上可嵌入性, 边独立数与围长

欧阳章东*, 唐玲, 黄元秋

湖南师范大学数学系, 长沙 410081

* E-mail: oyzd2005@tom.com

收稿日期: 2007-04-17; 接受日期: 2008-09-09

国家自然科学基金 (批准号: 10771062) 和教育部 “新世纪优秀人才支持计划” (编号: NCET-07-0276) 资助项目

摘要 结合边连通性, 研究边独立数与上可嵌入性之间的关系, 得到如下结果: 设 G 为 k -边连通图, 围长为 g , 若

$$\alpha'(G) \leq ((k-1)^2 + 2) \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + \frac{1 - (-1)^g}{2} ((k-1)(k-2) + 1) - 1,$$

其中 $k = 1, 2, 3$, $\alpha'(G)$ 表示图 G 的边独立数, 则 G 是上可嵌入的, 且上界是最好的. 这推广了相关结果.

关键词 图 上可嵌入性 边独立数 围长

MSC(2000) 主题分类 05C10

1 引言

本文所考虑的图均为有限无向图, 且可能有重边或环. 通常用 $G = (V, E)$ 表示一个图, 其中 $\nu = |V|$, $\epsilon = |E|$ 分别表示图 G 的点数和边数. 一个图如果不含重边和环, 则称之为简单图. 图 G 的点连通度 $k(G)$ 表示使得 G 不连通或为平凡图所要删除的最少的顶点数. 图 G 的边连通度 $k_1(G)$ 表示使得 G 不连通或为平凡图所要删除的最少的边数. 简单图 G 的围长指 G 中最短圈的长, 用 $g(G)$ 表示. 若 G 没有圈, 则定义 $g(G) = \infty$. 若 G 有重边, 则定义 $g(G) = 2$. 特别地, 为了方便, 如果 G 有环, 规定 $g(G) = 2$. 图 G 的最大独立集的顶点数称为 G 的点独立数, 记为 $\alpha(G)$. 图 G 的最大匹配的边数称为 G 的边独立数, 记为 $\alpha'(G)$. 对任意实数 x , $\lfloor x \rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数, $\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数. 其他未解释的术语均同文献 [1].

连通图 G 的最大亏格记为 $\gamma_M(G)$, 是指存在最大的整数 k , 使得 G 能 2-胞腔嵌入亏格为 k 的定向曲面 S_k 上. 因为图在任意定向曲面的 2-胞腔嵌入中至少有一个面, 由 Euler 公式易得一个图 G 的最大亏格上界 $\gamma_M(G) \leq \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$, 其中 $\beta(G) = \epsilon - \nu + 1$ 称为图 G 的 Betti 数. 一个图 G 称为上可嵌入的, 如果 $\gamma_M(G) = \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$. 有关图的最大亏格概念的详细叙述, 参看文献 [2–5]. 自 Nordhaus 等 [2] 最初研究最大亏格以来, 图的最大亏格概念至今仍引起广泛的注意. Xuong 在文献 [5] 中证明了任意 4-边连通图 G 是上可嵌入的, 即这种图 G 的最

大亏格等于 $\lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$. 然而, 我们不能保证边连通度不大于 3 的图是上可嵌入的 (见文献 [6]). 基于此目的, 这就导致我们去考虑还要增加哪些条件才能保证 $k (\leq 3)$ -边连通图是上可嵌入的. Chen 和 Liu^[7] 研究了上可嵌入性与边独立数及边连通性之间的关系, 得到如下定理:

定理 1.1^[7] 设 G 是 k -边连通图 (或简单图). 若

$$\alpha'(G) \leq (k-1)^2 + 1 \text{ (或 } (2k-3)(k-1) + 2), \quad k = 1, 2, 3,$$

则 G 是上可嵌入的.

本文引入图的围长, 进一步研究上可嵌入性与边独立数及边连通性之间的关系, 得到了如下结果, 即本文的主要结果:

定理 1.2 设 G 是 k -边连通图, 围长为 g . 若

$$\alpha'(G) \leq ((k-1)^2 + 2) \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + \frac{1 - (-1)^g}{2} ((k-1)(k-2) + 1) - 1, \quad k = 1, 2, 3,$$

则 G 是上可嵌入的, 且上界是最好的.

注意到定理 1.1 是定理 1.2 当 $g = 2$ 和 $g = 3$ 时的一种特殊情形.

2 基本引理

首先解释 Betti 亏数的定义. 设 G 为图, X 为 G 的一个边子集, 记号 $G \setminus X$ 表示从 G 中去掉 X 中的所有边所得的图. 设 T 为图 G 的一棵生成树. 记号 $\xi(G, T)$ 表示 $G \setminus E(T)$ 中有奇数条边的连通分支的数目, 则称 $\xi(G) = \min_T \xi(G, T)$ 为 G 的 Betti 亏数, 这里 $\min$ 取遍 G 的所有生成树 T .

在最大亏格的研究中, 一个最显著的事实就是最大亏格这个拓扑不变量能被纯组合形式刻画. 在这一节将给出几个关于图的 Betti 亏数的结果, 它们将在主要结果的证明中用到. 下面的引理是研究最大亏格的基本定理, 它给出了最大亏格由 $\xi(G)$ 和 $\beta(G)$ 所表示的一个公式, 以及一个图 G 是上可嵌入的充要条件.

引理 2.1^[3] 设 G 为图, 则

- (1) $\gamma_M(G) = (\beta(G) - \xi(G))/2$;
- (2) G 是上可嵌入的当且仅当 $\xi(G) \leq 1$.

因为 $\beta(G)$ 是一个很容易计算的量, 所以从引理 2.1 知, 对一个图 G 的最大亏格的研究完全可转化为对参数 $\xi(G)$ 的研究. 而我们又注意到 Nebesky^[4] 给出了图 G 的 Betti 数 $\xi(G)$ 的另一种组合表达式. 在给出这个组合表达式之前, 先给出一些定义.

设 G 是一个连通图, 且 $A \subseteq E(G)$. 置 $\nu(G, A) = c(G \setminus A) + b(G \setminus A) - |A| - 1$, 其中 $c(G \setminus A)$ 表示 $G \setminus A$ 的所有连通分支个数, $b(G \setminus A)$ 表示 $G \setminus A$ 中 Betti 亏数为奇数的连通分支个数.

引理 2.2^[4] 设 G 为连通图, 则

$$\xi(G) = \max\{\nu(G, A) | A \subseteq E(G)\}.$$

设 G 是一个连通图, 且 $A \subseteq E(G)$, $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_s}$ 为 $G \setminus A$ 的任意连通分支. 记号 $E(F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_s})$ 表示 G 中两个端点分别在两个不同的 F_{i_j} 和 F_{i_t} ($1 \leq j, t \leq s$ 且 $j \neq t$) 中的边集. 另外, 对 G 的任意子图 F , 记号 $E(F, G)$ 表示 G 中一个端点属于 F 而另一个端点不属于 F 的边集.

下面的结果给出了非上可嵌入图的结构特征:

引理 2.3^[8] 设 G 为图, 若 G 不是上可嵌入的, 即 $\xi(G) \geq 2$, 则存在 G 的边子集 A 满足下列性质:

- (1) $c(G \setminus A) = b(G \setminus A) \geq 2$;
- (2) $G \setminus A$ 的任意连通分支 F 是 G 的一个点导出子图;
- (3) 对于 $G \setminus A$ 的任意 s ($s \geq 2$) 个不同连通分支 $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_s}$, 都有 $|E(F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_s})| \leq 2s - 3$, 特别地, 当 $s = 2$ 时, $|E(F_{i_1}, F_{i_2})| \leq 1$;
- (4) $\xi(G) = 2c(G \setminus A) - |A| - 1$.

由引理 2.3, 我们进一步得到:

引理 2.4 在引理 2.3 的条件和结论下, 设 $F_1, F_2, \dots, F_l$ 为 $G \setminus A$ 的所有连通分支, 则

- (1) 对于 $G \setminus A$ 的任意连通分支 F , 若 G 为 k -边连通图, 则 $|E(F, G)| \geq k$;
- (2) $|A| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l |E(F_i, G)|$;
- (3) 若 G 为 k -边连通图, 则

$$l = c(G \setminus A) \geq (k-1)^2 + 2 = \begin{cases} 2, & k=1, \\ 3, & k=2, \\ 6, & k=3. \end{cases}$$

证明 (1) 和 (2) 显然, 因此只需证明 (3) 即可.

(i) 若 $k = 1$, 由引理 2.3(1), 显然成立.

(ii) 若 $k = 2, 3$, 对 $i = 1, 2, \dots, l$, 由引理 2.4(1), 有 $|E(F_i, G)| \geq k$, 从而由引理 2.4(2) 有

$$|A| = \sum_{i=1}^l |E(F_i, G)| \geq \frac{k}{2} l.$$

再由引理 2.3(4) 得

$$\xi(G) = 2c(G \setminus A) - |A| - 1 \leq 2l - \frac{k}{2} l - 1.$$

因为 $\xi(G) \geq 2$, 所以 $2l - \frac{k}{2} l - 1 \geq 2$, 从而

$$l \geq \frac{6}{4-k} = \begin{cases} 3, & k=2, \\ 6, & k=3. \end{cases}$$

下面考虑 2 个特殊的图.

引理 2.5 设 G 为 3-正则简单图, $|V(G)| = 6$, 则 G 同胚于图 1 中的 H_1 或 H_2 .

H_1

H_2

图 1

证明 显然 G 不是完全图, 所以点独立数 $\alpha(G) \geq 2$. 设 $V(G) = \{x, y, z, a, b, c\}$, 且不妨假设 x 与 y 不相邻. 因为 G 为 3-正则图, 所以可设 x 与 a, b, c 相邻.

若 y 也与 a, b, c 相邻, 则 z 必与 a, b, c 相邻, 此时 G 同胚于 H_1 ; 若 y 与 a, b, c 中的某个点不相邻, 不失一般性, 设 y 与 a 不相邻, 则 y 必与 z, b, c 相邻. 因 G 为 3-正则图, 所以 b 不可能与 c 相邻, 否则 z 必与 x, y, a 相邻, 这导致 x 会与 a, b, c, z 相邻, 显然矛盾. 所以 b 只可能与 a 和 z 中的一个相邻. 不失一般性, 设 b 与 a 相邻, 则 c 与 z 相邻, 同时 z 与 a 相邻, 这样 G 同胚于 H_2 .

引理 2.6 设 G 为简单图, 且 $\alpha'(G) = 1$, 则 G 同胚于完全图 K_3 或星图.

证明 因为 $\alpha'(G) = 1$, 所以 G 的任意两条边都相邻. 不失一般性, 设 $e_1 = xy$, $e_2 = xz$ 为 G 的两条相邻边.

对任意边 $f \in E(G) \setminus \{e_1, e_2\}$. 若 y 与 f 关联, 而 z 不与 f 关联, 则 f 与 e_2 不相邻. 这样 $\alpha'(G) \geq 2$, 矛盾.

若 $f = yz$, 因 G 为简单图, 所以 G 同胚于完全图 K_3 .

若 x 与 f 关联, 由 f 的任意性可知, G 同胚于星图.

3 定理 1.2 的证明

假设定理不真, 即 G 不是上可嵌入的. 由引理 2.3 知存在 $A \subseteq E(G)$ 满足引理 2.3 的性质 (1)–(4). 设 $F_1, F_2, \dots, F_l$ 为 $G \setminus A$ 的所有连通分支, 其中 $l = c(G \setminus A) \geq 2$. 根据 A 构造一个新图 G_A (称为 testable graph): $V(G_A)$ 为 $G \setminus A$ 的连通分支集合, G_A 中的两点相邻当且仅当它们有 A 中的边相连. 为避免混淆, 称 G_A 的顶点为节点, 且用 $u_A, v_A, \dots$ 表示. 先证明几个断言.

断言 3.1 $\alpha'(F_i) \geq \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$, $i = 1, 2, \dots, l$.

证明 由引理 2.3(1) 知, $\beta(F_i) \equiv 1 \pmod{2}$, 所以 F_i 不是一棵树, 即 F_i 至少含有一个圈 $C = y_1 y_2 \cdots y_k y_1$, 其中 $k \geq g$. 设

$$M = \left\{ y_{2i-1} y_{2i} \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right\}.$$

显然, M 是 F_i 的一个匹配 (同时也为 G 的一个匹配), 且

$$\alpha'(F_i) \geq |M| = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor.$$

断言 3.2 若 $g \equiv 1 \pmod{2}$, 则对 $i = 1, 2, \dots, l$ 及任意 $y \in V(F_i)$, F_i 中一定存在一个匹配 $M = \{e_1, e_2, \dots, e_{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor}\}$, 且 y 不与 $e_j (j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor)$ 关联.

证明 由引理 2.3(1) 知, F_i 至少含有一个圈 $C = y_1 y_2 \cdots y_k y_1$, 其中 $k \geq g$. 且 $M = \{y_{2i} y_{2i+1} \mid i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor\}$ 是 F_i 的一个匹配. 对任意 $y \in V(F_i)$, 若 $y \notin V(C)$, 显然 M 满足要求, 结论成立.

若 $y \in V(C)$, 则 $C - y$ 必是一条长为 $k - 2 (\geq g - 2)$ 的路. 在这条路上容易找到一个匹配 $M' (|M'| = \lfloor \frac{g}{2} \rfloor)$. 显然 y 不与 M' 中的任何边关联. 这样 M' 满足要求. 结论同样成立.

根据边连通度 $k = 1, 2, 3$, 我们分以下情形讨论:

情形 1 当 $k = 1$, 由引理 2.4(3) 知, $l \geq 2$. 此时无论 $g \equiv 0 \pmod{2}$ 还是 $g \equiv 1 \pmod{2}$,

根据定理的条件, 都有

$$\alpha'(G) \leq ((k-1)^2 + 2) \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + \frac{1 - (-1)^g}{2} ((k-1)(k-2) + 1) - 1 = g - 1.$$

子情形 1.1 当 $g \equiv 1 \pmod{2}$. 不失一般性, 设 $E(F_1, F_2) = \{e\}$, $e = xy$, $x \in V(F_1)$, $y \in V(F_2)$. 对 $i = 1, 2$, 由断言 3.2, 存在 F_i 的一个匹配 M_i ,

$$M_1 = \left\{ x_{2i-1}x_{2i} \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right\}, \quad M_2 = \left\{ y_{2i-1}y_{2i} \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right\},$$

且 $x \neq x_i, y \neq y_i (i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor)$, 从而

$$\alpha'(G) \geq \sum_{i=1}^2 |M_i| + |\{e\}| \geq 2 \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + 1 = g,$$

这与条件 $\alpha'(G) \leq g - 1$ 矛盾.

子情形 1.2 当 $g \equiv 0 \pmod{2}$. 由断言 3.1, 得到

$$\alpha'(G) \geq \sum_{i=1}^l \alpha'(F_i) \geq \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor l \geq g.$$

同样矛盾.

情形 2 当 $k = 2$, 由引理 2.4(3), $l \geq 3$.

子情形 2.1 若 $g \equiv 1 \pmod{2}$, 则有

$$\alpha'(G) \leq ((k-1)^2 + 2) \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + \frac{1 - (-1)^g}{2} ((k-1)(k-2) + 1) - 1 = 3 \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor.$$

不失一般性, 设 $E(F_1, F_2) = \{e\}$, $e = xy$, $x \in V(F_1)$, $y \in V(F_2)$. 对 $i = 1, 2$, 由断言 3.2, 存在 F_i 的一个匹配 M_i ,

$$M_1 = \left\{ x_{2i-1}x_{2i} \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right\}, \quad M_2 = \left\{ y_{2i-1}y_{2i} \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right\},$$

且 $x \neq x_i, y \neq y_i (i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor)$, 从而

$$\alpha'(G) \geq \sum_{i=1}^2 |M_i| + \alpha'(F_3) + |\{e\}| \geq 3 \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + 1.$$

得出矛盾.

子情形 2.2 若 $g \equiv 0 \pmod{2}$, 则有

$$\alpha'(G) \leq ((k-1)^2 + 2) \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + \frac{1 - (-1)^g}{2} ((k-1)(k-2) + 1) - 1 = 3 \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor - 1.$$

然而, 由断言 3.1 得

$$\alpha'(G) \geq \sum_{i=1}^l \alpha'(F_i) \geq \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor l \geq 3 \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor.$$

又得出矛盾.

情形 3 当 $k = 3$, 由引理 2.4(6), $l \geq 6$.

子情形 3.1 若 $g \equiv 1 \pmod{2}$, 则有

$$\alpha'(G) \leq ((k-1)^2 + 2) \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + \frac{1 - (-1)^g}{2} ((k-1)(k-2) + 1) - 1 = 6 \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + 2.$$

子情形 3.1.1 若 $l = 6$, 设 $F_1, F_2, \dots, F_6$ 为 $G \setminus A$ 的连通分支. 由引理 2.3(3),

$$|E(G_A)| = |A| \leq 2 \times 6 - 3 = 9.$$

因为 G 为 3- 边连通图, 所以 $\delta(G_A) \geq 3$. 于是

$$|E(G_A)| = \frac{1}{2} \sum_{v_A \in V(G_A)} d_{G_A}(v_A) \geq \frac{1}{2}(3 \times 6) = 9.$$

由此推出 $|E(G_A)| = 9$ 且 G_A 为 3- 正则图. 设 $V(G_A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 且每个顶点 j ($j = 1, 2, \dots, 6$) 对应一个连通分支 F_j . 由引理 2.3(3), G_A 为简单图, 从而由引理 2.5 知, G_A 同胚于 W_1 或 W_2 (见图 2).

图 2

容易得到 $\alpha'(G_A) = 3$. 不失一般性, 设 $E(F_1, F_2) = \{e\}$, $E(F_3, F_4) = \{f\}$, $E(F_5, F_6) = \{h\}$, 其中 $e = xy$, $f = zw$, $h = uv$, $x \in V(F_1)$, $y \in V(F_2)$, $z \in V(F_3)$, $w \in V(F_4)$, $u \in V(F_5)$, $v \in V(F_6)$. 对 $i = 1, 2, \dots, 6$, 由断言 3.2, F_i 存在一个匹配 M_i ,

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ x_{2i-1}x_{2i} \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right\}, & M_2 &= \left\{ y_{2i-1}y_{2i} \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right\}, \\ M_3 &= \left\{ z_{2i-1}z_{2i} \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right\}, & M_4 &= \left\{ w_{2i-1}w_{2i} \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right\}, \\ M_5 &= \left\{ u_{2i-1}u_{2i} \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right\}, & M_6 &= \left\{ v_{2i-1}v_{2i} \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right\}, \end{aligned}$$

且 $x \neq x_i, y \neq y_i, z \neq z_i, w \neq w_i, u \neq u_i, v \neq v_i$ ($i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$), 因此

$$\alpha'(G) \geq \sum_{i=1}^6 |M_i| + |\{e\}| + |\{f\}| + |\{g\}| \geq 6 \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + 3.$$

得出矛盾.

子情形 3.1.2 若 $l \geq 7$, 由引理 2.6 知 $\alpha'(G_A) \geq 2$, 类似地, 设 $E(F_1, F_2) = \{e\}$, $E(F_3, F_4) = \{f\}$, $e = xy$, $f = uv$, $x \in V(F_1)$, $y \in V(F_2)$, $u \in V(F_3)$, $v \in V(F_4)$. 对 $i = 1, 2, 3, 4$, 由断言 3.2, F_i 中存在一个匹配 M_i ,

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ x_{2i-1}x_{2i} \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right\}, & M_2 &= \left\{ y_{2i-1}y_{2i} \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right\}, \\ M_3 &= \left\{ u_{2i-1}u_{2i} \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right\}, & M_4 &= \left\{ v_{2i-1}v_{2i} \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right\}, \end{aligned}$$

且 $x \neq x_i, y \neq y_i, u \neq u_i, v \neq v_i$ ($i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$). 注意到 $g \geq 2$, 从而

$$\begin{aligned} \alpha'(G) &\geq \sum_{i=1}^4 |M_i| + \sum_{i=5}^l \alpha'(F_i) + |\{e\}| + |\{f\}| \\ &\geq l \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + 2 \geq 7 \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + 2 \geq 6 \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + 3. \end{aligned}$$

得出矛盾.

情形 3.2 若 $g \equiv 0 \pmod{2}$, 则

$$\alpha'(G) \leq ((k-1)^2 + 2) \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + \frac{1 - (-1)^g}{2} ((k-1)(k-2) + 1) - 1 = 6 \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor - 1.$$

而由断言 3.1 及 $l \geq 6$ 有

$$\alpha'(G) \geq \sum_{i=1}^l \alpha'(F_i) \geq \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor l \geq 6 \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor.$$

得出矛盾.

综上所述, G 是上可嵌入的.

下面我们将说明定理 1.2 中的界是最好的. 首先, 注意到上界 $((k-1)^2 + 2) \lfloor \frac{g}{2} \rfloor + \frac{1 - (-1)^g}{2} ((k-1)(k-2) + 1) - 1$ ($k = 1, 2, 3$) 不能被 $((k-1)^2 + 2) \lfloor \frac{g}{2} \rfloor + \frac{1 - (-1)^g}{2} ((k-1)(k-2) + 1)$ ($k = 1, 2, 3$) 所代替. 图 3 中列出了 3 个反例图.

图 3

注意到, 对 $i = 1, 2, 3$, 有 $k_1(G_i) = i$, $g(G_1) = g_1$, $g(G_2) = g_2$, $g(G_3) = g_3 = 3$. 容易验证

$$\alpha'(G_i) = ((i-1)^2 + 2) \left\lfloor \frac{g_i}{2} \right\rfloor + \frac{1 - (-1)^{g_i}}{2} ((i-1)(i-2) + 1).$$

然而, 对 G_1 , 置 $A_1 = \{e_1\}$; 对 G_2 , 置 $A_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$; 对 G_3 , 置 $A_3 = \{e_1, e_2, \dots, e_9\}$, 则

$$c(G_i \setminus A_i) + b(G_i \setminus A_i) - |A_i| - 1 = 2.$$

于是由引理 2.2 知, $\xi(G_i) \geq 2$, 即 G_i 不是上可嵌入的.

至此, 完成了定理 1.2 的证明.

致谢 诚挚地感谢审稿人提出的宝贵的修改意见和建议.

参考文献

- 1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory With Applications. London: Macmillan, 1976
- 2 Nordhaus E A, Stewart B M, White A T. On the maximum genus of a graph. *J Comb Theory Ser B*, **11**: 258–267 (1971)
- 3 Xuong N H. How to determine the maximum genus of a graph. *J Comb Theory Ser B*, **149**: 216–227 (1979)
- 4 Nebesky L. A new characterization of the maximum genus of a graph. *Czech Math J*, **31**(106): 604–613 (1981)
- 5 Xuong N H. Upper embeddable graph and related topics. *J Comb Theory Ser B*, **26**: 226–232 (1979)
- 6 Jungerman M. A characterization of upper embeddable graphs. *Trans Amer Math Soc*, **241**: 401–406 (1978)
- 7 Chen Y C, Liu Y P. Maximum genus, girth and maximum non-adjacent edge set. *Ars Combinatoria*, **79**: 145–159 (2006)
- 8 Huang Y Q, Liu Y P. Maximum genus and chromatic number of graphs. *Discrete Math*, **271**: 117–127 (2003)