat{f^{(1)}} \star g^{(0)})^3, \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中

$$h_0(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n, \quad h_1(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} x^n, \quad (4.5)$$

$$\widehat{f^{(1)}}(x) = \sum_{n \geq 0} |\Gamma_{n+1}^1| x^n, \quad \overline{g^{(1)}}(x) = \sum_{n \geq 0} |\Delta_{n-1}^1| x^n. \quad (4.6)$$

将 (4.5) 和 (4.6) 代入 (4.4) 可得

$$\begin{aligned} f^{(2)} &= \left(\frac{1+2x^2}{1-x^4} \right)^3 + x \left(\frac{1+2x^2}{1-x^4} + \frac{2x+x^3}{1-x^4} \right)^3 + x^2 \left(\frac{2x+x^3}{1-x^4} \right)^3 \\ &= \frac{1+x+2x^4+2x^5+2x^6+2x^7+x^{10}+x^{11}}{1-x^{12}}, \\ g^{(2)} &= \sum_{n \geq 0} |\Delta_n^2| x^n = \sum_{n \geq 0} (|\Delta_{3n}^2| + x|\Delta_{3n+1}^2| + x^2|\Delta_{3n+2}^2|) x^{3n} \\ &= \sum_{n \geq 0} [((-1)^n |\Gamma_n^1| |\Delta_n^0| |\Delta_n^1| + (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+1}^1| |\Delta_n^0| |\Delta_{n-1}^1|) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
 & + x((-1)^n |\Gamma_{n+1}^0| |\Delta_n^1|^2) + x^2((-1)^n |\Gamma_{n+2}^0| |\Delta_n^1|^2)] x^{3n} \\
 & = (h_0 \star f^{(1)} \star g^{(0)} \star g^{(1)} + h_1 \star \widehat{f^{(1)}} \star g^{(0)} \star \overline{g^{(1)}})^3 \\
 & \quad + x(h_0 \star \widehat{f^{(0)}} \star g^{(1)} \star g^{(1)})^3 + x^2(h_0 \star \widehat{\widehat{f^{(0)}}} \star g^{(1)} \star g^{(1)})^3,
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

其中

$$\widehat{\widehat{f^{(0)}}}(x) = \sum_{n \geq 0} |\Gamma_{n+2}^0| x^n. \tag{4.9}$$

将 (4.5)、(4.6) 和 (4.9) 代入 (4.8) 可得

$$g^{(2)} = \frac{1 + x + x^2 + 2x^6 + 2x^7 + 2x^8}{1 - x^{12}}. \tag{4.10}$$

定理 2 对任意 $p \geq 0$, $\{|\Gamma_n^p|(\bmod 3)\}_{n \geq 0}$ 和 $\{|\Delta_n^p|(\bmod 3)\}_{n \geq 0}$ 是周期序列. 进一步, 当 $3^k \leq p < 3^{k+1}$ 时, $12 \cdot 3^k$ 是它们的一个周期.

证明 由命题 2 和 3 可知, $p = 0, 1$ 时结论成立. $p = 2$ 的情形, 在 (4.7) 和 (4.10) 中已经验证.

下面假设结论对 $p < 3^{k+1}$ 成立. 我们将证明结论对 $3^{k+1} \leq p < 3^{k+2}$ 成立. 当 $p = 3q$ 时, 我们有 $3^k \leq q < 3^{k+1}$, 于是, 由定理 1 中的 (1)–(3) 可知,

$$\begin{aligned}
 |\Gamma_{3n}^p| &= (-1)^n |\Gamma_n^q|^2 \cdot |\Delta_n^q| + (-1)^{n+1} |\Gamma_n^q| \cdot |\Gamma_{n+1}^q| \cdot |\Delta_{n-1}^q|, \\
 |\Gamma_{3n+1}^p| &= (-1)^n |\Gamma_n^q| \cdot |\Gamma_{n+1}^q| \cdot |\Delta_n^q| + (-1)^{n+1} |\Gamma_{n+2}^q|^2 \cdot |\Delta_{n-1}^q|, \\
 |\Gamma_{3n+2}^p| &= (-1)^n |\Gamma_{n+1}^q|^2 \cdot |\Delta_n^q|.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

由归纳假设可知, 在 (4.11) 右边出现的序列的周期是 $12 \cdot 3^k$, 于是, 它们的乘积也是周期序列, 并且具有相同的周期. 因此, 序列 $|\Gamma_{3n}^p|$, $|\Gamma_{3n+1}^p|$ 和 $|\Gamma_{3n+2}^p|$ 都以 $12 \cdot 3^k$ 为周期. 所以, 序列 $|\Gamma_n^p|$ 是周期为 $12 \cdot 3^{k+1}$ 的周期序列. 类似的讨论可以证明, 在 $p = 3q + 1$ 和 $3q + 2$ 的情形下, 结论成立. 同理可证序列 $|\Delta_n^p|$ 的周期性. $\square$

4.2 自动机性质

我们首先回顾二维自动机序列的定义^[9]. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为两个有限字符集. 若 $A = (a_{i,j})_{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n}$ 是由 $\mathcal{A}$ 中元素构成的 $m \times n$ 阶矩阵, 且 $\psi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^{k \times l}$ 是一个 $[k, l]$ 阶矩阵值态射, 即把 $\mathcal{A}$ 中字符映成一个 $k \times l$ 阶矩阵, 则 $\psi(A)$ 是一个如下的 $km \times ln$ 阶矩阵:

$$\begin{pmatrix}
 \psi(a_{00}) & \psi(a_{01}) & \cdots & \psi(a_{0,n-1}) \\
 \psi(a_{10}) & \psi(a_{11}) & \cdots & \psi(a_{1,n-1}) \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \psi(a_{m-1,0}) & \psi(a_{m-1,1}) & \cdots & \psi(a_{m-1,n-1})
 \end{pmatrix}.$$

一个 $[k, l]$ -自动机序列是一个 $[k, l]$ -同态的不动点在编码映射下的像. 特别地, 若 $k = l$, 此时, $[k, k]$ -自动机序列也称为 k -自动机序列. 文献 [9, 定理 14.2.2] (也可参见文献 [11, 12]) 说明, 二维序列 $\mathbf{u} = (u_{n,m})_{n,m \geq 0}$ 是 $[k, l]$ -自动机序列, 当且仅当其 $[k, l]$ -核 $K_{k,l}(\mathbf{u})$ 是有限的, 其中

$$K_{k,l}(\mathbf{u}) = \{(u_{k^a m+r, l^a n+s})_{m,n \geq 0} : a \geq 0, 0 \leq r < k^a, 0 \leq s < l^a\}.$$

定理 3 二维序列 $\{|\Gamma_n^p|(\text{模}3)\}_{n \geq 0, p \geq 0}$ 和 $\{|\Delta_n^p|(\text{模}3)\}_{n \geq 0, p \geq 0}$ 是 3- 自动机序列.

证明 我们只需证明这两个序列的 3- 核是有限的.

设 $\{u_n^p\}_{n \geq -1, p \geq 0}$ 为一个二维序列. 当 $\alpha' \in \{-1, 0, 1, 2\}$ 且 $\alpha, \beta, \beta' \in \{0, 1, 2\}$ 时, $S_{\alpha'}^{\beta'}$ 和 T_{α}^{β} 分别表示算子 $S_{\alpha'}^{\beta'} u = \{u_{n+\alpha'}^{p+\beta'}\}_{n \geq 0, p \geq 0}$ 和 $T_{\alpha}^{\beta} u = \{u_{3n+\alpha}^{3p+\beta}\}_{n \geq 0, p \geq 0}$. 当 $\alpha' \in \{-1, 0, 1, 2\}$ 且 $\alpha, \beta, \beta' \in \{0, 1, 2\}$ 时, 我们有

$$T_{\alpha}^{\beta} S_{\alpha'}^{\beta'} = \begin{cases} S_{-1}^0 T_2^{\beta+\beta'}, & \text{当 } \alpha + \alpha' = -1 \text{ 且 } \beta + \beta' \leq 2, \\ S_{-1}^1 T_2^{\beta+\beta'-3}, & \text{当 } \alpha + \alpha' = -1 \text{ 且 } \beta + \beta' \geq 3, \\ T_{\alpha+\alpha'}^{\beta+\beta'}, & \text{当 } 0 \leq \alpha + \alpha' \leq 2 \text{ 且 } \beta + \beta' \leq 2, \\ S_0^1 T_{\alpha+\alpha'}^{\beta+\beta'-3}, & \text{当 } 0 \leq \alpha + \alpha' \leq 2 \text{ 且 } \beta + \beta' \geq 3, \\ S_1^0 T_{\alpha+\alpha'-3}^{\beta+\beta'}, & \text{当 } \alpha + \alpha' \geq 3 \text{ 且 } \beta + \beta' \leq 2, \\ S_1^1 T_{\alpha+\alpha'-3}^{\beta+\beta'-3}, & \text{当 } \alpha + \alpha' \geq 3 \text{ 且 } \beta + \beta' \geq 3. \end{cases} \quad (4.12)$$

令 Γ, Δ 和 F 分别表示序列 $\{|\Gamma_n^p|\}_{n \geq 0, p \geq 0}$, $\{|\Delta_n^p|\}_{n \geq 0, p \geq 0}$ 和 $\{F_n^p\}_{n \geq 0, p \geq 0} (\text{模} 3)$, 其中 $F_n^p = (-1)^n$. 因此, 对任意 $\beta \in \{0, 1, 2\}$,

$$T_0^{\beta} F = T_2^{\beta} F = S_2^{\beta} F = F \quad \text{且} \quad T_1^{\beta} F = S_1^{\beta} F = S_1^0 F. \quad (4.13)$$

我们用算子的形式分别重写定理 1 和命题 1 如下:

$$\begin{cases} T_0^0 \Gamma \equiv F \cdot \Gamma^2 \cdot \Delta + S_1^0 F \cdot \Gamma \cdot S_1^0 \Gamma \cdot S_{-1}^0 \Delta, \\ T_1^0 \Gamma \equiv F \cdot S_1^0 \Gamma \cdot \Gamma \cdot \Delta + S_1^0 F \cdot (S_1^0 \Gamma)^2 \cdot S_{-1}^0 \Delta, \\ T_2^0 \Gamma \equiv F \cdot (S_1^0 \Gamma)^2 \cdot \Delta, \\ T_0^1 \Gamma \equiv F \cdot S_0^1 \Gamma \cdot \Gamma \cdot \Delta + S_1^0 F \cdot S_1^0 \Gamma \cdot S_0^1 \Gamma \cdot S_{-1}^0 \Delta, \\ T_1^1 \Gamma \equiv S_1^0 F \cdot (S_1^0 \Gamma)^2 \cdot S_{-1}^1 \Delta, \\ T_2^1 \Gamma \equiv S_1^0 F \cdot (S_1^0 \Gamma)^2 \cdot S_0^1 \Delta, \\ T_0^2 \Gamma \equiv F \cdot (S_1^0 \Gamma)^2 \cdot \Delta, \\ T_1^2 \Gamma \equiv F \cdot S_1^0 \Gamma \cdot S_0^1 \Gamma \cdot S_0^1 \Delta + S_1^0 F \cdot S_1^0 \Gamma \cdot S_1^1 \Gamma \cdot S_{-1}^1 \Delta, \\ T_2^2 \Gamma \equiv S_1^0 F \cdot (S_1^1 \Gamma)^2 \cdot \Delta, \end{cases} \quad (4.14a)$$

$$\begin{cases} T_0^0 \Delta \equiv F \cdot \Gamma \cdot \Delta^2 + S_1^0 F \cdot S_1^0 \Gamma \cdot S_{-1}^0 \Delta \cdot \Delta, \\ T_1^0 \Delta \equiv S_1^0 F \cdot S_1^0 \Gamma \cdot \Delta^2, \\ T_2^0 \Delta \equiv F \cdot S_2^0 \Gamma \cdot \Delta^2 + S_1^0 F \cdot S_1^0 \Gamma \cdot \Delta \cdot S_1^0 \Delta, \\ T_0^1 \Delta \equiv F \cdot S_0^1 \Gamma \cdot \Delta^2, \\ T_1^1 \Delta \equiv F \cdot S_1^1 \Gamma \cdot \Delta^2, \\ T_2^1 \Delta \equiv F \cdot S_2^1 \Gamma \cdot \Delta \cdot S_0^1 \Delta + S_1^0 F \cdot S_1^0 \Gamma \cdot S_0^1 \Delta \cdot S_1^0 \Delta, \\ T_0^2 \Delta \equiv F \cdot S_1^1 \Gamma \cdot \Delta \cdot S_0^1 \Delta + S_1^0 F \cdot S_1^1 \Gamma \cdot \Delta \cdot S_{-1}^1 \Delta, \\ T_1^2 \Delta \equiv F \cdot S_1^0 \Gamma \cdot (S_1^0 \Delta)^2, \\ T_2^2 \Delta \equiv F \cdot S_2^0 \Gamma \cdot (S_1^0 \Delta)^2. \end{cases} \quad (4.14b)$$

令 $\mathcal{X} = \{\Gamma, \Delta, F\}$ 且 $\mathcal{Y} = \{S_\alpha^\beta J \mid J \in \mathcal{X}, \alpha = -1, 0, 1, 2 \text{ 且 } \beta = 0, 1, 2\}$. 由 (4.12)–(4.14) 可知, 对任意 $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2\}$ 和 $J \in \mathcal{Y}$, $T_\alpha^\beta J$ 可以表示成以 $\mathcal{Y}$ 中元素为变量, 系数在 GF_3 中取值的多项式. 事实上, 取 $S_{\alpha'}^{\beta'} \Gamma \in \mathcal{Y}$. 又设 $\alpha + \alpha' = -1$ 且 $\beta + \beta' \leq 2$, 此时, 由 (4.12) 知, $T_\alpha^\beta S_{\alpha'}^{\beta'} \Gamma = S_{-1}^0 T_2^{\beta+\beta'} \Gamma$. 注意到在 (4.14) 中, $T_2^j \Gamma$ ($j = 0, 1, 2$) 中只出现算子 S_1^0, S_0^1 和 S_1^1 , 此时, $T_\alpha^\beta S_{\alpha'}^{\beta'} \Gamma$ 确实是以 $\mathcal{Y}$ 中元素为变量, 系数在 GF_3 中取值的多项式. 在 (4.12) 中其余 5 种情形下, 对 $T_\alpha^\beta S_{\alpha'}^{\beta'} \Gamma$ 的讨论是类似的. 同理, 可对 $\mathcal{Y}$ 中其余元素作类似地讨论. 因此, 3-核 $K_3(\Gamma)$ 和 $K_3(\Delta)$ 中的元素都可由算子 T_α^β 反复作用在 $\mathcal{X}$ 中元素上得到. 事实上, 任取 $(|\Gamma_{3^m n+r}^{3^m p+s}|)_{n,p \geq 0} \in K_3(\Gamma)$, 其中 $m \geq 0$ 且 $0 \leq r, s < 3^m$. 设

$$r = \sum_{i=0}^{m-1} 3^i \alpha_i, \quad s = \sum_{i=0}^{m-1} 3^i \beta_i,$$

其中 $\alpha_i, \beta_i \in \{0, 1, 2\}$. 容易验证, $(|\Gamma_{3^m n+r}^{3^m p+s}|)_{n,p \geq 0} = T_{\alpha_{m-1}}^{\beta_{m-1}} \cdots T_{\alpha_1}^{\beta_1} T_{\alpha_0}^{\beta_0}(\Gamma)$. 因此, 这两个 3-核中的元素都是系数属于 GF_3 , 变量为 $\mathcal{Y}$ 中元素的多项式.

注意到 $\mathcal{Y}$ 中至多有 36 个元素, 而 GF_3 上, 36 个变量的多项式仅有有限多个, 所以, 上述两个 3-核是有限的. 因此, 序列 $\{|\Gamma_n^p|\}_{n \geq 0, p \geq 0}$ 和 $\{|\Delta_n^p|\}_{n \geq 0, p \geq 0}$ 是二维 3-自动机序列. $\square$

推论 1 对任意 $n \geq 1$, 序列

$$\{|\Gamma_n^p|(\bmod 3)\}_{p \geq 0}, \quad \{|\Delta_n^p|(\bmod 3)\}_{p \geq 0}$$

是 3-自动机序列.

证明 Salon^[11,12] 证明了, 若二维序列 $\{s_{m,n}\}_{m,n \geq 0}$ 是 3-自动机序列, 那么, 任取 $m \geq 0$, 序列 $\{s_{m,n}\}_{n \geq 0}$ 是 3-自动机序列. 利用这个结论和定理 3 知此推论成立. $\square$

5 Hankel 行列式的应用

5.1 Padé 逼近

考虑 Cantor 序列 $\mathbf{c} = c_0 c_1 c_2 \cdots \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, 设其生成级数为 $f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$. 由 (2.1) 知,

$$f(x) = (1+x^2)f(x^3), \quad (5.1)$$

且对任意 $x > 0$, $f(x) > 1$.

记 f 的 (p, q) 阶 Padé 逼近为 $[p/q]_f$, 即分子和分母的次数不超过 p 和 q 的有理函数 $P(x)/Q(x)$, 并且满足

$$f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)} = O(x^{p+q+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

Brezinski^[6] 证明了, 若 $\Gamma_n^0 \neq 0$, 则存在 Padé 逼近 $[\frac{n-1}{n}]_f$. 进一步,

$$f(x) - \left[n - \frac{1}{n}\right]_f(x) = \frac{\Gamma_{n+1}^0}{\Gamma_n^0} x^{2n} + O(x^{2n+1}). \quad (5.2)$$

因此, 由命题 2, 我们有如下定理.

定理 4 设 $f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$, 则对任意 $n \geq 1$, f 的 $(n-1, n)$ 阶 Padé 逼近存在.

5.2 Cantor 数的无理指数

令 ξ 为一个无理数, 它的无理指数 (或无理测度) $\mu(\xi)$ 定义如下:

$$\mu(\xi) = \sup \left\{ \mu \in \mathbb{R} : \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\mu} \text{ 对无穷多个 } (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \text{ 成立} \right\}.$$

令 $\xi_{\mathbf{c}, b}$ 为 Cantor 数, 其定义如下: $\xi_{\mathbf{c}, b} = \sum_{k \geq 0} \frac{c_k}{b^k} = 1 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^6} + \frac{1}{b^8} + \cdots$, 其中 $\mathbf{c} = c_0 c_1 c_2 \cdots$ 是 Cantor 序列. 结合 (5.1)、命题 1 和文献 [10, 定理 1], 我们有下面的定理.

定理 5 对任意大于 2 的整数 b , Cantor 数的无理指数 $\xi_{\mathbf{c}, b}$ 等于 2.

定理 6 对任意 $b \geq 2$, 令 $\eta_{\mathbf{d}, b} = \sum_{n \geq 0} d_n b^{-n}$, $\eta_{\mathbf{d}, b}$ 的无理指数等于 2.

证明 由 (2.2) 可得

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{d}, b} &= \sum_{n \geq 0} d_n b^{-n} = \sum_{n \geq 0} (d_{3n} + d_{3n+1} b^{-1} + d_{3n+2} b^{-2}) b^{-3n} \\ &= \sum_{n \geq 0} (2c_n + c_{n+1} b^{-1} + c_n b^{-2}) b^{-3n} \\ &= 2\xi_{\mathbf{c}, b^3} + b^{-1}(\xi_{\mathbf{c}, b^3} - 1) + b^{-2}\xi_{\mathbf{c}, b^3} \\ &= (2 + b^{-1} + b^{-2})\xi_{\mathbf{c}, b^3} - b^{-1}. \end{aligned}$$

由无理指数的定义可知, 加或乘一个有理数不改变原数的无理指数, 于是, 由定理 5 知, $\eta_{\mathbf{d}, b}$ 的无理指数等于 2. $\square$

致谢 作者对为本文提出宝贵意见的审稿人表示感谢.

参考文献

- 1 Allouche J P, Shallit J. Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations. Cambridge: Cambridge University Press, 2003
- 2 Fogg N P. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics. In: Lecture Notes in Mathematics, vol. 1794. Berlin: Springer-Verlag, 2002
- 3 Dekking F M. Recurrent sets. Adv Math, 1982, 44: 78–104
- 4 Shohat J A, Tamarkin J D. The Problem of Moments. New York: Amer Math Soc, 1943
- 5 Baker G A Jr, Graves-Morris P. Padé Approximations, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1996
- 6 Brezinski C. Padé type approximation and general orthogonal polynomials. In: International Series of Numerical Mathematics, vol. 50. Berlin: Birkhäuser Verlag, 1980
- 7 Kamae T, Tamura J, Wen Z-Y. Hankel determinants for the Fibonacci word and Padé approximation. Acta Arith, 1999, 89: 123–161
- 8 Tamura J. Padé approximation for the infinite words generated by certain substitutions and Hankel determinants. In: Number Theory and its Applications. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1990, 309–346
- 9 Allouche J P, Peyrière J, Wen Z X, et al. Hankel determinants of the Thue-Morse sequence. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1998, 48: 1–27
- 10 Guo Y-J, Wen Z-X, Wu W. On the irrationality exponent of the regular paperfolding numbers. Linear Algebra Appl, 2014, 446: 237–264
- 11 Salon O. Suites automatiques à multi-indices et algébricité. C R Acad Sci Paris Sér I, 1987, 305: 501–504
- 12 Salon O. Suites automatiques à multi-indices. Sémin Théor Nombres Bordeaux, 1987, 4: 1–27

Hankel determinants of the Cantor sequence

WEN ZhiXiong & WU Wen

Abstract In this paper, we give the recurrence equations of the Hankel determinants of the Cantor sequence, and show that the Hankel determinants form a 3-automatic double sequence. With the help of the Hankel determinants, we prove that the irrationality exponent of the Cantor number, i.e., the transcendental number with Cantor sequence as its b -ary expansion, equals 2.

Keywords Cantor sequence, Hankel determinant, automatic sequence, irrationality exponent

MSC(2010) 11J04, 11J82, 41A21

doi: 10.1360/012014-53