应用分形理论划分洪水分期的两种新途径

方崇惠¹, 郭生练², 段亚辉³, 杨德进³

¹ 武汉大学水资源与水电工程科学国家重点实验室, 武汉 430072;

² 湖北省水利水电勘测设计院, 武汉 430064;

³ 越南水利大学, 河内 越南

E-mail: fchuig@yahoo.com.cn

2008-05-28 收稿, 2008-12-24 接受

国家自然科学基金资助项目(批准号: 50099622-1)

摘要 分析了水文现象的随机性、非线性、确定性和相似性, 在一定尺度范围内(如年内季节间)洪水表现出自相似性等分形特性, 以此作为应用分形理论的论据. 提出了用分形理论划分洪水分期的两种新途径: 按时间尺度容量维和空间尺度相似维划分洪水分期, 给出了两种分形维数测度具体步骤. 并以漳河水库历年汛期日最大流量为研究系列样本, 结果表明: 无论是用容量维数途径, 还是用相似维数途径划分的洪水分期一致, 且与经验统计方法划分的洪水分期基本一致, 但两种分形维数途径比经验统计方法划分洪水分期具有定量、客观计算简便等明显优点, 有利于在生产实际中推广应用.

关键词

分形理论

洪水分期

分形维数

测度容量维途径

测度相似维途径

水库

维数的古典几何概念作为整数已被接受, 但是存在一定数量含有特定标度属性的几何结构——具有创新的分形维数定义也被提出^[1,2]. 分形理论揭示了非线性系统中有序与无序的统一, 确定性与随机性的统一, 分形的定量化方法——分形维数. 自相似性与标度不变性是分形的两个重要特性.

水文现象随时间而变化, 称为水文过程. 大量实测资料表明: 实际的水文过程既受到确定因素的作用, 又受到随机因素的作用, 是非常错综复杂的非线性过程. 但是不管水文过程如何复杂, 一般地说, 与其他自然现象过程一样, 具有随机性、非线性、确定性和相似性.

水文过程受随机性因素的影响, 表现为随机性和非线性. 水文过程形成和演变过程中受到诸多因素影响, 如在径流(流量)过程的形成和演变中, 受到降水量的大小, 时间及空间分布随机性和非线性影响, 受到下垫面的地形、地势、地质、植被、湖泊、土壤及其含水量等众多随机性和非线性因素影响, 因此, 径流(流量)自然过程表现出随机性和非线性的分

形理论特性现象.

水文过程受确定性因素的影响, 表现为确定性和相似性. 由于影响水文过程的主要因素是气候因素, 存在以年为周期的季节变化. 这种水文过程的局部(年际间)与整体(长系列)关系对分形理论来说, 可视为水文过程年际间的自相似性. 同样, 由于受一次降水量的过程影响, 一场洪水过程都是由起涨到达峰顶最后消退的过程, 年内汛期洪水总趋势与场次洪水过程间具有自相似性. 这是由于西风带、季风活动、副热带高压等天气系统的季节性活动自相似性, 形成的暴雨以及相应的洪峰流量及其洪水过程, 在年内季节间具有自相似性的分形理论特性现象^[3].

这些现象引起水文和水资源领域人们近期兴趣, 正像康托尔集(Cantor遗骸)、科克(Koch)曲线、希尔宾斯基(Sierpinski)三角形这样“奇异”怪物特征使许多水文学者感到意外, 发现这些特征酷似自然界水文现象的许多重要特征不能在经典范畴内被恰当描述^[4].

因此, 对洪峰散点序列年内分布等水文现象(如径流、洪水、洪峰的分布等), 点据系列具有随机性与

引用格式: 方崇惠, 郭生练, 段亚辉, 等. 应用分形理论划分洪水分期的两种新途径. 科学通报, 2009, 54: 1613~1617

Fang C H, Guo S L, Duan Y H, et al. Two new approaches to dividing flood sub-seasons in flood season by using the fractal theory. Chinese Sci Bull, 2009, 54, doi: 10.1007/s11434-009-0315-z

<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/csb2009-54-11-1613>

非线性, 确定性与相似性, 与分形理论研究的对象一致, 可应用分形理论研究这些水文现象——进行洪水分期的划分.

1 方法论: 分形维数的测度途径

河流洪水(流量)随季节、时间变化的过程是自然界中的一种复杂现象, 在这种复杂现象的背后隐藏着特定的规律性, 它在一定原则下则显而易见, 把满足这种原则的特定规律性洪水的时间段作为一个洪水分期. 这个原则主要是连续时段内洪峰量级相近.

样本集(系列)具有标度不变性是以分形维数来定量的, 即分形维数 D 是一个常数. 在一个洪水分期中如果分形维数 D 是相近的, 那么就称为同一洪水分期.

在测度分形维数的多种方法中, 最直接源于 Kolmogorov 介绍的数盒子数确定维数技术, 例如 Lovejoy 等(1987)和 Hubert 等(1995)对降雨区域的分形维数分析^[1-7]. 这里我们提出两种通过使用不同分形维数测度新的途径划分洪水分期: 一种是时间尺度容量维, 另一种空间尺度相似维.

1.1 通过容量维途径测度分形维数

在盒子计数方法^[1-7]的所有变量中一个就是数 $N(\varepsilon)$ ——覆盖整个区域的片段数(盒子数), 如果对象是一条光滑线的片段, 那么存在充分小的 ε , 则有

$$N(\varepsilon) \sim (1/\varepsilon). \quad (1)$$

然而, 存在一些对象符合下式:

$$N(\varepsilon) \sim (1/\varepsilon)^D, \quad (2)$$

对于常数 D , 被称作该集合的分形维数.

此分形维数是由 Kolmogorov 按照盒数维推导的, 它的定义与 Hausdorff 维数很相似, 也是以包覆作为基础的. 假定要考虑的图形是 n 维欧氏空间 R^n 中的有界集合, 用半径为 ε 的 D 维球包覆其集合时, 取得 $N(\varepsilon)$ 是球的个数的最小值, 则 D_c 可用下式来表示:

$$D_c \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}. \quad (3)$$

在(3)式中, 显然, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 下式成立.

$$\ln N(\varepsilon) \sim -D_c \ln \varepsilon = D_c \ln(1/\varepsilon). \quad (4)$$

在对数刻度上点绘 $(N(\varepsilon), \varepsilon)$, 直线段的斜率为维数 D_c , 即计算出分形维数 $(D_c \rightarrow D)$.

斯曼利等人在计算新赫布里底群岛地震谱系列的时间分维时, 引入了一个新的相对容量^[7] N_N , 即

$$NN(\varepsilon) = N(\varepsilon)/N_T, \quad (5)$$

式中 $N(\varepsilon)$ 为绝对度量; N_T 为划分的总时段数, $N_T \approx T/\varepsilon$, T 为研究时段总长, ε 为时段步长.

作出 $\ln N_N(\varepsilon) \sim \ln(\varepsilon)$ 关系图, 若无标度区直线段的斜率为 b , 则容量维 D_m 为

$$D_m = d - b, \quad (6)$$

式中 d 为拓扑维, 洪峰散点分布在 $Q \sim t$ 二维面上, d 应取 2, 即可求得容量维数 $D_m = 2 - b$.

1.2 通过自相似途径测度分形维数

设分形整体 S 是由 N 个非重叠的部分 $s_1, s_2, \dots, s_n$ 组成, 如果每一个部分 s_j 经过放大 $1/r_i$ 倍后可与 S 全等 ($0 < r_i < 1, i=1, 2, \dots, N$), 并且 $r_i = r$, 则相似维数^[2-6] 为

$$D_s = \ln N / \ln(1/r), \quad (7)$$

如果 r_i 不全等, 则又为

$$\sum_{i=1}^N r_i^{D_s} = 1, \quad (8)$$

这就是著名的 Moran(默兰)方程.

2 算例及分析

2.1 划分洪水分期的样本及传统方法

为了研究湖北省漳水库(库容 22 亿 m^3)汛限水位, 合理调度和管理洪水, 充分利用水资源, 需要对汛期再划分, 得到多个洪水分期. 在应用分形理论划分洪水分期时, 取最小时段为 1 日(即以 1 日为步长), 研究对象为整个汛期(4 月 1 日~10 月 31 日), 选用 1960~2002 年漳水库汛期日均最大流量为研究系列样本, 系列长度为 214, 系列散布图详见图 1.

图1 漳水库历年汛期日最大日均流量散布图

按照传统经验统计分析, 由图 1 洪水分期分界点大概在 6 月 30 日, 7 月 30 日, 8 月 29 日前后. 如果洪水期划分为 3 个洪水分期, 那么第 1 个分期从 4 月 1 日到 6 月 30 日, 称为前汛期; 第 2 个分期从 7 月 1 日到 8 月 29 日, 称为主汛期; 第 3 个分期从 8 月 30 日到 10 月 31 日, 称为后汛期, 成果见表 1.

表1 传统途径划分洪水分期成果表

序号	分期名	洪水分期起止日期
1	前汛期	4月1日~6月30日
2	主汛期	7月1日~7月30日和8月1日~8月29日
3	后汛期	8月30日~10月31日

2.2 分形途径1: 容量维划分洪水分期

根据上述容量维数的定义, 就可以推算径流, 洪峰点据关于时间的系列的容量维数. 具体步骤如下:

- (1) 取样本点据系列: $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$;
- (2) 按样本发生的时间先后顺序, 将样本点据点绘在以时间为横坐标, 样本值为纵坐标的坐标系中, 这就是通常所说的样本散布图;
- (3) 根据样本点据的跨度, 确定总时段长 T ;
- (4) 取定能反映某一洪水分期的样本固定值 Y_Q ;
- (5) 取某一时段长 ε 作为时间尺度, 量度样本值 X_i 超过 Y_Q 的时段数 $N(\varepsilon)$;
- (6) 根据总时段长 T 和时间尺度 ε , 计算相对的时间尺度 $N_T = T/\varepsilon$;
- (7) 计算相对量度值 $N_N(\varepsilon) = N(\varepsilon)/N_T$;
- (8) 计算 $\ln N_N(\varepsilon)$, $\ln(\varepsilon)$, 并将点据 $(\ln(\varepsilon), \ln N_N(\varepsilon))$ 点在 $\ln(\varepsilon) \sim \ln N_N(\varepsilon)$ 相关图上, 获得一个点;
- (9) 取变换的(不同的)时间尺度 ε , 重复上述(5)~(8)步, 获得一系列点;
- (10) 在一系列点中, 确定所存在的直线段, 并求直线的斜率 b , 即可计算出总时段长为 T 的样本分形的容量维数 $D_m = 2 - b$.
- (11) 重复上述(1)~(10)步, 得到不同总时段长为 T 的样本分形的容量维数 D_m , 如 D_m 在某一时段 T 左右为基本相等, 则这个 T 时段即为分形法确定的一个洪水分期.

以漳水库洪水分期划分为算例, 首先, 计算以4月1日为起点的第一洪水分期(前汛期). 初取第一分期时间为4月1日~5月31日, 即 $T=61$, 同时, 取 $Y_Q = 300 \text{ m}^3/\text{s}$ (略大于平均流量)作为固定流量, 变换不同的时间尺度 ε , 分别取1日、2日、3日……、9日、10日, 根据上述步骤, 就可绘制出 $\ln(\varepsilon) \sim \ln N_N(\varepsilon)$ 相关图, 找到直线段及其斜率 b , 亦可求得该 T 分期的容量维数 $D_m = 2 - b$, 具体计算可利用电子表格完成.

不断加长或缩短 T , 即可求得一组随 T 的 $\ln(\varepsilon) \sim \ln N_N(\varepsilon)$ 关系直线. 根据相关图中 A, B, C, D 4 个分期, 前汛期 4 个分期的容量维数计算成果见表 2.

表2 前汛期不同分期容量维数计算成果表

编号	T/d	分期 起止日期	相关 系数 R	斜率 b	容量 维数 D_m
A	61	4月1日~5月31日	0.9908	0.59	1.41
B	81	4月1日~6月20日	0.9923	0.629	1.37
C	91	4月1日~6月30日	0.9922	0.614	1.39
D	101	4月1日~7月10日	0.9794	0.470	1.53

由表 2 可知, A, B, C 3 个分期的容量维数绝对值相差在 0.04、相对值 5% 以内, 容量维数是基本相近, 故认为是同一个分期, 分期起止日期为 4 月 1 日~6 月 30 日.

根据前汛期分期成果可知, 第二个洪水分期(主汛期)计算以 7 月 1 日为起点. 初取第一分期时间为 7 月 1 日~7 月 20 日, 即 $T=20$, 同时, 取 $Y_Q = 700 \text{ m}^3/\text{s}$ (略大于平均流量)作为固定流量, 变换不同的时间尺度 ε , 分别取 1 日、2 日、3 日……、9 日、10 日, 根据上述步骤, 就可绘制出主汛期 $\ln(\varepsilon) \sim \ln N_N(\varepsilon)$ 关系图, 找到直线段及其斜率 b , 亦可求得该 T 分期的容量维数 $D_m = 2 - b$. 根据相关图中 A, B, C, D, E 5 个分期, 主汛期 5 个分期的容量维数计算成果见表 3.

表3 主汛期不同分期容量维数计算成果表

编号	T/d	分期 起止日期	相关 系数 R	斜率 b	容量 维数 D_m
A	20	7月1日~7月20日	0.9810	0.5224	1.48
B	31	7月1日~7月31日	0.9908	0.59	1.41
C	41	7月1日~8月10日	0.9980	0.6321	1.37
D	51	7月1日~8月20日	0.9925	0.665	1.34
E	62	7月1日~8月31日	0.9955	0.8355	1.16

由表 3 可知, A, B, C, D 4 个分期的容量维数基本相近, 故认为是同一个分期, 主汛期分期起止日期为 7 月 1 日~8 月 20 日.

同样, 根据主汛期分期成果可知, 第三个洪水分期(后汛期)计算以 8 月 21 日为起点. 初取第一分期时间为 8 月 21 日~9 月 30 日, 即 $T=41$, 同时, 取 $Y_Q = 300 \text{ m}^3/\text{s}$ (略大于平均流量)作为固定流量, 变换不同的时间尺度 ε , 分别取 1 日、2 日、3 日、4 日、5 日、6 日, 根据上述步骤, 就可绘制出后汛期 $\ln(\varepsilon) \sim \ln N_N(\varepsilon)$ 关系图, 找到直线段及其斜率 b , 亦可求得该 T 分期的容量维数 $D_m = 2 - b$. 根据相关图中 A, B, C, D 4 个分期, 后汛期 4 个分期的容量维数计算成果见表 4.

表 4 后汛期不同分期容量维数计算成果表

编号	T/d	分期 起止日期	相关系数 R	斜率 b	容量维数 D_m
A	41	8 月 21 日~9 月 30 日	0.9727	0.2564	1.74
B	51	8 月 21 日~10 月 10 日	0.9192	0.2657	1.73
C	61	8 月 21 日~10 月 20 日	0.9060	0.2865	1.71
D	72	8 月 21 日~10 月 31 日	0.9241	0.2958	1.70

由表 4 可知, A, B, C, D 4 个分期的容量维数基本相近, 故认为是同一个分期, 后汛期分期起止日期为 8 月 21 日~10 月 31 日。

综上所述, 引入分形技术, 采用时间尺度, 对漳河水库入库洪水汛期 4 月 1 日~10 月 31 日进行分期成果为: 前汛期 4 月 1 日~6 月 30 日, 主汛期 7 月 1 日~8 月 20 日、后汛期 8 月 21 日~10 月 31 日。

取不同固定流量 Y_Q 虽对计算得到容量分维大小有影响, 但对相对关系即分期没有影响, 现以主汛期分形维数的计算为例, 说明如下: 取 $Y_Q = 500 \text{ m}^3/\text{s}$ 作为固定流量, 根据前汛期分期成果可知, 第二个洪水分期(主汛期)计算以 7 月 1 日为起点。初取第一分期时间为 7 月 1 日~7 月 20 日, 即 $T=20$, 变换不同的时间尺度 ε , 分别取 1 日、2 日、3 日...、9 日、10 日, 根据上述步骤, 就可绘制出主汛期 $\ln(\varepsilon) \sim \ln N_M(\varepsilon)$ 关系图, 找到直线段及其斜率 b , 亦可求得该 T 分期的容量维数 $D_m = 2 - b$ 。根据关系图中 A, B, C, D, E 5 个分期, 主汛期 5 个分期的容量维数计算成果见表 5。

表 5 主汛期不同分期容量维数计算成果表($Y_Q=500$)

编号	T/d	分期 起止日期	相关系数 R	斜率 b	容量维数 D_m
A	20	7 月 1 日~7 月 20 日	0.8930	0.2634	1.74
B	31	7 月 1 日~7 月 31 日	0.8343	0.3417	1.66
C	41	7 月 1 日~8 月 10 日	0.9639	0.3553	1.64
D	51	7 月 1 日~8 月 20 日	0.9725	0.3901	1.61
E	62	7 月 1 日~8 月 31 日	0.5501	0.5572	1.44

比较分析表 3 与表 5 可知, 该固定流量 $Y_Q=500 \text{ m}^3/\text{s}$ 汛期分期为容量维数为 1.61~1.66 与固定流量 $Y_Q=700 \text{ m}^3/\text{s}$ 的表 3 汛期分期为容量维数为 1.34~1.48 有差异, 但分期不变均仍为 7 月 1 日~8 月 20 日。

2.3 分形途径 2: 相似维划分洪水分期

根据上述相似维数的含义, 对于某一个分期径流, 洪峰散布图外包线空间的相似维数是一定的, 按照这种特性, 分析计算不同样本值该时间段的相似

维数, 当相似维数相近时, 即认为该时间段是同一个分期 具体步骤如下:

- (1) 取样本点据系列: $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$;
- (2) 按样本发生的时间先后顺序, 将样本点据绘在以时间为横坐标(步长为 t)、样本值为纵坐标, 点绘样本散布图;
- (3) 根据样本点据的跨度, 确定总时段长 T , 计算该时间段样本散布图所围的面积 S ;
- (4) 取该 T 时间段, 不同的空间尺度 Y_j 时, 即 $S_i = Y_j \times t$;
- (5) 计算倍比 $1/r_i = S/S_i$, $\varepsilon = S_i/S$;
- (6) 量度样本值 X_i 超过 Y_j 的时段数 $N(\varepsilon)$;
- (7) 计算量度值 $N_M(\varepsilon) = N(\varepsilon)/T$;
- (8) 计算 $\ln N_M(\varepsilon)$, $\ln(\varepsilon)$, 并将点据 $(\ln(\varepsilon), \ln N_M(\varepsilon))$ 点绘 $\ln(\varepsilon) \sim \ln N_M(\varepsilon)$ 相关图, 获得一个点据;
- (9) 取不同的空间尺度 Y_i , 重复上述(4)~(8)步, 获得一系列点据;
- (10) 在一系列点据中, 确定所存在的直线段, 并求直线的斜率 b , 即为计算时段长为 T 的样本分形的相似维数 D_s 。
- (11) 重复上述(3)~(10), 得到不同总时段长为 T 的样本分形的相似维数 $D_s = b$, 如 D_s 在某一时段 T 左右为基本相等, 则这个 T 时段即为分形法确定的一个洪水分期。

按照上述步骤, 同样, 取汛期 4 月 1 日~10 月 31 日为样本系列, 对于某一分期 T , 取空间尺度 Y_j 分别为 100, 200, ..., 900, 1000, 作空间尺度分形分析。汛期不同分期相似维数统计见表 6。

表 6 汛期不同分期相似维数统计表

编号	分期类	T/d	分期 起止日期	相关系数 R	斜率 b	相似维数 D_s
1	前汛期	61	4 月 1 日~5 月 31 日	0.9699	1.8930	1.89
2		81	4 月 1 日~6 月 20 日	0.9464	1.8577	1.86
3		91	4 月 1 日~6 月 30 日	0.9373	1.9175	1.92
4		101	4 月 1 日~7 月 10 日	0.9620	1.3866	1.39
5	主汛期	20	7 月 1 日~7 月 20 日	0.9394	1.4261	1.43
6		31	7 月 1 日~7 月 31 日	0.9777	1.4102	1.41
7		41	7 月 1 日~8 月 10 日	0.9827	1.4831	1.48
8		51	7 月 1 日~8 月 20 日	0.9766	1.4572	1.46
9		62	7 月 1 日~8 月 31 日	0.9853	1.5963	1.60
10		72	7 月 1 日~9 月 10 日	0.9853	1.5968	1.60
11		21	8 月 21 日~9 月 10 日	0.8352	1.7558	1.76
12		41	8 月 21 日~9 月 30 日	0.8963	1.7807	1.78
13	后汛期	61	8 月 21 日~10 月 20 日	0.8762	1.7405	1.74

表 7 划分洪水分期不同途径成果比较表

不同划分洪水分期途径		洪水分期起止日期		
		前汛期	主汛期	后汛期
传统途径		4月1日~6月30日	7月1日~8月29日	8月30日~10月31日
两种分形	容量维	4月1日~6月30日	7月1日~8月20日	8月21日~10月31日
新途径	相似维	4月1日~6月30日	7月1日~8月20日	8月21日~10月31日

由表 6 可知, 根据相似维数基本相近为同一个洪水分期, 那么前汛期为: 4 月 1 日~6 月 30 日、主汛期为 7 月 1 日~8 月 20 日、后汛期为 8 月 21 日~10 月 31 日.

2.4 成果分析

根据上述分析, 现将传统途径与两种分形新途径划分洪水分期的成果列于表 7.

由表 7 可知, 两种分形途径的洪水分期是相同的, 与传统途径划分洪水分期基本一致.

3 结论

(1) 水文现象的随机性、非线性、确定性和相似性具有分形特性, 以此作为应用分形理论划分洪水分期的论据.

(2) 分形理论提供了研究洪水分期的新颖方法. 应用分形理论, 提出时间尺度容量维数和空间尺度相似维数两种新途径划分洪水分期.

(3) 选择漳河水库汛期 4 月 1 日~10 月 31 日历年日

最大入库洪水流量按时序作为样本, 样本长度按天数计算, 有别于按年数计算样本长度.

(4) 给出了用样本计算容量维数和相似维数的具体步骤.

(5) 两种分形新途径取得划分洪水分期相同成果, 成功地解决了洪水分期的定量分析, 填补了分形理论在洪水分期中的应用, 使分形技术在水文领域得到进一步发展.

(6) 用分形途径解决洪水分期的技术具有推广应用价值. 比较经验统计途径和分形途径对洪水分期的分析, 取得对漳河水库汛期洪水分期基本相同的成果. 说明分形理论应用生产和设计、研究流域的洪水分期是可行的. 分形理论划分洪水分期一方面采用分形维数值来定量判断, 具有客观性; 另一方面可以采用时间尺度容量维和空间尺度相似维两种途径进行对比分析, 保证了分期成果可靠性. 而且, 计算可采用电子表格完成, 计算方便、操作容易.

致谢 感谢国家水利部, 湖北省水利厅, 武汉大学, 湖北省水利水电勘测设计院和湖北省漳河工程管理局的支持; 许明祥, 王祥三, 宋星原, 陈崇德等人的参与或帮助; 雒文生教授对本文提出宝贵意见, 李应清教授校审英文, 特别是匿名审稿人提出建设性修改意见.

参考文献

- Maciej R, Zbigniew W K. Fractal analysis of flow of the river Warta. J Hydro, 1997, 200: 280—294^[DOI]
- Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. New York: W. H. Freeman, 1982
- Bruce D M, Donald L T. The applicability of power-law frequency statistics to floods. J Hydro, 2006, 322: 168—180^[DOI]
- Daniele V, Pierluigi F, Vito I. Imperfect scaling of time and space-time rainfall. J Hydro, 2006, 322: 105—119^[DOI]
- Roberto D, Maria G B, Enrico P. Space-time multifractality of remotely sensed rainfall fields. J Hydro, 2006, 322: 2—13^[DOI]
- Sivakumar B. Is a chaotic multi-fractal approach for rainfall possible? Hydro Proce, 2001, 5: 943—955^[DOI]
- Smalley R F. A fractal approach to the clustering of earthquakes: Applications to the seismicity of the new hebrides. BSSA, 1987, 77: 1368—1381