Loop 与 current Virasoro 型 Lie 双代数的对偶

献给万哲先教授 90 华诞

宋光艾¹, 苏育才^{2*}

1. 山东工商学院数学与信息科学学院, 烟台 264005;

2. 同济大学数学系, 上海 200092

E-mail: gasong@sdibt.edu.cn, ycsu@tongji.edu.cn

收稿日期: 2016-06-20; 接受日期: 2016-11-30; 网络出版日期: 2017-02-27; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11431010, 11371278 和 11671056) 和山东自然科学基金 (批准号: ZR2013AL013 和 ZR2014AL001) 资助项目

摘要 Loop 与 current Virasoro 型 Lie 代数分别是 Virasoro 代数与多项式代数和 Laurent 多项式代数的张量 Lie 代数. 本文给出了 loop 型与 current Virasoro 型 Lie 双代数的对偶 Lie 双代数结构. 由此得到了一系列无限维 Lie 代数.

关键词 loop 代数 current 代数 Virasoro 代数 Lie 双代数 Lie 双代数的对偶

MSC (2010) 主题分类 17B62, 17B05, 17B66

1 引言

量子群是由 Drinfel'd 和 Jimbo 在 20 世纪 80 年代利用 Lie 代数的形变探讨 Yang-Baxter 方程的解时分别独立给出的代数结构, 而作为理论提出是由 Drinfel'd^[1] 在 1986 年 Berkeley 数学家大会上给出的. 由于其在物理、几何、扭结理论以及代数群的表示理论中的广泛应用, 使得量子群一直是研究的热点之一. Lie 双代数作为量子群的重要组成部分也备受关注, 参见文献 [2–6] 等. 文献 [7, 8] 给出了 Witt 型与 Virasoro 型 Lie 双代数的结构, 这些 Lie 双代数的分类问题由 Ng 和 Taft^[9] 给出. 他们证明了可以定义在单边 Witt 代数、Witt 代数和 Virasoro 代数上的 Lie 双代数结构均为上边缘三角的 Lie 双代数^[8]. 对于广义 Witt 型 Lie 双代数的情形, Song 和 Su^[10] 证明了可以定义在它们上面的 Lie 双代数只能是上边缘三角的 Lie 双代数, 类似的结论对一些其他类型 Lie 双代数也成立 (参见文献 [11, 12]). 如文献 [13, 14] 所述, 上边缘三角的 Lie 双代数的结构看上去相对简单, 但它绝不是平凡的. 事实上, 在这方面还有很多与之相关的问题目前仍然是公开问题. 例如, 最基本的问题: 上边缘三角的 (双边) Witt 型和 Virasoro 型 Lie 双代数的完全分类问题, 目前仍然是一个公开问题. 而关于无限维 Lie 双代数的表示方面还基本上是空白. 因此, 在无限维 Lie 双代数方面还值得我们花更多的精力予以关注. 文献 [13, 14] 给出了 (双边) Witt 型、Virasoro 型和 Poisson 型 Lie 双代数的对偶 Lie 双代数结构. 通过对偶关系我们还得到一系列新的无限维 Lie 代数. 如文献 [13, 14] 所述, 有限维 Lie 双

英文引用格式: Song G A, Su Y C. Dual Lie bialgebra structures of loop and current Virasoro algebras (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1595–1606, doi: 10.1360/N012016-00118

代数的对偶 Lie 双代数自然是 Lie 双代数, 不会有新的代数结构产生. 但是对于无限维的情形, 情况与有限维的情形完全不同, 在这方面面临的主要问题是确定无限维 Lie 双代数的最大好子空间.

Loop 代数是一类非常重要的代数结构, 它与 Kac-Moody 代数以及共形代数有着密切的联系 (参见文献 [15–17]), 在顶点算子代数中也起到了非常重要的作用. 文献 [16] 研究了 loop Virasoro 代数的表示. 文献 [18] 给出了广义 loop Virasoro 型 Lie 双代数的结构. 本文将给出 loop (current) Witt 型和 Virasoro 型 Lie 双代数的对偶 Lie 双代数结构.

记 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot])$ 为 Lie 代数, $(\mathcal{B}, \mu_2)$ 为交换结合代数. 在张量空间 $\mathcal{L}(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$ 有一 Lie 代数结构, 其方括号定义如下:

$$[f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2] = [f_1, f_2] \otimes \mu_2(g_1, g_2), \quad \text{其中 } f_1, f_2 \in \mathcal{L}, \quad g_1, g_2 \in \mathcal{B}. \quad (1.1)$$

特别地, 如果交换结合代数是 Laurent 多项式代数, 即 $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x, x^{-1}]$, 则称 Lie 代数 $\mathcal{L}$ 为 loop 代数 (参见文献 [16, 17]), 若 $\mathcal{B}$ 是多项式代数, 即 $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x]$, 则称其为 current 代数.

若 Lie 代数 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot])$ 是 (广义) Witt (或无中心的 Virasoro) 代数的情形, 其 Lie 代数结构可以按如下的方式由结合代数诱导得到: 令 $(\mathcal{A}, \mu_1)$ 是交换结合代数, 记 $\text{Der}(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 的导子代数, 取 $\partial \in \text{Der}(\mathcal{A})$. 由此, 可以得到一个由交换结合代数诱导的 (广义) Witt 代数 $\mathcal{L} = (\mathcal{A}, [\cdot, \cdot])$, 其方括号运算为

$$[f_1, f_2] = \mu_1(f_1, \partial(f_2)) - \mu_1(\partial(f_1), f_2), \quad \text{对任意的 } f_1, f_2 \in \mathcal{A}. \quad (1.2)$$

由此, 定义 (1.1) 给出的 Lie 代数 $\mathcal{L} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 的方括号运算 $\varphi = [\cdot, \cdot]$ 可以表示成以下形式:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} &= (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \xrightarrow{\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id}} (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}) \xrightarrow{\mu_1(\text{id} \otimes \partial - \partial \otimes \text{id}) \otimes \mu_2} \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{L}, \\ \varphi &= (\mu_1 \otimes \mu_2) \cdot (\text{id} \otimes \partial - \partial \otimes \text{id}) \otimes (\text{id} \otimes \text{id}) \cdot (\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

即 $\varphi(f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2) = (f_1 \partial(f_2) - \partial(f_1) f_2) \otimes g_1 g_2$, 对所有的 $f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2 \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. 而且, 若 $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x, x^{-1}]$, 则称 $\mathcal{L}$ 为 loop Witt 代数, 或 loop (无中心的) Virasoro 代数; 若 $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x]$, 则称 $\mathcal{L}$ 为 current Witt 代数, 或 current (无中心的) Virasoro 代数.

本文的结构如下: 第 2 节简要回顾一下相关的概念和结论; 第 3 节给出 loop 代数和 current 代数的对偶余代数结构. 最后在第 4 节, 给出 loop 型和 current 型 Lie 双代数的对偶 Lie 双代数结构. 本文的主要结果是定理 3.5、4.4 和 4.6.

2 预备知识

首先简要回顾一下有关概念, 详细的内容可参见文献 [10, 14, 19]. 本文的向量空间都是定义在特征为零的代数闭域 $\mathbb{F}$ 上. 记 $\mathbb{Z}_+$ 为非负整数集合.

定义 2.1 (1) 称三元组 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta)$ 为 Lie 双代数, 如果 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot])$ 是 Lie 代数, $(\mathcal{L}, \delta)$ 是 Lie 余代数, 并且 $\delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$ 是一个导子, 即 $\delta[x, y] = x \cdot \delta(y) - y \cdot \delta(x)$, $x, y \in \mathcal{L}$, 其中 $x \cdot (y \otimes z) = [x, y] \otimes z + y \otimes [x, z]$, $x, y, z \in \mathcal{L}$.

(2) 称 Lie 双代数 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta)$ 是上边缘三角的 Lie 双代数, 如果 δ 是上边缘的, 即存在 $r = \sum r^{[1]} \otimes r^{[2]} \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$, 使得 $\delta(x) = x \cdot r$, $x \in \mathcal{L}$, 并且 r 满足经典的 Yang-Baxter 方程 (CYBE)

$$C(r) = [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0, \quad (2.1)$$

其中 $r_{12} = \sum r^{[1]} \otimes r^{[2]} \otimes 1$, $r_{13} = \sum r^{[1]} \otimes 1 \otimes r^{[2]}$, $r_{23} = \sum r^{[1]} \otimes 1 \otimes r^{[2]}$ 是 $U(\mathcal{L})^{\otimes 3}$ 中的元素, $U(\mathcal{L})$ 是 Lie 代数 $\mathcal{L}$ 的普遍包络代数.

称 Lie 双代数 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta)$ 和 $(\mathcal{L}', [\cdot, \cdot]', \delta')$ 为对偶对, 如果存在 $\mathcal{L}' \times \mathcal{L}$ 上的非退化双线性型 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (自然地扩张成 $(\mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}') \times (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L})$ 上的非退化双线性型), 使它们的 Lie 双代数结构满足如下关系:

$$\langle [f, h]', \xi \rangle = \langle f \otimes h, \delta \xi \rangle, \quad \langle \delta' f, \xi \otimes \eta \rangle = \langle f, [\xi, \eta] \rangle, \quad f, h \in \mathcal{L}', \quad \xi, \eta \in \mathcal{L}. \quad (2.2)$$

特别地, $\mathcal{L}$ 称为自对偶的, 如果作为向量空间满足 $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$.

显然, 对有限维 Lie 双代数 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta)$ 而言, 其对偶空间 $\mathcal{L}^*$ 上有一个由对偶关系得到的自然 Lie 双代数结构, 通过向量空间 $\mathcal{L}$ 到 $\mathcal{L}^*$ 的同构, 可将 $\mathcal{L}^*$ 的 Lie 双代数结构拉回到 $\mathcal{L}$ 上, 使得 $\mathcal{L}$ 上有另一个 Lie 双代数结构. 因此, 有限维的 Lie 双代数总是自对偶的. 但对于无限维 Lie 双代数来说, 一般不是自对偶的.

为方便起见, 记 Lie 代数 $\mathcal{L} = (\mathcal{L}, [\cdot, \cdot])$ 的方括号为 $\varphi: \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, 记 $\varphi^*: \mathcal{L}^* \rightarrow (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L})^*$ 为 φ 的对偶. 子空间 $U \subset \mathcal{L}^*$ 称为 $\mathcal{L}^*$ 的一个好子空间, 如果 $\varphi^*(U) \subset U \otimes U$. 因此,

$$\mathcal{L}^\circ = \sum_{U \in \mathfrak{R}} U \quad (\text{其中 } \mathfrak{R} = \{U \mid U \text{ 是 } \mathcal{L}^* \text{ 的好子空间}\}) \quad (2.3)$$

是一个好子空间, 称为 $\mathcal{L}^*$ 的最大好子空间 (参见文献 [20]).

命题 2.2 [20] 设 $U \subset \mathcal{L}^*$ 是好子空间, 则 (U, φ^*) 是 Lie 余代数. 特别地, $(\mathcal{L}^\circ, \varphi^*)$ 是 Lie 余代数.

对于任意的 Lie 代数 $\mathcal{L}$, 其对偶空间 $\mathcal{L}^*$ 有自然的右 $\mathcal{L}$ -模结构, 定义为: 对任意的 $f \in \mathcal{L}^*$, $x \in \mathcal{L}$, 有 $(f \cdot x)(y) = f([x, y])$, $y \in \mathcal{L}$. 我们记 f 的由 $\mathcal{L}$ 中的元素引起的平移空间为 $f \cdot \mathcal{L} = \text{span}\{f \cdot x \mid x \in \mathcal{L}\}$.

下面的命题是概括文献 [19, 21–23] 中的相关结论得到的.

命题 2.3 令 $\mathcal{L}$ 为任意 Lie 代数, 则

- (1) $\mathcal{L}^\circ = \{f \in \mathcal{L}^* \mid f \cdot \mathcal{L} \text{ 是有限维的}\}$;
- (2) $\mathcal{L}^\circ = (\varphi^*)^{-1}(\mathcal{L}^* \otimes \mathcal{L}^*)$ 为 $\mathcal{L}^* \otimes \mathcal{L}^*$ 在 $\mathcal{L}^*$ 中的原像.

类似地, 可以定义结合代数的好子空间. 在下面的两部分内容中, 我们将探讨相关的结合代数或 Lie 代数 $\mathcal{L}$ 的最大好子空间 $\mathcal{L}^\circ$.

3 Loop 和 current Witt 代数的极大好子空间

如文献 [13] 所述, 令 $(\mathcal{A}, \mu, \epsilon)$ 为有单位的结合代数, 其乘法运算 $\mu: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 和单位 $\epsilon: \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{A}$ 满足

$$\mu \circ (\text{id} \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes \text{id}): \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A},$$

$$(\epsilon \otimes \text{id})(k \otimes a) = (\text{id} \otimes \epsilon)(a \otimes k): \mathbb{F} \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{A} \otimes \mathbb{F} \cong \mathcal{A}, \quad \text{其中 } k \in \mathbb{F}, \quad a, b, c \in \mathcal{A},$$

则余代数可通过反向结合代数定义的箭头得到, 即它是一个三元组 (C, Δ, η) , 余乘法 $\Delta: C \rightarrow C \otimes C$ 和余单位 $\eta: C \rightarrow \mathbb{F}$ 满足

$$(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta: C \rightarrow C \otimes C \otimes C,$$

$$(\eta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \eta) \circ \Delta: C \rightarrow C \otimes C \rightarrow \mathbb{F} \otimes C \cong C \otimes \mathbb{F} \cong C.$$

注意到, 对线性空间 $\mathcal{A}$ 来说, 有自然嵌入 $\rho: \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^* \rightarrow (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})^*$, $\rho(f, g)(a, b) = \langle f, a \rangle \langle g, b \rangle$, $f, g \in \mathcal{A}^*$, $a, b \in \mathcal{A}$. 对结合代数 $(\mathcal{A}, \mu)$ 来说, 乘法 $\mu: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 自然诱导出 $\mu^*: \mathcal{A}^* \rightarrow (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})^*$. 若 $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A} < \infty$,

同构 ρ 确保 $(\mathcal{A}^*, \mu^*, \epsilon^*)$ 是余代数, 此处的余乘法 μ^* 表示复合 $\mathcal{A}^* \xrightarrow{\mu^*} (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})^* \xrightarrow{(\rho)^{-1}} \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^*$, 为方便仍记为 μ^* . 若 $(\mathcal{A}, \mu)$ 是交换结合代数, 由 $\mathcal{A}^\circ = (\mu^*)^{-1}(\mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^*)$ (参见文献 [6]), 对于任意的 $\partial \in \text{Der}(\mathcal{A})$ 以及 $f \in \mathcal{A}^\circ$, 由

$$\partial\mu = \mu(\text{id} \otimes \partial + \partial \otimes \text{id}), \quad \mu^* \partial^*(f) = (\text{id} \otimes \partial^* + \partial^* \otimes \text{id})\mu^*(f) \in \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^*,$$

可知 $\partial^*(\mathcal{A}^\circ) \subset \mathcal{A}^\circ$.

若 $\mathcal{L} = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \varphi)$ 是由 (1.3) 定义的 Lie 代数, 如文献 [14] 所述, 从 $\mathcal{L}^* = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^*$ 的某些特定子空间出发, 有两种自然的途径生成 Lie 余代数, 方法如下.

首先, 对交换结合代数 $(\mathcal{L}, \mu)$, 其中

$$\mu : (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \times (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \xrightarrow{\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id}} (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}) \xrightarrow{\mu_1 \otimes \mu_2} \mathcal{A} \otimes \mathcal{B},$$

为方便起见, 记 $\mu = (\mu_1, \mu_2)$. 注意到 $\mathcal{A}^* \otimes \mathcal{B}^* \subset (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^*$. 下面的引理来自文献 [6].

引理 3.1 令 $(\mathcal{L}, \mu)$ 为如上定义的交换结合代数, 则 $(\mathcal{L}^\circ, \mu^\circ) = (\mathcal{A}^\circ \otimes \mathcal{B}^\circ, \mu^\circ = (\mu_1^\circ, \mu_2^\circ))$ 是余交换余结合的余代数, 其中 $\mu_1^\circ = \mu_1^*|_{\mathcal{A}^\circ}$, $\mu_2^\circ = \mu_2^*|_{\mathcal{B}^\circ}$.

注 3.2 由乘法运算的对偶运算

$$\mu^* : (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^* \xrightarrow{(\mu_1 \otimes \mu_2)^*} ((\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}))^* \xrightarrow{(\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id})^*} ((\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}))^*,$$

我们有

$$\mu^\circ : \mathcal{A}^\circ \otimes \mathcal{B}^\circ \xrightarrow{\mu_1^\circ \otimes \mu_2^\circ} (\mathcal{A}^\circ \otimes \mathcal{A}^\circ) \otimes (\mathcal{B}^\circ \otimes \mathcal{B}^\circ) \xrightarrow{\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id}} (\mathcal{A}^\circ \otimes \mathcal{B}^\circ) \otimes (\mathcal{A}^\circ \otimes \mathcal{B}^\circ),$$

在此我们简记为 $\mu^\circ = (\mu_1^\circ, \mu_2^\circ)$.

记 $(\mathcal{L}_\mu^\circ, \Delta_\mu)$ 为由交换结合代数 $(\mathcal{L}, \mu)$ 诱导的 Lie 余代数, 其中 $\mathcal{L}_\mu^\circ$ 是 $\mathcal{L}^*$ 在运算 μ^* 下的最大好子空间, 则

$$\begin{aligned} \Delta_\mu(f \otimes g) &= (\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id}) \cdot ((\text{id} \otimes \partial^\circ - \partial^\circ \otimes \text{id}) \otimes (\text{id} \otimes \text{id})) \cdot (\mu_1^\circ \otimes \mu_2^\circ)(f \otimes g) \\ &= (\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id})((\text{id} \otimes \partial^\circ - \partial^\circ \otimes \text{id}) \otimes (\text{id} \otimes \text{id}))(\mu_1^\circ(f) \otimes \mu_2^\circ(g)) \\ &= \sum_{(f)(g)} (f_{(1)} \otimes g_{(1)} \otimes \partial^\circ(f_{(2)}) \otimes g_{(2)} - \partial^\circ(f_{(1)}) \otimes g_{(1)} \otimes f_{(2)} \otimes g_{(2)}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中

$$\mu_1^\circ(f) = \sum_{(f)} f_{(1)} \otimes f_{(2)}, \quad \mu_2^\circ(g) = \sum_{(g)} g_{(1)} \otimes g_{(2)}.$$

这是第一种产生 Lie 余代数的方法.

另一种方法是通过由 (1.3) 定义的 Lie 代数 $(\mathcal{L}, \varphi)$ 直接诱导, 即反向 Lie 代数定义中箭头的方向获得. 记 $\mathcal{L}_\varphi^\circ$ 为 $\mathcal{L}^*$ 的在运算 φ^* 下的最大好子空间, 其中

$$\varphi^* = (\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id})^* \cdot ((\text{id} \otimes \partial - \partial \otimes \text{id}) \otimes (\text{id} \otimes \text{id}))^* \cdot (\mu_1 \otimes \mu_2)^* : \mathcal{L}^* \rightarrow (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L})^*.$$

记 $\Delta_\varphi = \varphi^*|_{\mathcal{L}_\varphi^\circ}$, 则 $(\mathcal{L}_\varphi^\circ, \Delta_\varphi)$ 是 Lie 余代数 (参见文献 [20]), 称为 Lie 代数 $(\mathcal{L}, \varphi)$ 的对偶 Lie 余代数, 简称为 Lie 代数 $(\mathcal{L}, \varphi)$ 的对偶.

注 3.3 $\mathcal{L}_\mu^\circ$ 与 $\mathcal{L}_\varphi^\circ$ 的不同在于, $\mathcal{L}_\mu^\circ$ 是 $\mathcal{L}^*$ 在运算 μ^* 下的最大好子空间, 而 μ^* 是交换结合代数 $(\mathcal{L}, \mu)$ 的乘法 μ 的对偶; $\mathcal{L}_\varphi^\circ$ 是 $\mathcal{L}^*$ 在运算 φ^* 下的最大好子空间, 而 φ^* 是 Lie 代数 $(\mathcal{L}, \varphi)$ 的方括号运算 φ 的对偶.

命题 3.4 Lie 余代数 $(\mathcal{L}_\mu^\circ, \Delta_\mu)$ 是 Lie 余代数 $(\mathcal{L}_\varphi^\circ, \Delta_\varphi)$ 的 Lie 余子代数.

证明 对于 $f = \sum_{(f)} f_{(1)} \otimes f_{(2)} \in \mathcal{L}_\mu^\circ = \mathcal{A}^\circ \otimes \mathcal{B}^\circ$, 我们有

$$\begin{aligned}\varphi^*(f) &= (\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id})^* \cdot ((\text{id} \otimes \partial - \partial \otimes \text{id}) \otimes (\text{id} \otimes \text{id}))^* \cdot \sum_{(f)} (\mu_1^*(f_{(1)}) \otimes \mu_2^*(f_{(2)})) \\ &= (\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id})^* \sum_{(f), (f_{(1)}), (f_{(2)})} f_{(1)}^1 \otimes (\partial^*(f_{(1)}^2) - \partial^*(f_{(1)}^1) \otimes f_{(1)}^2) \otimes (f_{(2)}^1 \otimes f_{(2)}^2) \\ &= \sum_{(f), (f_{(1)}), (f_{(2)})} ((f_{(1)}^1 \otimes f_{(2)}^1) \otimes (\partial^*(f_{(1)}^2) \otimes f_{(2)}^2) - (\partial^*(f_{(1)}^1) \otimes f_{(2)}^1) \otimes (f_{(1)}^2 \otimes f_{(2)}^2)),\end{aligned}$$

其中

$$\mu_1^*(f_{(1)}) = \sum_{(f_{(1)})} f_{(1)}^1 \otimes f_{(1)}^2 \in \mathcal{A}^\circ \otimes \mathcal{A}^\circ, \quad \mu_2^*(f_{(2)}) = \sum_{(f_{(2)})} f_{(2)}^1 \otimes f_{(2)}^2 \in \mathcal{B}^\circ \otimes \mathcal{B}^\circ.$$

故 $\varphi^*(f) \in \mathcal{L}_\varphi^\circ \otimes \mathcal{L}_\varphi^\circ$. □

定理 3.5 令 $\mathcal{L} = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu)$ 是域 $\mathcal{K}$ 上按以上方式定义的交换结合代数, $\text{char } \mathcal{K} \neq 2$. 令 $(\mathcal{L}, \varphi)$ 是由 (1.3) 定义的 Lie 代数. 若存在 $Z = z \otimes c \in \mathcal{L}$, 使得由 $2\partial(Z)$ 生成的 $(\mathcal{L}, \mu)$ 的理想 $(2\partial(Z))$ 是余维数有限的 (为方便起见, 这里记 $\partial(Z) = \partial(z) \otimes c$), 则 $\mathcal{L}_\mu^\circ = \mathcal{L}_\varphi^\circ$. 特别地, 若 $\mathcal{A} = \mathcal{K}[t]$ 或 $\mathcal{A} = \mathcal{K}[t, t^{-1}]$, 则 $\mathcal{L}_\mu^\circ = \mathcal{L}_\varphi^\circ$.

证明 记 $\cdot$ 和 $*$ 分别为 $(\mathcal{L}, \mu)$ 和 $(\mathcal{L}, \varphi)$ 在 $\mathcal{L}^*$ 上的作用, 即对于任意的 $X, Y \in \mathcal{L}, f \in \mathcal{L}^*$, 有

$$(f \cdot X)(Y) = f(\mu(X, Y)), \quad (f * X)(Y) = f(\varphi(X, Y)).$$

令 $X = x \otimes a, Y = y \otimes b \in \mathcal{L}$, 由

$$\varphi(X, \mu(Y, Z)) - \varphi(\mu(X, Z), Y) = \varphi(x \otimes a, yz \otimes bc) - \varphi(xz \otimes ac, y \otimes b) = 2xy\partial(z) \otimes abc,$$

我们有

$$((f * X) \cdot Z - f * \mu(X, Z))(Y) = f(2x\partial(z)y \otimes abc) = (f \cdot (\mu(X, 2\partial(Z))))(Y),$$

即

$$(f * X) \cdot Z - f * \mu(X, Z) = f \cdot \mu(X, 2\partial(Z)). \quad (3.2)$$

若 $f \in \mathcal{L}_\varphi^*$, 即 $f * \mathcal{L}$ 有限维, 再由 (3.2) 可知, $f \cdot \mu(\mathcal{L}, 2\partial(Z))$ 也是有限维. 若由 $2\partial(Z)$ 生成的 $(\mathcal{L}, \mu)$ 中的理想是余维数有限的, 则 $f \cdot \mathcal{L}$ 是有限维的. 由命题 2.3 知, $f \in \mathcal{L}_\mu^\circ$. 再由命题 3.4, 定理得证. □

令 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t]$ (或 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t, t^{-1}]$) 是关于变元 t 的多项式 (或 Laurent 多项式) 代数, 则 $\mathcal{S} = \{t^i \mid i \in \mathbb{Z}_+ \text{ (或 } i \in \mathbb{Z})\}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一组标准基, 记 $\{\varepsilon^i \mid i \in \mathbb{Z}_+ \text{ (或 } i \in \mathbb{Z})\}$ 为 $\mathcal{S}$ 对偶基, 即 $\varepsilon^i(t^j) = \delta_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+ \text{ (或 } i, j \in \mathbb{Z})$. 下面的结论来自文献 [13, 14] (需要注意的是, $\mathbb{F}[[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]]$ 是 $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ 的完全线性对偶, 它上面没有自然的代数结构).

命题 3.6 (1) 设 $f = \sum_{i=0}^\infty f_i \varepsilon^i \in \mathbb{F}[[\varepsilon]]$, $f_i \in \mathbb{F}$, 则

$$f \in \mathbb{F}[t]^\circ \Leftrightarrow f_n = h_1 f_{n-1} + h_2 f_{n-2} + \cdots + h_r f_{n-r} \text{ 对某个 } r \in \mathbb{N}, h_i \in \mathbb{F} \text{ 及所有的 } n > r \text{ 成立}$$

$$\Leftrightarrow f \in \left\{ \frac{g(\varepsilon)}{h(\varepsilon)} \mid g(\varepsilon), h(\varepsilon) \in \mathbb{F}[\varepsilon], h(0) \neq 0 \right\}.$$

(2) 对于 $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j \varepsilon^j \in \mathbb{F}[[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]]$, $f_j \in \mathbb{F}$, 则

$$f \in \mathbb{F}[t, t^{-1}]^\circ \Leftrightarrow f_n = h_1 f_{n-1} + h_2 f_{n-2} + \cdots + h_r f_{n-r}$$

对某个 $r \in \mathbb{N}$, $h_i \in \mathbb{F}$ 及所有的 $n \in \mathbb{Z}$ 成立.

在下面的部分, 我们将讨论 loop 型与 current 型 Witt (或 Virasoro) Lie 双代数的对偶.

4 Loop 与 current 型 Lie 双代数的对偶

令 Γ 为 $\mathbb{F}$ 的加法子群, $\mathbb{F}[\Gamma]$ 是 Γ 的群代数, $\{e^\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 是一组基, 乘法 $e^\alpha e^\beta = e^{\alpha+\beta}$. 令 ∂ 是 $\mathbb{F}[\Gamma]$ 的导子, 定义为

$$\partial(e^\alpha) = \alpha e^\alpha,$$

则在群代数 $\mathbb{F}[\Gamma]$ 上有 Lie 代数结构, 其括号运算为 $[e^\alpha, e^\beta] = e^\alpha \partial(e^\beta) - \partial(e^\alpha) e^\beta$, 称为广义 Witt (或无中心的 Virasoro) 代数 (参见文献 [24, 25]). 令 $\mathcal{B}$ 为有单位的交换结合代数, 则 $\mathcal{W} = \mathbb{F}[\Gamma] \otimes \mathcal{B}$ 是 Lie 代数, 其括号运算由 (1.3) 给出. 特别地, $\mathcal{W}$ 是 loop (或 current) Witt (或无中心的 Virasoro) 代数, 如果 $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x, x^{-1}]$ (或 $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x]$). 下面的结论来自文献 [9, 18].

命题 4.1 (1) $\mathcal{W} = \mathbb{F}[\Gamma] \otimes \mathcal{B}$ (这里 $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x, x^{-1}]$ 或 $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x]$) 上的 Lie 双代数结构是上边缘三角的.

(2) 令 $\mathcal{A}$ 是经典的 Witt (或 Virasoro) 代数 (即 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t, t^{-1}]$, 使得 $[f, g] = f \frac{dg}{dt} - g \frac{df}{dt}$, $f, g \in \mathcal{A}$).

(i) 在 $\mathcal{A}$ 上的任意 Lie 双代数的结构都是相关于经典 Yang-Baxter 方程 (2.1) 的解 r 的上边缘三角的 Lie 双代数, 其中 $r = a \otimes b - b \otimes a$, 对某些非零的 $a, b \in \mathcal{A}$ 满足 $[a, b] = kb$, $0 \neq k \in \mathbb{F}$.

(ii) 令 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数 $\mathcal{A}$ 的无限维子代数, 满足 $t \in \mathfrak{g}$, 且作为 Lie 代数 $\mathfrak{g} \not\cong \mathcal{A}$. 记定义在 $\mathfrak{g}$ 上的相关于经典 Yang-Baxter 方程的解 $r_n = t \otimes t^n - t^n \otimes t$ 的 Lie 双代数为 $\mathfrak{g}^{(n)}$, 则定义在 $\mathfrak{g}$ 上的每一个 Lie 双代数都同构于某个 $\mathfrak{g}^{(n)}$, 对于满足 $t^n \in \mathfrak{g}$ 的 n 成立.

命题 4.2 令 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t, t^{-1}]$ 或 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t]$, $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x, x^{-1}]$ 或 $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x]$, 令 $(\mathcal{L}, \varphi)$ 为 Witt (或 Virasoro) 型 loop (或 current) 代数, 其中 $\mathcal{L} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. 令 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数 $(\mathcal{A}, [\cdot, \cdot])$ 的无限维 Lie 子代数, 方括号运算由 (1.2) 给出, 满足 $t \in \mathfrak{g}$, 并且作为 Lie 代数 $\mathfrak{g} \not\cong \mathcal{A}$. 记 $(\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}, \varphi) = (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{B}, \varphi)$, 它显然是 $(\mathcal{L}, \varphi)$ 的子代数. 记 $\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}^n$ 为定义在 $\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}$ 上的相关于经典 Yang-Baxter 方程的解 $r_n = (t \otimes 1) \otimes (t^n \otimes f) - (t^n \otimes f) \otimes (t \otimes 1)$ 的 Lie 双代数, 这里的 n 满足 $t^n \otimes f \in \mathfrak{g} \otimes \mathcal{B}$, 则定义在 $\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}$ 上的所有的 Lie 双代数结构都同构于某个 $\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}^n$.

文献 [13] 构造了 Witt 型和 Virasoro 型 Lie 双代数的对偶 Lie 双代数结构, 文献 [14] 给出了 Poisson 型 Lie 双代数的对偶 Lie 双代数结构. 下面考虑 loop 型与 current 型 Lie 双代数的对偶 Lie 双代数结构.

在接下来的内容中, 记 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t]$ (或 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t, t^{-1}]$), 记 $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x]$ (或 $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x, x^{-1}]$) 分别为关于变元 t 和 x 的多项式 (或 Laurent 多项式) 代数. 令 $(\mathcal{L}, \varphi)$ 为 loop (或 current) 代数, 这里 $\mathcal{L} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, Lie 运算 φ 由 (1.1) 和 (1.3) 给出, 结合代数 $(\mathcal{L}, \mu)$ 是由 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 通常的张量积构成, 由定理 3.5, 有 $\mathcal{L}_\varphi^\circ = \mathcal{L}_\mu^\circ$.

为方便起见, 我们记,

$$\Theta_{\mathcal{A}} = \begin{cases} \mathbb{Z}_+, & \text{若 } \mathcal{A} = \mathbb{F}[t], \\ \mathbb{Z}, & \text{若 } \mathcal{A} = \mathbb{F}[t, t^{-1}], \end{cases} \quad \Theta_{\mathcal{B}} = \begin{cases} \mathbb{Z}_+, & \text{若 } \mathcal{B} = \mathbb{F}[x], \\ \mathbb{Z}, & \text{若 } \mathcal{B} = \mathbb{F}[x, x^{-1}]. \end{cases} \quad (4.1)$$

显然, $\{x^j \mid j \in \Theta_{\mathcal{B}}\}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一组基. 我们记 $\{\epsilon^j \mid j \in \Theta_{\mathcal{B}}\}$ 为它的对偶基, 称为 $\mathcal{B}$ 的关于基 $\{x^j \mid j \in \Theta_{\mathcal{B}}\}$ 的标准对偶基, 即 $\epsilon^i(x^j) = \delta_{i,j}$, $i, j \in \Theta_{\mathcal{B}}$. 有关 $\mathcal{A}$ 的标准对偶基, 我们已在第 3 节给出.

对于 $f \in \mathcal{L}^* = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^*$, 其展开式为 $f = \sum_{i,j} f_{i,j} \epsilon^i \otimes \eta^j$ (可以是无限和), $f_{i,j} \in \mathbb{F}$, 对于任意的 $u = \sum_{k,l} u_{k,l} t^k \otimes x^l \in \mathcal{L}$ (有限和), $u_{k,l} \in \mathbb{F}$, $i, k \in \Theta_{\mathcal{A}}$, $j, l \in \Theta_{\mathcal{B}}$, 我们有

$$f(u) = \sum_{i,j,k,l} f_{i,j} u_{k,l} \epsilon^i(t^k) \eta^j(x^l) = \sum_{i,j,k,l} f_{i,j} u_{k,l} \delta_{i,k} \delta_{j,l} \quad (\text{有限和}). \quad (4.2)$$

约定 4.3 在方程中若有没定义的表达式出现, 我们将视为 0, 例如, 若 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t]$, 则视 $\epsilon^i = 0$, 对任意的 $i < 0$. 在不引起混淆的情形下, 按照通常的习惯, 我们总是用 $[\cdot, \cdot]$ 来记 $\mathcal{L}$ 或 $\mathcal{L}^\circ$ 中的方括号运算, 即 $[\cdot, \cdot] = \varphi$ 或 $[\cdot, \cdot] = \delta^\circ$. 用 Δ 记 $\mathcal{L}$ 或 $\mathcal{L}^\circ$ 中的余方括号运算, 即 $\Delta = \delta$ 或 $\Delta = \varphi^\circ$.

对于 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t]$ (或 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t, t^{-1}]$), $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x]$ (或 $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x, x^{-1}]$), 由定理 3.5, 有 $\mathcal{L}_\varphi^\circ = \mathcal{L}_\mu^\circ = \mathcal{A}^\circ \otimes \mathcal{B}^\circ$. 取 $u = t \otimes 1$, $v = t^n \otimes x^m$, 其中 $n \in \Theta_{\mathcal{A}}$, $m \in \Theta_{\mathcal{B}}$. 由 (1.3) 可知, $[u, v] = (n-1)(t^n \otimes x^m)$. 记 $r = u \otimes v - v \otimes u$. 由文献 [7] 知, 三元组 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \Delta_r)$ 是上边缘三角的 Lie 双代数, 其余方括号运算为

$$\Delta_r(h) = h \cdot r = [h, u] \otimes v + u \otimes [h, v] - [h, v] \otimes u - v \otimes [h, u], \quad \text{对任意的 } h \in \mathcal{L}. \quad (4.3)$$

我们称之为 loop (或 current) Witt (或 Virasoro) 型上边缘三角的 Lie 双代数.

从现在开始, 我们将讨论 Lie 双代数 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \Delta_r)$ 的对偶 Lie 双代数结构.

定理 4.4 令 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot])$ 为由 (1.3) 定义的 Lie 代数, 其中 $\mathcal{L} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 这里 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t]$ (或 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t, t^{-1}]$), $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x]$ (或 $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x, x^{-1}]$). 令 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \Delta_r)$ 为相关于经典 Yang-Baxter 方程解 r 的上边缘三角的 Lie 双代数, 其中 $r = u \otimes v - v \otimes u$, $u = t \otimes 1$, $v = t^n \otimes x^m$ 对某些固定的 $n \in \Theta_{\mathcal{A}}$ 以及 $m \in \Theta_{\mathcal{B}}$, 并且 $n \neq 1$. 则 Lie 双代数 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \Delta_r)$ 的对偶 Lie 双代数是 $(\mathcal{L}^\circ, [\cdot, \cdot], \Delta)$, 其中 $\mathcal{L}^\circ$ 由命题 3.6 给出, 而余方括号运算 Δ 的定义为

$$\Delta(\epsilon^k \otimes \eta^l) = \sum_{i+j=k, p+q=l} ((j+1)\epsilon^i \otimes \eta^p \otimes \epsilon^{j+1} \otimes \eta^q - (i+1)\epsilon^{i+1} \otimes \eta^p \otimes \epsilon^j \otimes \eta^q). \quad (4.4)$$

方括号运算 $[\cdot, \cdot]$ 由它的斜对称性以及下面的公式唯一确定:

(1) 若 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t]$, $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x]$, 则对于 $i, j, k, l \in \mathbb{Z}_+$,

$$[\epsilon \otimes 1, \epsilon^k \otimes \eta^l] = \begin{cases} (2n-k-1)\epsilon^{k-n+1} \otimes \eta^{l-m}, & \text{若 } k+1 \geq n, \quad l \geq m, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$[\epsilon^n \otimes \eta^m, \epsilon^k \otimes \eta^l] = (k-1)\epsilon^k \otimes \eta^l, \quad \text{若 } (n, m) \neq (k, l) \neq (1, 0),$$

$$[\epsilon^i \otimes \eta^j, \epsilon^k \otimes \eta^l] = 0, \quad \text{若 } (i, j), (k, l) \neq (1, 0), (n, m).$$

(2) 若 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t]$, $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x, x^{-1}]$, 则对于 $i, k \in \mathbb{Z}_+$, $j, l \in \mathbb{Z}$,

$$[\epsilon \otimes 1, \epsilon^k \otimes \eta^l] = \begin{cases} (2n-k-1)\epsilon^{k-n+1} \otimes \eta^{l-m}, & \text{若 } k+1 \geq n, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon^n \otimes \eta^m, \varepsilon^k \otimes \eta^l] &= (k-1)\varepsilon^k \otimes \eta^l, \quad \text{若 } (n, m) \neq (k, l) \neq (1, 0), \\ [\varepsilon^i \otimes \eta^j, \varepsilon^k \otimes \eta^l] &= 0, \quad \text{若 } (i, j), (k, l) \neq (1, 0), (n, m). \end{aligned}$$

(3) 若 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t, t^{-1}]$, $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x]$, 则对于 $i, k \in \mathbb{Z}$, $j, l \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned} [\varepsilon \otimes 1, \varepsilon^k \otimes \eta^l] &= \begin{cases} (2n-k-1)\varepsilon^{k-n+1} \otimes \eta^{l-m}, & \text{若 } l \geq m, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \\ [\varepsilon^n \otimes \eta^m, \varepsilon^k \otimes \eta^l] &= (k-1)\varepsilon^k \otimes \eta^l, \quad \text{若 } (n, m) \neq (k, l) \neq (1, 0), \\ [\varepsilon^i \otimes \eta^j, \varepsilon^k \otimes \eta^l] &= 0, \quad \text{若 } (i, j), (k, l) \neq (1, 0), (n, m). \end{aligned}$$

(4) 若 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t, t^{-1}]$, $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x, x^{-1}]$, 则对于 $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$,

$$[\varepsilon \otimes 1, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = (2n-k-1)\varepsilon^{k-n+1} \otimes \eta^{l-m}, \quad (4.5)$$

$$[\varepsilon^n \otimes \eta^m, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = (k-1)\varepsilon^k \otimes \eta^l, \quad \text{若 } (n, m) \neq (k, l) \neq (1, 0), \quad (4.6)$$

$$[\varepsilon^i \otimes \eta^j, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = 0, \quad \text{若 } (i, j), (k, l) \neq (1, 0), (n, m). \quad (4.7)$$

证明 用 μ_1 和 μ_2 分别记 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 上的乘法运算, 假设对任意的 k , $\mu_1^\circ(\varepsilon^k) = \sum_{i,j} c_{i,j}^k \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j$, $c_{i,j}^k \in \mathbb{F}$, 则 $c_{i,j}^k = \sum_{i,j} c_{i,j}^k \langle \varepsilon^i, t^i \rangle \langle \varepsilon^j, t^j \rangle = \mu_1^\circ(\varepsilon^k)(t^i \otimes t^j) = \varepsilon^k(\mu_1(t^i, t^j)) = \delta_{k,i+j}$. 故

$$\mu_1^\circ(\varepsilon^k) = \sum_{i+j=k} \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j. \quad (4.8)$$

再假设 $\partial^\circ(\varepsilon^k) = \sum_i c_i^k \varepsilon^i$, $c_i^k \in \mathbb{F}$, 则

$$c_l^k = \sum_i c_i^k \langle \varepsilon^i, t^l \rangle = \partial^\circ(\varepsilon^k)(t^l) = \varepsilon^k(\partial(t^l)) = l\delta_{k,l-1},$$

即 $\partial^\circ(\varepsilon^k) = (k+1)\varepsilon^{k+1}$. 类似可证, $\mu_2^\circ(\varepsilon^k) = \sum_{i+j=k} \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j$ 对所有的 k . 于是,

$$\begin{aligned} \Delta(\varepsilon^k \otimes \eta^l) &= (\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id}) \cdot ((\text{id} \otimes \partial^\circ - \partial^\circ \otimes \text{id}) \otimes (\text{id} \otimes \text{id})) \cdot (\mu_1^\circ \otimes \mu_2^\circ)(\varepsilon^k \otimes \eta^l) \\ &= (\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id}) \left(\sum_{i+j=k, p+q=l} (\varepsilon^i \otimes \partial^\circ(\varepsilon^j) - \partial^\circ(\varepsilon^i) \otimes \varepsilon^j) \otimes (\eta^p \otimes \eta^q) \right) \\ &= \sum_{i+j=k, p+q=l} ((j+1)\varepsilon^i \otimes \eta^p \otimes \varepsilon^{j+1} \otimes \eta^q - (i+1)\varepsilon^{i+1} \otimes \eta^p \otimes \varepsilon^j \otimes \eta^q). \end{aligned}$$

因此, 结论 (4.4) 成立. 下面证方括号运算, 为此, 我们有

$$\begin{aligned} &\langle [\varepsilon^i \otimes \eta^j, \varepsilon^k \otimes \eta^l], t^p \otimes x^q \rangle \\ &= \langle (\varepsilon^i \otimes \eta^j) \otimes (\varepsilon^k \otimes \eta^l), \Delta(t^p \otimes x^q) \rangle \\ &= \langle (\varepsilon^i \otimes \eta^j) \otimes (\varepsilon^k \otimes \eta^l), (1-p)(t^p \otimes x^q) \otimes (t^n \otimes x^m) \\ &\quad + (n-p)(t \otimes 1) \otimes (t^{n+p-1} \otimes x^{m+q}) \\ &\quad - (n-p)(t^{n+p-1} \otimes x^{m+q}) \otimes (t \otimes 1) - (1-p)(t^n \otimes x^m) \otimes (t^p \otimes x^q) \rangle \\ &= (1-p)\delta_{i,p}\delta_{j,q}\delta_{k,n}\delta_{l,m} + (n-p)\delta_{i,1}\delta_{j,0}\delta_{k,n+p-1}\delta_{l,m+q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (n-p)\delta_{i,n+p-1}\delta_{j,m+q}\delta_{k,1}\delta_{l,0} - (1-p)\delta_{i,n}\delta_{j,m}\delta_{k,p}\delta_{l,q} \\
& = (1-i)\delta_{k,n}\delta_{l,m}\delta_{i,p}\delta_{j,q} + (2n-k-1)\delta_{i,1}\delta_{j,0}\delta_{k-n+1,p}\delta_{l-m,q} \\
& \quad - (2n-i-1)\delta_{k,1}\delta_{l,0}\delta_{i-n+1,p}\delta_{j-m,q} - (1-k)\delta_{i,n}\delta_{j,m}\delta_{k,p}\delta_{l,q} \\
& = \langle (1-i)\delta_{k,n}\delta_{l,m}\varepsilon^i \otimes \eta^j + (2n-k-1)\delta_{i,1}\delta_{j,0}\varepsilon^{k-n+1} \otimes \eta^{l-m} \\
& \quad - (2n-i-1)\delta_{k,1}\delta_{l,0}\varepsilon^{i-n+1} \otimes \eta^{j-m} - (1-k)\delta_{i,n}\delta_{j,m}\varepsilon^k \otimes \eta^l, t^p \otimes x^q \rangle.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
[\varepsilon^i \otimes \eta^j, \varepsilon^k \otimes \eta^l] & = (1-i)\delta_{k,n}\delta_{l,m}\varepsilon^i \otimes \eta^j + (2n-k-1)\delta_{i,1}\delta_{j,0}\varepsilon^{k-n+1} \otimes \eta^{l-m} \\
& \quad - (2n-i-1)\delta_{k,1}\delta_{l,0}\varepsilon^{i-n+1} \otimes \eta^{j-m} - (1-k)\delta_{i,n}\delta_{j,m}\varepsilon^k \otimes \eta^l. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

(1) 若 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t]$, $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x]$. 此时 $i, j, k, l \in \mathbb{Z}_+$, 由 (4.9), 在 $(i, j) = (1, 0) \neq (k, l)$ 的情形, 注意到 $n \neq 1$, 我们有

$$[\varepsilon \otimes 1, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = (2n-k-1)\varepsilon^{k-n+1} \otimes \eta^{l-m} = \begin{cases} (2n-k-1)\varepsilon^{k-n+1} \otimes \eta^{l-m}, & \text{若 } k+1 \geq n, \quad l \geq m, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

若 $(i, j) = (n, m) \neq (k, l) \neq (1, 0)$, 由 (4.9) 知,

$$[\varepsilon^n \otimes \eta^m, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = (k-1)\varepsilon^k \otimes \eta^l.$$

若 $(i, j), (k, l) \neq (1, 0), (n, m)$, 则 $[\varepsilon^i \otimes \eta^j, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = 0$, 定理 4.4(1) 获证.

(2) 若 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t]$, $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x, x^{-1}]$. 对于 $i, k \in \mathbb{Z}_+$, $j, l \in \mathbb{Z}$, 由 (4.9) 知, 若 $(i, j) = (1, 0) \neq (k, l)$, 并注意 $n \neq 1$, 我们有

$$[\varepsilon \otimes 1, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = (2n-k-1)\varepsilon^{k-n+1} \otimes \eta^{l-m} = \begin{cases} (2n-k-1)\varepsilon^{k-n+1} \otimes \eta^{l-m}, & \text{若 } k+1 \geq n, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

若 $(i, j) = (n, m) \neq (k, l) \neq (1, 0)$, 由 (4.9), $[\varepsilon^n \otimes \eta^m, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = (k-1)\varepsilon^k \otimes \eta^l$. 若 $(i, j), (k, l) \neq (1, 0), (n, m)$, 则 $[\varepsilon^i \otimes \eta^j, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = 0$, 故定理 4.4(2) 获证.

(3) 若 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t, t^{-1}]$, $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x]$. 对于 $i, k \in \mathbb{Z}$, $j, l \in \mathbb{Z}_+$, 若 $(i, j) = (1, 0) \neq (k, l)$, 由 (4.9), 我们有

$$[\varepsilon \otimes 1, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = (2n-k-1)\varepsilon^{k-n+1} \otimes \eta^{l-m} = \begin{cases} (2n-k-1)\varepsilon^{k-n+1} \otimes \eta^{l-m}, & \text{若 } l \geq m, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

若 $(i, j) = (n, m) \neq (k, l) \neq (1, 0)$, 由 (4.9) 知, $[\varepsilon^n \otimes \eta^m, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = (k-1)\varepsilon^k \otimes \eta^l$. 显然, 若 $(i, j), (k, l) \neq (1, 0), (n, m)$, 则 $[\varepsilon^i \otimes \eta^j, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = 0$. 定理 4.4(3) 获证.

(4) 若 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t, t^{-1}]$, $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x, x^{-1}]$. 对于 $i, k, j, l \in \mathbb{Z}$, 由 (4.9), 当 $(i, j) = (1, 0) \neq (k, l)$ 时, 有

$$[\varepsilon \otimes 1, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = (2n-k-1)\varepsilon^{k-n+1} \otimes \eta^{l-m}.$$

若 $(i, j) = (n, m) \neq (k, l) \neq (1, 0)$, (4.9) 变为如下形式:

$$[\varepsilon^n \otimes \eta^m, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = (k-1)\varepsilon^k \otimes \eta^l.$$

若 $(i, j), (k, l) \neq (1, 0), (n, m)$, 则 $[\varepsilon^i \otimes \eta^j, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = 0$. 证毕. $\square$

Su 和 Zhao^[26] 给出了双边 Witt 代数与 Virasoro 代数的一系列 2 维子代数. 下列双边 Witt 代数的 2 维 Lie 子代数来自文献 [13].

引理 4.5 令 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t, t^{-1}]$, $X = -\frac{1}{n-1}t + ct^n$, $Y = -\frac{d}{2(n-1)c}t^{-n+2} + dt - \frac{(n-1)cd}{2}t^n$, 对任意的 $c, d \in \mathbb{F}$, 以及某些固定的 $n \in \mathbb{Z}$, 且 $n \neq 1$, 则 $\text{span}_{\mathbb{F}}\{X, Y\}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 2 维 Lie 子代数, 满足 $[X, Y] = Y$.

取定 $f \in \mathcal{B}$, 记 $a = X \otimes 1$, $b = Y \otimes f \in \mathcal{L}$, 由 (1.3), 有 $[a, b] = b$. 因此, $r = a \otimes b - b \otimes a$ 是经典 Yang-Baxter 方程在 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot])$ 中的解, 三元组 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \Delta_r)$ 是上边缘三角的 Lie 双代数, 其中 Δ_r 的定义由 (4.3) 给出. 在下面的部分, 我们将讨论 Lie 双代数 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \Delta_r)$ 的对偶 Lie 双代数的结构. 它们与定理 4.4 给出的代数结构是不相同的. 为方便起见, 我们用 Δ 记 Δ_r .

定理 4.6 令 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[t, t^{-1}]$, $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x]$ 或 $\mathcal{B} = \mathbb{F}[x, x^{-1}]$, X 和 Y 由引理 4.5 给出. 记 $a = X \otimes 1$, $b = Y \otimes x^m$, 其中 m 是一个 $\Theta_{\mathcal{B}}$ 中的任意固定的数. 令 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \Delta)$ 是一个上边缘三角的 loop 型或 current 型的 Lie 双代数, 其方括号运算由 (1.3) 给出, 余方括号运算由 (4.3) 给出, 则 Lie 双代数 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \Delta)$ 的对偶 Lie 双代数是 $(\mathcal{L}^\circ, [\cdot, \cdot], \Delta)$, 其中 $\mathcal{L}^\circ$ 和 Δ 由定理 4.4 给出, 方括号运算 $[\cdot, \cdot]$ 由其斜对称性与下面的关系唯一确定:

$$[\varepsilon^i \otimes 1, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = (c_0 \delta_{i,1} + c \delta_{i,n})(d_0(-2n-k+3)\varepsilon^{k+n-1} + d(1-k)\varepsilon^k + d_1(2n-k-1)\varepsilon^{k-n+1}) \otimes \eta^{l-m}, \quad \text{若 } l \neq 0, m, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon^i \otimes 1, \varepsilon^k \otimes 1] &= (d_0 \delta_{k,-n+2} + d \delta_{k,1} + d_1 \delta_{k,n}) \delta_{0,m} (c_0(1-i)\varepsilon^i + c(2n-i-1)\varepsilon^{i-n+1}) \otimes 1 \\ &\quad + (c_0 \delta_{i,1} + c \delta_{i,n})(d_0(-2n-k+3)\varepsilon^{k+n-1} + d(1-k)\varepsilon^k + d_1(2n-k-1)\varepsilon^{k-n+1}) \otimes \eta^{-m} \\ &\quad - (c_0 \delta_{k,1} + c \delta_{k,n})(d_0(-2n-i+3)\varepsilon^{i+n-1} + d(1-i)\varepsilon^i + d_1(2n-i-1)\varepsilon^{i-n+1}) \otimes \eta^{-m} \\ &\quad - (d_0 \delta_{i,-n+2} + d \delta_{i,1} + d_1 \delta_{i,n}) \delta_{0,m} (c_0(1-k)\varepsilon^k + c(2n-k-1)\varepsilon^{k-n+1}) \otimes 1, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon^i \otimes 1, \varepsilon^k \otimes \eta^m] &= (d_0 \delta_{k,-n+2} + d \delta_{k,1} + d_1 \delta_{k,n})(c_0(1-i)\varepsilon^i + c(2n-i-1)\varepsilon^{i-n+1}) \otimes 1 \\ &\quad + (c_0 \delta_{i,1} + c \delta_{i,n})(d_0(-2n-k+3)\varepsilon^{k+n-1} + d(1-k)\varepsilon^k \\ &\quad + d_1(2n-k-1)\varepsilon^{k-n+1}) \otimes 1, \quad \text{若 } m \neq 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon^i \otimes \eta^m, \varepsilon^k \otimes \eta^l] &= -(d_0 \delta_{i,-n+2} + d \delta_{i,1} + d_1 \delta_{i,n})(c_0(1-k)\varepsilon^k \\ &\quad + c(2n-k-1)\varepsilon^{k-n+1}) \otimes \eta^l, \quad \text{若 } l \neq 0, m, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon^i \otimes \eta^m, \varepsilon^k \otimes \eta^m] &= (d_0 \delta_{k,-n+2} + d \delta_{k,1} + d_1 \delta_{k,n})(c_0(1-i)\varepsilon^i + c(2n-i-1)\varepsilon^{i-n+1}) \otimes \eta^m \\ &\quad - (d_0 \delta_{i,-n+2} + d \delta_{i,1} + d_1 \delta_{i,n})(c_0(1-k)\varepsilon^k \\ &\quad + c(2n-k-1)\varepsilon^{k-n+1}) \otimes \eta^m, \quad \text{若 } m \neq 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$[\varepsilon^i \otimes \eta^j, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = 0, \quad \text{若 } j, l \neq 0, m, \quad (4.15)$$

其中

$$c_0 = -\frac{1}{n-1}, \quad d_0 = -\frac{d}{2(n-1)c}, \quad d_1 = -\frac{(n-1)cd}{2}, \quad i, k, n \in \mathbb{Z},$$

以及 $j, l \in \Theta_{\mathcal{B}}$.

证明 记 $X = c_0 t + ct^n$, $Y = d_0 t^{-n+2} + dt + d_1 t^n$. 我们有

$$\langle [\varepsilon^i \otimes \eta^j, \varepsilon^k \otimes \eta^l], t^p \otimes x^q \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (\varepsilon^i \otimes \eta^j) \otimes (\varepsilon^k \otimes \eta^l), \Delta(t^p \otimes x^q) \rangle \\
&= \langle (\varepsilon^i \otimes \eta^j) \otimes (\varepsilon^k \otimes \eta^l), ([t^p, X] \otimes x^q) \otimes (Y \otimes x^m) + (X \otimes 1) \otimes ([t^p, Y] \otimes x^{m+q}) \\
&\quad - ([t^p, Y] \otimes x^{m+q}) \otimes (X \otimes 1) - (Y \otimes x^m) \otimes ([t^p, X] \otimes x^q) \rangle \\
&= \langle (\varepsilon^i \otimes \eta^j) \otimes (\varepsilon^k \otimes \eta^l), ((c_0(1-p)t^p + c(n-p)t^{n+p-1}) \otimes x^q) \otimes (Y \otimes x^m) \\
&\quad + (X \otimes 1) \otimes ((d_0(-n-p+2)t^{p-n+1} + d(1-p)t^p + d_1(n-p)t^{n+p-1}) \otimes x^{m+q}) \\
&\quad - ((d_0(-n-p+2)t^{p-n+1} + d(1-p)t^p + d_1(n-p)t^{n+p-1}) \otimes x^{m+q}) \otimes (X \otimes 1) \\
&\quad - (Y \otimes x^m) \otimes ((c_0(1-p)t^p + c(n-p)t^{n+p-1}) \otimes x^q) \rangle \\
&= (c_0(1-p)\delta_{i,p} + c(n-p)\delta_{i,n+p-1})\delta_{j,q}(d_0\delta_{k,-n+2} + d\delta_{k,1} + d_1\delta_{k,n})\delta_{l,m} \\
&\quad + (c_0\delta_{i,1} + c\delta_{i,n})\delta_{j,0}(d_0(-n-p+2)\delta_{k,p-n+1} + d(1-p)\delta_{k,p} + d_1(n-p)\delta_{k,n+p-1})\delta_{l,m+q} \\
&\quad - (d_0(-n-p+2)\delta_{i,p-n+1} + d(1-p)\delta_{i,p} + d_1(n-p)\delta_{i,n+p-1})\delta_{j,m+q}(c_0\delta_{k,1} + c\delta_{k,n})\delta_{l,0} \\
&\quad - (d_0\delta_{i,-n+2} + d\delta_{i,1} + d_1\delta_{i,n})\delta_{j,m}(c_0(1-p)\delta_{k,p} + c(n-p)\delta_{k,n+p-1})\delta_{l,q} \\
&= (c_0(1-i)\delta_{i,p} + c(2n-i-1)\delta_{i,-n+1,p})\delta_{j,q}(d_0\delta_{k,-n+2} + d\delta_{k,1} + d_1\delta_{k,n})\delta_{l,m} \\
&\quad + (c_0\delta_{i,1} + c\delta_{i,n})\delta_{j,0}(d_0(-2n-k+3)\delta_{k+n-1,p} + d(1-k)\delta_{k,p} + d_1(2n-k-1)\delta_{k-n+1,p})\delta_{l-m,q} \\
&\quad - (d_0(-2n-i+3)\delta_{i+n-1,p} + d(1-i)\delta_{i,p} + d_1(2n-i-1)\delta_{i,-n+1,p})\delta_{j-m,q}(c_0\delta_{k,1} + c\delta_{k,n})\delta_{l,0} \\
&\quad - (\delta_0\delta_{i,-n+2} + d\delta_{i,1} + d_1\delta_{i,n})\delta_{j,m}(c_0(1-k)\delta_{k,p} + c(2n-k-1)\delta_{k-n+1,p})\delta_{l,q} \\
&= \langle H_{k,l}^{i,j} - H_{i,j}^{k,l}, t^p \otimes x^q \rangle,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
H_{i,j}^{k,l} &= (c_0\delta_{k,1} + c\delta_{k,n})\delta_{l,0}(d_0(-2n-i+3)\varepsilon^{i+n-1} + d(1-i)\varepsilon^i + d_1(2n-i-1)\varepsilon^{i-n+1}) \otimes \eta^{j-m} \\
&\quad + (d_0\delta_{i,-n+2} + d\delta_{i,1} + d_1\delta_{i,n})\delta_{j,m}(c_0(1-k)\varepsilon^k + c(2n-k-1)\varepsilon^{k-n+1}) \otimes \eta^l.
\end{aligned} \quad (4.16)$$

由此可得 $[\varepsilon^i \otimes \eta^j, \varepsilon^k \otimes \eta^l] = H_{k,l}^{i,j} - H_{i,j}^{k,l}$. 由该公式, 我们即可得到 (4.10)–(4.15). $\square$

另外, 由定理 4.4(4) 和 4 得到两类新的定义在 $\mathcal{L} = \mathbb{F}[\varepsilon, \varepsilon^{-1}, \eta, \eta^{-1}]$ (两个变元 ε 和 η 的 Laurent 多项式代数) 上的无限维 Lie 代数 $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot])$, 其方括号运算分别由 (4.5)–(4.7) 和 (4.10)–(4.15) 给出.

参考文献

- 1 Drinfel'd V. Quantum groups. In: Proceedings of the ICM (Berkeley 1986). Providence: Amer Math Soc, 1987, 789–820
- 2 Majid S. Foundations of Quantum Group Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 3 Nichols W D. The structure of the dual Lie coalgebra of the Witt algebras. J Pure Appl Algebra, 1990, 68: 359–364
- 4 Nichols W D. On Lie and associative duals. J Pure Appl Algebra, 1993, 87: 313–320
- 5 Peterson B, Taft E J. The Hopf algebra of linearly recursive sequences. Aequationes Math, 1980, 20: 1–17
- 6 Sweedler M E. Hopf Algebras. New York: W. A. Benjamin, Inc., 1969
- 7 Michaelis W. A class of infinite dimensional Lie bialgebras containing the Virasoro algebras. Adv Math, 1994, 107: 365–392
- 8 Taft E J. Witt and Virasoro algebras as Lie bialgebras. J Pure Appl Algebra, 1993, 87: 301–312

- 9 Ng S H, Taft E J. Classification of the Lie bialgebra structures on the Witt and Virasoro algebras. *J Pure Appl Algebra*, 2000, 151: 67–88
- 10 Song G, Su Y. Lie Bialgebras of generalized Witt type. *Sci China Ser A*, 2006, 49: 533–544
- 11 Wu Y, Song G, Su Y. Lie bialgebras of generalized Virasoro-like type. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2006, 22: 1915–1922
- 12 Xin B, Song G, Su Y. Hamiltonian type Lie bialgebras. *Sci China Ser A*, 2007, 50: 1267–1279
- 13 宋光艾, 苏育才. Witt 型与 Virasoro 型 Lie 双代数的对偶. *中国科学: 数学*, 2013, 43: 1093–1102
- 14 Song G, Su Y. Dual Lie bialgebra structures of Poisson types. *Sci China Math*, 2015, 58: 1151–1162
- 15 Fan G, Su Y, Wu Y. Loop Heisenberg-Virasoro Lie conformal algebra. *ArXiv:1408.6678*, 2014
- 16 Guo X, Lu R, Zhao K. Simple Harish-Chandra modules, intermediate series modules, and Verma modules over the loop-Virasoro algebra. *Forum Math*, 2011, 23: 1029–1052
- 17 Kac V. *Infinite Dimensional Lie Algebras*, 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
- 18 Wu H, Wang S, Yue X. Lie bialgebras of generalized loop Virasoro algebras. *Chin Ann Math Ser B*, 2015, 36: 437–446
- 19 Diarra B. On the definition of the dual Lie coalgebra of a Lie algebra. *Publ Mat*, 1995, 39: 349–354
- 20 Michaelis W. *The dual Lie bialgebra of a Lie bialgebra, Modular interfaces* (Riverside, CA, 1995). *AMS/IP Stud Adv Math*, 1997, 4: 81–93
- 21 Block R E. Commutative Hopf algebras, Lie coalgebras, and divided powers. *J Algebra*, 1985, 96: 275–306
- 22 Block R E, Leroux P. Generalized dual coalgebras of algebras, with applications to cofree coalgebras. *J Pure Appl Algebra*, 1985, 36: 15–21
- 23 Griffing G. The dual coalgebra of certain infinite-dimensional Lie algebras. *Comm Algebra*, 2002, 30: 5715–5724
- 24 Su Y, Xu X, Zhang H. Derivation-simple algebras and the structures of Lie algebras of Witt type. *J Algebra*, 2000, 233: 642–662
- 25 Xu X. New generalized simple Lie algebras of Cartan type over a field with characteristic 0. *J Algebra*, 2000, 224: 23–58
- 26 Su Y, Zhao K. Generalized Virasoro and super-Virasoro algebras and modules of the intermediate series. *J Algebra*, 2002, 252: 1–19

Dual Lie bialgebra structures of loop and current Virasoro algebras

SONG GuangAi & SU YuCai

Abstract The loop and current Virasoro algebras are respectively the tensor product Lie algebras of the Virasoro algebra with the polynomial and Laurent polynomial algebra. In the present paper, the structures of dual Lie bialgebras of loop and current Virasoro algebras are investigated. As a result, a series of new infinite dimensional Lie algebras are obtained.

Keywords loop algebra, Virasoro algebra, Lie bialgebra, dual Lie bialgebra

MSC(2010) 17B62, 17B05, 17B66

doi: 10.1360/N012016-00118