马氏调制强度的传染模型下 CDS 的 CVA 计算

董迎辉

苏州科技学院信息与计算科学系, 苏州 215009

E-mail: dongyinghui1030@163.com

收稿日期: 2014-04-03; 接受日期: 2014-08-28

国家自然科学基金 (批准号: 11301369 和 11401419) 和江苏省自然科学基金 (批准号: BK20130260 和 BK20140279) 资助项目

摘要 本文考虑了具有马氏调制强度的传染模型下, 信用违约互换 (CDS) 的双边信用估值调整 (CVA). 在我们考虑的模型中, 利率、回收率以及 CDS 的买方、卖方和参照实体三方的违约强度均受宏观经济环境的影响, 该经济状况由一连续时间状态的齐次马氏链所刻画. 利用测度变换和累积强度的 Laplace 变换, 我们给出了 CDS 合同的双边 CVA 的表达式, 该公式可以表示为线性常微分方程组的基本解的形式. 利用所得到的公式, 我们数值分析了马氏调制和违约相关性对双边 CVA 的影响.

关键词 双边信用估值调整 相互作用的违约强度 马氏调制

MSC (2010) 主题分类 60G46, 60J27

1 引言

对手信用风险是指场外交易合同中的一方未能履行约定契约中的义务而造成经济损失的风险. 在很多情况下, 对手信用风险并没有被考虑到交易的定价过程中去. 因此我们需要对交易账户的市场价值作出调整, 使之能够反映交易对手信用状况恶化的情况. 信用估值调整 (CVA) 就是对无风险交易账户价值的调整. 更确切地说, CVA 就是不考虑对手风险的合同价值与考虑到对手风险的合同价值之间的差额. 有关 CVA 更多的介绍可参见文献 [1-3].

近年来, 由于信用市场的波动, CVA 的变化已使得银行的收益发生了巨大的变动. 因此, CVA 已经成为对手风险管理中非常重要的一部分. 信用违约互换 (CDSs) 作为信用市场中交易最为活跃的产品之一, 其对手风险的研究已经引起了学术界和业界的广泛关注.

早期学术界对 CDS 信用估值调整的研究主要集中于单边 CVA, 即假设仅对手是可违约的而投资人不会发生违约, 相关方面的研究可参见文献 [4, 5] 等等. 然而, 2007-2010 年的信用风险危机表明交易双方均可能发生违约. 因此, 本文将研究 CDS 的双边 CVA.

在约化框架下研究 CDS 合同的对手信用风险, 其最大的难度在于描述 CDS 交易三方的违约相关性以及各方的违约强度. 约化传染模型是一种比较常用的刻画违约相关的模型. 在传染模型中, 违约相关结构主要是由违约强度之间的内在关系引进的, 相关文献可参见文献 [4, 6, 7]. 处理传染模型的难度之一在于违约强度的环形结构, 文献 [8, 9] 提供了一个测度变换的方法来处理这一难题. 本文旨在约化传染模型的框架下提供一个更灵活的定价模型.

约化模型把公司违约看成是某个跳过程的首次跳时刻. 跳过程的强度通常用某些确定性过程或扩散过程来刻画, 如 Vasicek 模型和 Cox-Ingersoll-Ross (CIR) 模型. 最近, 通过对过去 150 年的公司债

券市场的实证分析, 文献 [10] 指出信用风险市场存在着高、中、低违约风险三种机制. 因此, 在建立信用风险模型时我们应考虑到由于信用危机所带来的市场机制的转换.

目前, 马氏调制模型已成为数理金融领域里最为流行和实用的模型之一, 参见文献 [10–12]. 在马氏调制模型中, 假设市场具有与宏观经济状态有关的不同机制. 市场机制之间的转换可能是由于商业条款、管理决策以及其他宏观经济条件的变化等因素而产生的. 直觉上, 违约风险应与经济周期或宏观经济有关. 在经济繁荣时期, 由于良好的经营收益使得公司违约率较低, 因此违约风险大大降低. 而在经济萧条时期, 由于经营困难收益减少使得公司很难支付债务, 从而违约风险显著增加. 因此, 受文献 [10,11] 等的启发, 我们将考虑一个马氏调制的双边 CVA 的定价模型, 在该模型中, 利息率、回复率和违约强度均受一连续时间有限状态的马氏链的影响, 该马氏链描述了宏观经济状况. 在所考虑的马氏调制的定价模型下, 我们能够给出 CDS 的双边 CVA 的表达公式.

本文的结构如下: 第 2 节描述了无对手风险和考虑对手风险的 CDS 的现金流, 并进一步给出了 CDS 的双边 CVA 的一般公式. 第 3 节在马氏调制的框架下, 引进了违约相关结构以及利率和回复率的动态, 并给出了一些基本结论. 在第 4 节中, 我们利用测度变换的思想给出了违约时间的条件联合分布. 第 5 节给出了马氏调制强度的传染模型下, CDS 的双边 CVA 的表达公式. 在第 6 节中, 我们数值分析了马氏调制对 CVA 的影响. 第 7 节是总结.

2 双边信用估值调整

在本节中, 我们将给出 CDS 合同双边 CVA 的一般表达公式. 在有限区间 $[0, T]$ 上考虑一个连续时间的信用风险模型. 令 $\{\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, P\}$ 为一个带过滤的完备的概率空间, 其中 P 为风险中性测度, $\{\mathfrak{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 为一个满足通常条件的过滤. 在本文中, 我们假设所有的随机变量都定义在此概率空间上并且是 $\mathfrak{F}_T$ -可测的. 令 E_τ 表示给定 $\mathfrak{F}_\tau$, 测度 P 下的条件期望.

单名 CDS 是一个以参照实体的违约风险为标的保险合约, 合约由两个法人交易, 一个称为保护买方 (投资人), 另一个称为保护卖方 (对手). 在合约有效期内, 保护卖方将承担参照实体的违约风险. 我们假设保护买方和卖方均是可违约的, 无风险利率 r_t 是随机的. 考虑一个到期日为 T , 连续保费支付率为 κ 、单位面值的 CDS 合同. 我们用指标 0、1、2 分别表示与投资人、参照实体和对手相联系的数量. 令 τ_0 、 τ_1 与 τ_2 分别表示投资人、参照实体与对手的违约时间, $R_0(\tau)$ 、 $R_1(\tau)$ 与 $R_2(\tau)$ 表示投资人、参照实体与对手在违约发生时刻的随机回复率. 假设所有的现金流均是从投资人的角度来看的, 并且不可能发生同时违约. 令 $x^+ = \max\{x, 0\}$ 以及 $x^- = -\min\{x, 0\}$ 分别表示实数 x 的正部和负部. 我们首先定义无对手风险和考虑对手风险的 CDS 合同的折现现金流.

定义 2.1 无对手信用风险的 CDS 的模型价格过程定义为 $P_t = E_t[p_T(t)]$, 其中 $p_T(t)$ 为 $(t, T]$ 时间内无对手风险 CDS 的累积折现支付, 因此

$$p_T(t) = -\kappa \int_{t \wedge \tau_1}^{T \wedge \tau_1} e^{-\int_t^s r_v dv} ds + (1 - R_1(\tau_1)) e^{-\int_t^{\tau_1} r_v dv} 1_{\{t < \tau_1 \leq T\}}, \quad (2.1)$$

且 $p_T(t) = 0$, 当 $t \geq \tau_1 \wedge T$.

现在我们来研究具有对手风险的 CDS 的模型价格过程. 在考虑具有对手风险的 CDS 情况下, 投资人从合同生效日开始直至信用事件发生时刻 (CDS 合同所涉及的三方中首个发生违约的时刻) 或合同到期日 T 时刻为止, 向对手连续支付保费, 其年保费率为 κ . 若对手首先违约而投资人和参照实体还没有违约, 则我们将计算 τ_2 时刻的公平价值 P_{τ_2} . 若对投资人来说 P_{τ_2} 是负的, 则由投资人向对手

支付 P_{τ_2} ; 若对投资人来说 P_{τ_2} 是正的, 则对手将仅向投资人支付 $R_2 P_{\tau_2}$. 另一方面, 若投资人首先违约而对手和参照实体还没有违约, 则我们将计算 τ_0 时刻的公平价值 P_{τ_0} . 若对投资人来说 P_{τ_0} 是正的, 则由对手向投资人支付 P_{τ_0} ; 若对投资人来说 P_{τ_0} 是负的, 则投资人将仅向对手支付 $R_0 P_{\tau_0}$.

因此, 我们得到

定义 2.2 考虑对手信用风险的 CDS 的模型价格过程定义为 $\Pi_t = E_t[\pi_T(t)]$, 其中 $\pi_T(t)$ 为 (t, T) 时间内考虑对手风险的 CDS 的累积折现支付, 因此

$$\begin{aligned} \pi_T(t) = & -\kappa \int_{\tau_0 \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge t}^{T \wedge \tau_0 \wedge \tau_1 \wedge \tau_2} e^{-\int_t^s r_v dv} ds + (1 - R_1(\tau_1)) e^{-\int_t^{\tau_1} r_v dv} 1_{\{t < \tau_1 \leq T, \tau_1 < \tau_2 \wedge \tau_0\}} \\ & + e^{-\int_t^{\tau_2} r_v dv} 1_{\{\tau_2 < \tau_1 \wedge \tau_0, t < \tau_2 \leq T\}} (R_2(\tau_2) P_{\tau_2}^+ - P_{\tau_2}^-) \\ & + e^{-\int_t^{\tau_0} r_v dv} 1_{\{\tau_0 < \tau_1 \wedge \tau_2, t < \tau_0 \leq T\}} (P_{\tau_0}^+ - R_0(\tau_0) P_{\tau_0}^-), \end{aligned} \quad (2.2)$$

且 $\pi_T(t) = 0$, 当 $t \geq \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T$.

信用违约互换的信用估值调整通常被定义为无对手信用风险和考虑对手信用风险的 CDS 价值之差. 更确切地, $CVA_t = 1_{\{\tau_2 > t\}} (P_t - \Pi_t)$. 则双边 CVA 的公式为

命题 2.1 在时刻 t , 且 $\tau_0 \wedge \tau_2 > t$, 我们有

$$\begin{aligned} 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_2 > t\}} CVA_t = & 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_2 > t\}} E_t[(1 - R_2(\tau_2)) e^{-\int_t^{\tau_2} r_v dv} P_{\tau_2}^+ 1_{\{t < \tau_2 \leq T, \tau_2 < \tau_1 \wedge \tau_0\}}] \\ & - 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_2 > t\}} E_t[(1 - R_0(\tau_0)) e^{-\int_t^{\tau_0} r_v dv} P_{\tau_0}^- 1_{\{t < \tau_0 \leq T, \tau_0 < \tau_1 \wedge \tau_2\}}], \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 P_t 由定义 2.1 给出.

证明 当 $\tau_0 \wedge \tau_2 > t$ 时, $\pi_T(t)$ 又可表达为

$$\begin{aligned} \pi_T(t) = & 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_2 > T\}} p_T(t) + 1_{\{t < \tau_0 \leq T, \tau_0 < \tau_2\}} (p_{\tau_0}(t) + e^{-\int_t^{\tau_0} r_v dv} (P_{\tau_0}^+ - R_0(\tau_0) P_{\tau_0}^-)) \\ & + 1_{\{t < \tau_2 \leq T, \tau_2 < \tau_0\}} (p_{\tau_2}(t) + e^{-\int_t^{\tau_2} r_v dv} (R_2(\tau_2) P_{\tau_2}^+ - P_{\tau_2}^-)). \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_2 > t\}} p_T(t) = & 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_2 > T\}} p_T(t) + 1_{\{t < \tau_0 \leq T, \tau_0 < \tau_2\}} (p_{\tau_0}(t) + e^{-\int_t^{\tau_0} r_v dv} p_T(\tau_0)) \\ & + 1_{\{t < \tau_2 \leq T, \tau_2 < \tau_0\}} (p_{\tau_2}(t) + e^{-\int_t^{\tau_2} r_v dv} p_T(\tau_2)). \end{aligned}$$

因此, 当 $\tau_0 \wedge \tau_2 > t$ 时,

$$\begin{aligned} CVA_t = & E_t[p_T(t) - \pi_T(t)] \\ = & E_t[1_{\{t < \tau_2 \leq T, \tau_2 < \tau_0\}} e^{-\int_t^{\tau_2} r_v dv} (p_T(\tau_2) - (R_2(\tau_2) P_{\tau_2}^+ - P_{\tau_2}^-))] \\ & + E_t[1_{\{t < \tau_0 \leq T, \tau_0 < \tau_2\}} e^{-\int_t^{\tau_0} r_v dv} (p_T(\tau_0) - (P_{\tau_0}^+ - R_0(\tau_0) P_{\tau_0}^-))]. \end{aligned}$$

利用等式 $E_t[E_{\tau_2}[\cdot]] = E_t[\cdot]$, $E_t[E_{\tau_0}[\cdot]] = E_t[\cdot]$, 上述公式变为

$$\begin{aligned} CVA_t = & E_t[E_{\tau_2}[1_{\{t < \tau_2 \leq T, \tau_2 < \tau_0\}} e^{-\int_t^{\tau_2} r_v dv} (p_T(\tau_2) - (R_2(\tau_2) P_{\tau_2}^+ - P_{\tau_2}^-))]] \\ & + E_t[E_{\tau_0}[1_{\{t < \tau_0 \leq T, \tau_0 < \tau_2\}} e^{-\int_t^{\tau_0} r_v dv} (p_T(\tau_0) - (P_{\tau_0}^+ - R_0(\tau_0) P_{\tau_0}^-))]] \\ = & E_t[1_{\{t < \tau_2 \leq T, \tau_2 < \tau_0\}} e^{-\int_t^{\tau_2} r_v dv} (P_{\tau_2} - (R_2(\tau_2) P_{\tau_2}^+ - P_{\tau_2}^-))] \\ & + E_t[1_{\{t < \tau_0 \leq T, \tau_0 < \tau_2\}} e^{-\int_t^{\tau_0} r_v dv} (P_{\tau_0} - (P_{\tau_0}^+ - R_0(\tau_0) P_{\tau_0}^-))] \\ = & E_t[(1 - R_2(\tau_2)) e^{-\int_t^{\tau_2} r_v dv} P_{\tau_2}^+ 1_{\{t < \tau_2 \leq T\}}] - E_t[(1 - R_0(\tau_0)) e^{-\int_t^{\tau_0} r_v dv} P_{\tau_0}^- 1_{\{t < \tau_0 \leq T\}}], \end{aligned}$$

注意到 $P_t 1_{\{\tau_1 \leq t\}} = 0$. 因此, (2.3) 成立. $\square$

3 马氏调制相互作用的强度

本节将在马氏环境下建立 τ_0 、 τ_1 和 τ_2 的违约相关结构.

令 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 为一连续时间, 有限状态且不可约的齐次马氏链, 其生成子为 $Q = (q_{ij})_{i,j=1,2,\dots,N}$, 该马氏链所生成的过滤记为 $\mathfrak{S}_t^X$. 马氏链 X 的状态可解释为不同的经济状态或经济周期的不同阶段. 不失一般性, 我们把马氏链 X 的状态空间记为 $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$, 其中 $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^* \in \mathbb{R}^N$, $*$ 表示向量或矩阵的转置. $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 具有如下的半鞅表达式:

$$X_t = X_0 + \int_0^t Q^* X_s ds + M_t, \quad (3.1)$$

其中 $\{M_t\}_{t \geq 0}$ 是一个在 $\mathbb{R}^N$ 上取值的, 关于过滤 $\mathfrak{S}_t^X$ 的鞅.

现在我们在约化框架下引进违约相关结构. 记

$$\mathfrak{S}_t = \mathfrak{S}_t^X \vee \mathfrak{S}_t^0 \vee \mathfrak{S}_t^1 \vee \mathfrak{S}_t^2,$$

其中 $\mathfrak{S}_t^i = \sigma(H_u^i : 0 \leq u \leq t)$, 且 $H_u^i = 1_{\{\tau_i \leq u\}}$, $i = 0, 1, 2$. 对每一 $i = 0, 1, 2$, 假设 τ_i 具有一个非负 $\mathfrak{S}_t$ 可料的强度过程 λ_t^i , 且对所有的 $t < \infty$, 均有 $E[\int_0^t \lambda_s^i ds] < \infty$ 成立. 进一步有, 补偿过程

$$M_t^i = 1_{\{\tau_i \leq t\}} - \int_0^{t \wedge \tau_i} \lambda_s^i ds$$

是一个 $(\mathfrak{S}, P)$ -鞅.

令 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 空间上的内积, 即, 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^N$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i$. 假设投资人、参照实体和对手的违约强度表示为

$$\begin{cases} \lambda_t^0 = a_t^{00} + a_t^{01} 1_{\{\tau_1 \leq t\}} + a_t^{02} 1_{\{\tau_2 \leq t\}}, \\ \lambda_t^1 = a_t^{11} + a_t^{10} 1_{\{\tau_0 \leq t\}} + a_t^{12} 1_{\{\tau_2 \leq t\}}, \\ \lambda_t^2 = a_t^{22} + a_t^{20} 1_{\{\tau_0 \leq t\}} + a_t^{21} 1_{\{\tau_1 \leq t\}}, \end{cases} \quad (3.2)$$

其中 $a_t^{ij} = \langle a^{ij}(t), X_t \rangle$, 且对每一 $i, j = 0, 1, 2$, $a^{ij}(t) = (a_1^{ij}(t), a_2^{ij}(t), \dots, a_N^{ij}(t))^* \in \mathbb{R}^N$. 这里我们假设对每一 $i, j = 0, 1, 2, k = 1, 2, \dots, N$, $a_k^{ij}(t)$ 是一个在 $(0, \infty)$ 上取值的、关于时间 t 的确定性函数, 并且对所有的 $t < \infty$, 都有 $\int_0^t a_k^{ij}(s) ds < \infty$, 以及 $\int_0^t a_k^{ii}(s) ds = \infty$. 进一步, 在本文中我们假设 $r_v = \langle \mathbf{r}, X_v \rangle$, $R_j(\tau_j) = \langle \mathbf{R}_j, X_{\tau_j} \rangle$, 其中 $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)^* \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{R}_j = (R_{j1}, \dots, R_{jN})^* \in \mathbb{R}^N$, 且对每一 $j = 0, 1, 2, i = 1, \dots, N$, $r_i > 0, 0 \leq R_{ji} < 1$.

注意到 (3.2) 式考虑的违约相关性来源于两个方面. 首先, 三个公司的违约强度均受宏观经济的影响, 因此它们之间的违约相关通过马氏链来描述. 其次, 违约相关性来源于违约传染. 本文将利用由文献 [8] 所提出的测度变换的思想来处理 (3.2) 中的违约强度的环形结构.

定义如下的生存测度,

$$\left. \frac{dP^i}{dP} \right|_{\mathfrak{S}_t} = 1_{\{\tau_i > t\}} \exp \left(\int_0^t \lambda_s^i ds \right) \doteq \eta_t^i, \quad t \leq T, \quad i = 0, 1, 2, \quad (3.3)$$

其中 P^i 是一个与公司相联系的 (公司 i) 在随机区间 $[0, \tau_i)$ 上、关于测度 P 绝对连续的概率测度. 由文献 [8] 中的引理 A.2 知, $1_{\{\tau_i > t\}} \exp(\int_0^t \lambda_s^i ds)$ 是一关于 $\mathfrak{S}_t$ 的一致可积 P -鞅, 且在 $[0, \tau_i)$ 上几乎处处

为正, 而在 $[\tau_i, \infty)$ 上几乎处处为零. 令 $E^i[\cdot]$ 表示测度 P^i 下的期望算子. 则, 对任意 P^i -可积的随机变量 Y 以及 $t < s \leq T$, 由文献 [8] 知

$$E[Y\eta_t^i] = E^i[Y], \quad E[\eta_s^i Y | \mathfrak{F}_t] = \eta_t^i E^i[Y | \mathfrak{F}_t].$$

另外, 我们定义

$$\left. \frac{dP^{ij}}{dP} \right|_{\mathfrak{F}_t} = \eta_t^i \eta_t^j, \quad t \leq T, \quad i, j = 0, 1, 2. \quad (3.4)$$

由文献 [13] 中的命题 3.1 可知, $\eta_t^i \eta_t^j$ 是一个关于 $\mathfrak{F}_t$ 的一致可积 P -鞅.

则对任意 P^{ij} -可积的随机变量 Y 以及 $t < s \leq T$, 有

$$E[Y\eta_t^i \eta_t^j] = E^{ij}[Y], \quad E[\eta_s^i \eta_s^j Y | \mathfrak{F}_t] = \eta_t^i \eta_t^j E^{ij}[Y | \mathfrak{F}_t].$$

利用 (3.3) 和 (3.4) 得到

$$\left. \frac{dP^{ij}}{dP^j} \right|_{\mathfrak{F}_t} = \eta_t^i, \quad t \leq T, \quad i, j = 0, 1, 2. \quad (3.5)$$

因此, 对任意 P^{ij} -可积的随机变量 Y 以及 $t < s \leq T$, 将测度 P^j 变换为 P^{ij} ,

$$E^j[Y\eta_t^i] = E^{ij}[Y], \quad E^j[\eta_s^i Y | \mathfrak{F}_t] = \eta_t^i E^{ij}[Y | \mathfrak{F}_t].$$

下列结论说明, 在测度 P^i, P^{ij} 下, 马氏链 X_t 的分布与其在测度 P 下相同.

命题 3.1 过程

$$M_t = X_t - X_0 - \int_0^t Q^* X_s ds, \quad (3.6)$$

在测度 P^{ij} 下, 是一个在 $\mathbb{R}^N$ 上取值的鞅.

证明 由于 M_t 在测度 P 下是一个鞅, 只要证明 $M_t \eta_t^i \eta_t^j$ 也是一个 P -鞅. 由 Ito 公式得到,

$$M_t \eta_t^i \eta_t^j = M_0 + \int_0^t \eta_{s-}^i \eta_{s-}^j dM_s + \int_0^t M_{s-} d(\eta_s^i \eta_s^j) + \sum_{s \leq t} \Delta M_s \Delta(\eta_s^i \eta_s^j).$$

由于 M_t 和 $\eta_t^i \eta_t^j$ 均为 $(\mathfrak{F}, P)$ -鞅, 只需证明上式中的最后一项为零.

由于 $\exp(\int_0^t (\lambda_s^i + \lambda_s^j) ds)$ 是连续的, $\eta_t^i \eta_t^j$ 仅在 $t = \tau_i$ 或 $t = \tau_j$ 时发生跳. 注意到, 在 $s = \tau_i$ 或 $s = \tau_j$ 时刻, 若 $\Delta \eta_s^i \neq 0$, 则上式中的最后一项和式为零只要 $\Delta M_{\tau_i} = 0$ 以及 $\Delta M_{\tau_j} = 0$. 事实上, 对任意固定的时刻 $t > 0$, 均有 $P(\Delta M_t \neq 0) = P(\Delta X_t \neq 0) = 0$. 记 $0 < T_1 < T_2 < \dots$ 为 X 的转移时间. 则, 在已知 X 路径的条件下, 对每一 $l = i, j$, 我们有

$$P(\Delta X_{\tau_l} \neq 0) = E[E[1_{\{\Delta X_{\tau_l} \neq 0\}} | X_s, s \geq 0]] = E\left[E\left[\sum_{j=1}^{\infty} 1_{\{\tau_l = T_j\}} \middle| X_s, s \geq 0\right]\right].$$

利用定义 $\tau_l = \min\{t > 0 : \int_0^t \lambda_t^l dt \geq E_l\}$, 我们得到

$$E\left[\sum_{j=1}^{\infty} 1_{\{\tau_l = T_j\}} \middle| X_s, s \geq 0\right] = E\left[\sum_{j=1}^{\infty} 1_{\{\int_0^{T_j} \lambda_s^l ds = E_l\}} \middle| X_s, s \geq 0\right] = 0,$$

其中最后一个等式成立是因为随机变量 E_l 和 X 是独立的, 并且 E_l 是连续的. 因此, 我们可以得出 $\Delta M_{\tau_l} = \Delta X_{\tau_l} = 0$ 几乎处处成立. $\square$

命题 3.2 过程

$$M_t = X_t - X_0 - \int_0^t Q^* X_s ds, \quad (3.7)$$

在测度 P^i 下, 是一个在 $\mathbb{R}^N$ 上取值的鞅.

证明 证明与命题 3.1 的证明类似, 因此我们略去了证明. $\square$

为了给出双边 CVA 的表达公式, 我们首先给出一个有用的结论. 定义

$$V(t, T) = E[e^{-\int_t^T f_u du} \langle \eta_T, X_T \rangle | \mathfrak{S}_t^X], \quad (3.8)$$

其中 $f_t = \langle \mathbf{f}_t, X_t \rangle$, 且 $\mathbf{f}_t = (f_1(t), \dots, f_N(t))^*$, $\eta_T = (\eta_1(T), \dots, \eta_N(T))^*$. 这里对每一 $i = 1, \dots, N$, $f_i(u)$ 是一个非负的确定的函数且满足 $\int_0^T f_i(u) du < \infty$, $\eta_i(T)$ 也是一个确定性的函数. 注意到 X 是一个关于 $\mathfrak{S}^X$ 的马氏链. 因此,

$$V(t, T) = E[e^{-\int_t^T f_u du} \langle \eta_T, X_T \rangle | X_t] =: F(t, T, X_t).$$

为了简便起见, 令 $\text{diag}(\boldsymbol{\theta})$ 表示对角矩阵, 其中对角线上的元素是由向量 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^* \in \mathbb{R}^N$ 所确定的.

引理 3.1 令 $V(t, T)$ 为 (3.8) 所定义的条件期望. 则我们有

$$V(t, T) = \langle \mathbf{A}(t, T) \eta_T, X_t \rangle, \quad (3.9)$$

其中矩阵 $\mathbf{A}$ 为下列方程的解:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (Q - \text{diag}(\mathbf{f}_t)) \mathbf{A}(t, T) = 0, \quad \mathbf{A}(T, T) = \mathbf{I}, \quad (3.10)$$

其中 $\mathbf{I} = \text{diag}(\mathbf{1})$ 且 $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^* \in \mathbb{R}^N$.

证明 记 $F_i(t, T) = F(t, T, e_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ 且

$$\Phi(t, T) = (F_1(t, T), F_2(t, T), \dots, F_N(t, T))^* \in \mathbb{R}^N.$$

显然, $F(t, T, X_t) = \sum_{i=1}^N F_i(t, T) \langle e_i, X_t \rangle = \langle \Phi(t, T), X_t \rangle$. 对 $Z_t = e^{-\int_0^t f_u du} F(t, T, X_t)$ 应用 Ito 公式得到

$$dZ_t = -f_t Z_t dt + e^{-\int_0^t f_u du} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \langle \Phi(t, T), Q^* X_t \rangle \right) dt + e^{-\int_0^t f_u du} \langle \Phi(t, T), dM_t \rangle.$$

注意到 Z_t 是一个有界的 $\mathfrak{S}_t^X$ -鞅. 因此, 上述等式的有界变差项需为零. 也就是说, 对任意的 $x \in \mathcal{E}$, 函数 $(t, x) \rightarrow F(t, T, x)$ 是下列方程的解:

$$\frac{\partial F}{\partial t} - f(t) F(t, T, x) + \langle Q \Phi(t, T), x \rangle = 0, \quad F(T, T, x) = \langle \eta_T, x \rangle, \quad x \in \mathcal{E}.$$

由于 x 可以取 $e_1, \dots, e_N$, 我们有

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t}, e_i \right\rangle - \langle \text{diag}(\mathbf{f}_t) \Phi(t, T), e_i \rangle + \langle Q \Phi(t, T), e_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

也就是说, Φ 满足下列的常微分方程:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (Q - \text{diag}(\mathbf{f}_t)) \Phi(t, T) = 0, \quad \Phi(T, T) = \langle \eta_T, \mathbf{I} \rangle.$$

令 $\mathbf{A}(t, T)$ 为如下方程的基本矩阵解

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (Q - \text{diag}(\mathbf{f}_t)) \mathbf{A}(t, T) = 0, \quad \mathbf{A}(T, T) = \mathbf{I}. \quad (3.11)$$

则 $\Phi(t, T) = \mathbf{A}(t, T) \eta_T$. $\square$

4 条件联合分布

在本节中, 我们将利用测度变换的思想来推导出测度 P^1 下, 违约时间的二维联合条件分布, 该分布在求 CDS 合同的双边 CVA 的过程中起着非常重要的作用.

命题 4.1 当 $0 < s \leq t \leq T$ 时, 我们有

$$E^1[1_{\{\tau_0 > t, \tau_2 > s\}} | \mathfrak{S}_T^X] = e^{-\int_0^t (a_v^{00} + a_v^{22}) dv} + \int_s^t a_v^{22} e^{-\int_0^v a_u^{22} du - \int_0^t a_u^{00} du - \int_v^t a_u^{02} du} dv. \quad (4.1)$$

令 Z 是一个有界的 $\mathfrak{S}^X$ -可料过程. 则当 $0 < s \leq t \leq T$, 我们有

$$E^1[1_{\{\tau_0 > t, \tau_2 \leq s\}} Z_{\tau_2} | \mathfrak{S}_T^X] = \int_0^s a_v^{22} e^{-\int_0^v a_u^{22} du - \int_0^t a_u^{00} du - \int_v^t a_u^{02} du} Z_v dv. \quad (4.2)$$

证明 要证明 (4.1), 只需证明对任意的事件 $A \in \mathfrak{S}_T^X$, 下列等式成立

$$\begin{aligned} & E^1[1_{\{A\}} E^1[1_{\{\tau_0 > t, \tau_2 > s\}} | \mathfrak{S}_T^X]] \\ &= E^1 \left[1_{\{A\}} \left(e^{-\int_0^t (a_v^{00} + a_v^{22}) dv} + \int_s^t a_v^{22} e^{-\int_0^v a_u^{22} du - \int_0^t a_u^{00} du - \int_v^t a_u^{02} du} dv \right) \right]. \end{aligned}$$

利用重期望法则得到

$$E^1[1_{\{A\}} E^1[1_{\{\tau_0 > t, \tau_2 > s\}} | \mathfrak{S}_T^X]] = E^1[1_{\{A\}} 1_{\{\tau_0 > t, \tau_2 > s\}}].$$

回顾

$$\left. \frac{dP^{ij}}{dP^j} \right|_{\mathfrak{S}_t} = \eta_t^i, \quad t \leq T, \quad i, j = 0, 1, 2.$$

将测度 P^1 变换至测度 P^{10} 得到

$$\begin{aligned} & E^1[1_{\{A\}} 1_{\{\tau_0 > t, \tau_2 > s\}}] \\ &= E^{10}[1_{\{A\}} 1_{\{\tau_2 > s\}} e^{-\int_0^t a_v^{00} dv - \int_{\tau_2}^t a_v^{02} dv} 1_{\{\tau_2 \leq t\}}] \\ &= E^{10}[1_{\{\tau_2 > t\}} e^{-\int_0^t a_v^{00} dv} 1_{\{A\}}] + E^{10}[1_{\{s < \tau_2 \leq t\}} e^{-\int_0^t a_v^{00} dv - \int_{\tau_2}^t a_v^{02} dv} 1_{\{A\}}] \\ &= E^{10}[e^{-\int_0^t (a_v^{00} + a_v^{22}) dv} 1_{\{A\}}] + E^{10} \left[1_{\{A\}} \int_s^t a_v^{22} e^{-\int_0^v a_u^{22} du - \int_0^t a_u^{00} du - \int_v^t a_u^{02} du} dv \right], \end{aligned}$$

其中最后一个等式成立是因为在测度 P^{10} 下, τ_2 具有强度 a_u^{22} . 又因为在测度 P^{10} 下, X_t 的分布与其在测度 P^1 下相同, 从而推得结论.

(4.2) 的证明类似. 对任意的事件 $A \in \mathfrak{S}_T^X$, 将测度 P^1 变换至测度 P^{10} 可得

$$\begin{aligned} & E^1[1_{\{A\}} E^1[1_{\{\tau_0 > t, \tau_2 \leq s\}} Z_{\tau_2} | \mathfrak{S}_T^X]] \\ &= E^1[1_{\{A\}} 1_{\{\tau_0 > t, \tau_2 \leq s\}} Z_{\tau_2}] \\ &= E^{10}[1_{\{\tau_2 \leq s\}} e^{-\int_0^t a_v^{00} dv - \int_{\tau_2}^t a_v^{02} dv} Z_{\tau_2} 1_{\{A\}}] \\ &= E^{10} \left[1_{\{A\}} \int_0^s a_v^{22} e^{-\int_0^v a_u^{22} du - \int_v^t a_u^{02} du - \int_0^t a_u^{00} du} Z_v dv \right]. \end{aligned}$$

由 X_t 在测度 P^{10} 和 P^1 下具有相同的分布可知结论成立. □

命题 4.2 当 $0 < t \leq s \leq T$ 时, 我们有

$$E^1[1_{\{\tau_0 > t, \tau_2 > s\}} | \mathfrak{S}_T^X] = e^{-\int_0^s (a_v^{00} + a_v^{22}) dv} + \int_t^s a_v^{00} e^{-\int_0^v a_u^{00} du - \int_0^s a_u^{22} du - \int_v^s a_u^{20} du} dv. \quad (4.3)$$

令 Z 是一个有界的 $\mathfrak{S}^X$ -可料过程. 则当 $0 < t \leq s \leq T$ 时, 我们有

$$E^1[1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_2 > s\}} Z_{\tau_2} | \mathfrak{S}_T^X] = \int_0^t a_v^{00} e^{-\int_0^v a_u^{00} du - \int_0^s a_u^{22} du - \int_v^s a_u^{20} du} Z_v dv. \quad (4.4)$$

证明 命题 4.2 的证明类似于命题 4.1 的证明, 因此我们略去了证明. $\square$

推论 4.1 在已知 $\mathfrak{S}_T^X$ 的条件下, τ_0 和 τ_2 在测度 P^1 下的条件联合密度为

$$f(t, s | \mathfrak{S}_T^X) = \begin{cases} (a_t^{00} + a_t^{02}) a_s^{22} e^{-\int_0^s a_u^{22} du - \int_0^t a_u^{00} du - \int_s^t a_u^{02} du}, & t > s, \\ (a_s^{22} + a_s^{20}) a_t^{00} e^{-\int_0^t a_u^{00} du - \int_0^s a_u^{22} du - \int_t^s a_u^{20} du}, & t < s. \end{cases}$$

证明 推论 4.1 可由命题 4.1 和 4.2 直接得出. $\square$

5 双边对手风险的无套利定价

在本节中, 我们将给出无对手风险的 CDS 合同的公平保费率 κ 以及该 CDS 合同的双边 CVA.

令 P_0 的价值为零即可得到无对手风险的 CDS 合同的公平保费率 κ . 因此, 我们有

命题 5.1 令 $\mathbf{A}_1(t, s)$, $\mathbf{A}_2(t, s)$, $\mathbf{A}_3(t, s)$, 以及 $\mathbf{A}_4(t, s)$ 为由 (3.10) 中 $\mathbf{f}_t$ 分别替换为 $\mathbf{r} + \mathbf{a}^{00}(t) + \mathbf{a}^{11}(t) + \mathbf{a}^{22}(t)$, $\mathbf{r} + \mathbf{a}^{00}(t) + \mathbf{a}^{02}(t) + \mathbf{a}^{11}(t) + \mathbf{a}^{12}(t)$, $\mathbf{r} + \mathbf{a}^{22}(t) + \mathbf{a}^{20}(t) + \mathbf{a}^{11}(t) + \mathbf{a}^{10}(t)$, 与 $\mathbf{r} + \mathbf{a}^{10}(t) + \mathbf{a}^{11}(t) + \mathbf{a}^{12}(t)$ 所解得的矩阵. 则公平保费率 κ 为

$$\kappa = \frac{\int_0^T \bar{h}(s) ds}{\int_0^T h(s) ds}, \quad (5.1)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{h}(s) = & \langle \mathbf{A}_1(0, s) \text{diag}(\mathbf{L}_1) \mathbf{a}^{11}(s), X_0 \rangle \\ & + \int_0^s \langle \mathbf{A}_1(0, v) \text{diag}(\mathbf{a}^{22}(v)) \mathbf{A}_2(v, s) \text{diag}(\mathbf{L}_1) (\mathbf{a}^{11}(s) + \mathbf{a}^{12}(s)), X_0 \rangle dv \\ & + \int_0^s \langle \mathbf{A}_1(0, v) \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(v)) \mathbf{A}_3(v, s) \text{diag}(\mathbf{L}_1) (\mathbf{a}^{11}(s) + \mathbf{a}^{10}(s)), X_0 \rangle dv \\ & + \int_0^s \int_x^s \langle \mathbf{A}_1(0, x) \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(x)) \mathbf{A}_3(x, y) (\text{diag}(\mathbf{a}^{22}(y) + \mathbf{a}^{20}(y))) \\ & \times \mathbf{A}_4(y, s) \text{diag}(\mathbf{L}_1) (\mathbf{a}^{11}(s) + \mathbf{a}^{10}(s) + \mathbf{a}^{12}(s)), X_0 \rangle dy dx \\ & + \int_0^s \int_y^s \langle \mathbf{A}_1(0, y) \text{diag}(\mathbf{a}^{22}(x)) \mathbf{A}_2(y, x) (\text{diag}(\mathbf{a}^{00}(x) + \mathbf{a}^{02}(x))) \mathbf{A}_4(x, s) \\ & \times \text{diag}(\mathbf{L}_1) (\mathbf{a}^{11}(s) + \mathbf{a}^{10}(s) + \mathbf{a}^{12}(s)), X_0 \rangle dx dy, \end{aligned}$$

以及

$$h(s) = \langle \mathbf{A}_1(0, s) \mathbf{1}, X_0 \rangle + \int_0^s \langle \mathbf{A}_1(0, v) \text{diag}(\mathbf{a}^{22}(v)) \mathbf{A}_2(v, s) \mathbf{1}, X_0 \rangle dv$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^s \langle \mathbf{A}_1(0, v) \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(v)) \mathbf{A}_3(v, s) \mathbf{1}, X_0 \rangle dv \\
& + \int_0^s \int_x^s \langle \mathbf{A}_1(0, x) \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(x)) \mathbf{A}_3(x, y) \text{diag}(\mathbf{a}^{22}(y) + \mathbf{a}^{20}(y)) \\
& \times \mathbf{A}_4(y, s) \mathbf{1}, X_0 \rangle dy dx + \int_0^s \int_y^s \langle \mathbf{A}_1(0, y) \text{diag}(\mathbf{a}^{22}(x)) \mathbf{A}_2(y, x) \\
& \times \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(x) + \mathbf{a}^{02}(x)) \mathbf{A}_4(x, s) \mathbf{1}, X_0 \rangle dx dy,
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{L}_1 = \mathbf{1} - \mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^N$.

证明 将测度 P 变换至测度 P^1 , 则在 $[0, T]$ 区间内的期望折现保费支付为

$$\begin{aligned}
& \kappa E \left[\int_0^T e^{-\int_0^s r_v dv} 1_{\{\tau_1 > s\}} ds \right] \\
& = \kappa E^1 \left[\int_0^T e^{-\int_0^s r_v dv} e^{-\int_0^s a_v^{11} dv - \int_{\tau_0}^s a_v^{10} dv} 1_{\{\tau_0 \leq s\}} - \int_{\tau_2}^s a_v^{12} dv} 1_{\{\tau_2 \leq s\}} ds \right] \\
& = \kappa \int_0^T (E^1[1_{\{\tau_0 > s, \tau_2 > s\}} e^{-\int_0^s (r_v + a_v^{11}) dv}] + E^1[1_{\{\tau_0 > s, \tau_2 \leq s\}} e^{-\int_0^s (r_v + a_v^{11}) dv - \int_{\tau_2}^s a_v^{12} dv}] \\
& \quad + E^1[1_{\{\tau_2 > s, \tau_0 \leq s\}} e^{-\int_0^s (r_v + a_v^{11}) dv - \int_{\tau_0}^s a_v^{10} dv}] + E^1[1_{\{\tau_0 \leq s, \tau_2 \leq s\}} e^{-\int_0^s (r_v + a_v^{11}) dv - \int_{\tau_0}^s a_v^{10} dv - \int_{\tau_2}^s a_v^{12} dv}]) ds \\
& \triangleq \kappa \int_0^T (h_1(s) + h_2(s) + h_3(s) + h_4(s)) ds. \tag{5.2}
\end{aligned}$$

下面我们仍需计算 (5.2) 中的期望. 由命题 4.1 知,

$$\begin{aligned}
h_1(s) & = E^1[E^1[1_{\{\tau_0 > s, \tau_2 > s\}} | \mathbb{S}_T^X] e^{-\int_0^s (r_v + a_v^{11}) dv}] \\
& = E^1[e^{-\int_0^s (r_v + a_v^{00} + a_v^{11} + a_v^{22}) dv}] \\
& = \langle \mathbf{A}_1(0, s) \mathbf{1}, X_0 \rangle,
\end{aligned}$$

其中最后一个等式成立是利用了引理 3.1 以及 X 在测度 P^1 和 P 下具有相同的分布而得到的.

由 (4.2) 得

$$\begin{aligned}
h_2(s) & = \int_0^s E^1[e^{-\int_0^s (a_u^{00} + a_u^{11} + r_u) du - \int_v^s (a_u^{02} + a_u^{12}) du - \int_0^v a_u^{22} du} a_v^{22}] dv \\
& = \int_0^s E^1[e^{-\int_0^v (a_u^{00} + a_u^{11} + a_u^{22} + r_u) du} a_v^{22} E^1[e^{-\int_v^s (a_u^{12} + a_u^{02} + a_u^{00} + a_u^{11} + r_u) du} | \mathbb{S}_v^X]] dv \\
& = \int_0^s E^1[e^{-\int_0^v (a_u^{00} + a_u^{11} + a_u^{22} + r_u) du} \langle \text{diag}(\mathbf{a}^{22}(v)) \mathbf{A}_2(v, s) \mathbf{1}, X_v \rangle] dv, \\
& = \int_0^s \langle \mathbf{A}_1(0, v) \text{diag}(\mathbf{a}^{22}(v)) \mathbf{A}_2(v, s) \mathbf{1}, X_0 \rangle dv.
\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
h_3(s) & = \int_0^s E^1[a_v^{00} e^{-\int_0^v (a_u^{00} + a_u^{11} + a_u^{22} + r_u) du - \int_v^s (a_u^{10} + a_u^{20} + a_u^{11} + a_u^{22} + r_u) du}] dv \\
& = \int_0^s \langle \mathbf{A}_1(0, v) \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(v)) \mathbf{A}_3(v, s) \mathbf{1}, X_0 \rangle dv.
\end{aligned}$$

由推论 4.1 可以得出

$$h_4(s) = \int_0^s \int_x^s E^1[e^{-\int_0^x (r_v + a_v^{00} + a_v^{11} + a_v^{22}) dv - \int_x^y (r_v + a_v^{10} + a_v^{20} + a_v^{11} + a_v^{22}) dv - \int_y^s (r_v + a_v^{10} + a_v^{11} + a_v^{12}) dv}] dv dx$$

$$\begin{aligned}
& \times (a_y^{22} + a_y^{20})a_x^{00} dy dx + \int_0^s \int_y^s E^1[e^{-\int_0^y (r_v + a_v^{00} + a_v^{11} + a_v^{22}) dv} \\
& \times (a_x^{00} + a_x^{02})a_y^{22} e^{-\int_y^x (r_v + a_v^{00} + a_v^{02} + a_v^{11} + a_v^{12}) dv - \int_x^s (r_v + a_v^{10} + a_v^{11} + a_v^{12}) dv}] dx dy \\
& \doteq \int_0^s \int_x^s h_{41}(x, y) dy dx + \int_0^s \int_y^s h_{42}(x, y) dx dy.
\end{aligned}$$

只需计算 $h_{41}(x, y)$ 以及 $h_{42}(x, y)$. 由重期望法则和引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}
h_{41}(x, y) &= E^1[(a_y^{22} + a_y^{20})a_x^{00} e^{-\int_0^x (r_v + a_v^{00} + a_v^{11} + a_v^{22}) dv - \int_x^y (r_v + a_v^{10} + a_v^{20} + a_v^{11} + a_v^{22}) dv} \\
& \times E^1[e^{-\int_y^s (r_v + a_v^{10} + a_v^{11} + a_v^{12}) dv} | \mathfrak{F}_y^X]] \\
&= E^1[a_x^{00} e^{-\int_0^x (r_v + a_v^{00} + a_v^{11} + a_v^{22}) dv} E^1[e^{-\int_x^y (r_v + a_v^{10} + a_v^{20} + a_v^{11} + a_v^{22}) dv} \\
& \times \langle \text{diag}(\mathbf{a}^{22}(y) + \mathbf{a}^{20}(y)) \mathbf{A}_4(y, s) \mathbf{1}, X_y \rangle | \mathfrak{F}_x^X]] \\
&= E^1[e^{-\int_0^x (r_v + a_v^{00} + a_v^{11} + a_v^{22}) dv} \langle \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(x)) \\
& \times \mathbf{A}_2(y, x) \text{diag}(\mathbf{a}^{22}(y) + \mathbf{a}^{20}(y)) \mathbf{A}_4(y, s) \mathbf{1}, X_x \rangle] \\
&= \langle \mathbf{A}_1(0, x) \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(x)) \mathbf{A}_3(x, y) \text{diag}(\mathbf{a}^{22}(y) + \mathbf{a}^{20}(y)) \mathbf{A}_4(y, s) \mathbf{1}, X_0 \rangle.
\end{aligned}$$

类似于计算 $h_{41}(x, y)$, 我们有

$$h_{42}(x, y) = \langle \mathbf{A}_1(0, y) \text{diag}(\mathbf{a}^{22}(x)) \mathbf{A}_2(y, x) \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(x) + \mathbf{a}^{02}(x)) \mathbf{A}_4(x, s) \mathbf{1}, X_0 \rangle.$$

在 $[0, T]$ 区间内的期望折现损失支付为

$$\begin{aligned}
& E[(1 - R_1(\tau_1)) e^{-\int_0^{\tau_1} r_v dv} 1_{\{\tau_1 \leq T\}}] \\
&= E\left[\int_0^T (1 - R_1(s)) e^{-\int_0^s r_v dv} 1_{\{\tau_1 > s\}} dH_s^1\right] \\
&= \int_0^T E[(1 - R_1(s)) e^{-\int_0^s r_v dv} 1_{\{\tau_1 > s\}} (a_s^{11} + a_s^{10} 1_{\{\tau_0 \leq s\}} + a_s^{12} 1_{\{\tau_2 \leq s\}})] ds \\
&= \int_0^T (E^1[1_{\{\tau_0 > s, \tau_2 > s\}} (1 - R_1(s)) a_s^{11} e^{-\int_0^s (r_v + a_v^{11}) dv}] \\
& \quad + E^1[1_{\{\tau_0 > s, \tau_2 \leq s\}} (1 - R_1(s)) (a_s^{11} + a_s^{12}) e^{-\int_0^s (r_v + a_v^{11}) dv - \int_{\tau_2}^s a_v^{12} dv}] \\
& \quad + E^1[1_{\{\tau_2 > s, \tau_0 \leq s\}} (1 - R_1(s)) (a_s^{11} + a_s^{10}) e^{-\int_0^s (r_v + a_v^{11}) dv - \int_{\tau_0}^s a_v^{10} dv}] \\
& \quad + E^1[1_{\{\tau_0 \leq s, \tau_2 \leq s\}} (1 - R_1(s)) (a_s^{11} + a_s^{10} + a_s^{12}) e^{-\int_0^s (r_v + a_v^{11}) dv - \int_{\tau_0}^s a_v^{10} dv - \int_{\tau_2}^s a_v^{12} dv}]) ds \\
&\doteq \int_0^T (\bar{h}_1(s) + \bar{h}_2(s) + \bar{h}_3(s) + \bar{h}_4(s)) ds,
\end{aligned}$$

其中最后一个等式成立是由于 $H_s^1 - \int_0^{t \wedge \tau_1} \lambda_s^1 ds$ 是一个 $\mathfrak{F}$ -鞅.

由命题 4.1, 我们有

$$\begin{aligned}
\bar{h}_1(s) &= E^1[E^1[1_{\{\tau_0 > s, \tau_2 > s\}} | \mathfrak{F}_T^X] (1 - R_1(s)) a_s^{11} e^{-\int_0^s (r_v + a_v^{11}) dv}] \\
&= E^1[(1 - R_1(s)) a_s^{11} e^{-\int_0^s (r_v + a_v^{00} + a_v^{11} + a_v^{22}) dv}] \\
&= \langle \mathbf{A}_1(0, s) \text{diag}(\mathbf{L}_1) \mathbf{a}^{11}(s), X_0 \rangle,
\end{aligned}$$

其中最后一个等式可由引理 3.1 直接得出.

类似于计算 $h_2(s), h_3(s)$ 以及 $h_4(s)$, 我们有

$$\begin{aligned}\bar{h}_2(s) &= \int_0^s E^1[(1 - R_1(s))(a_s^{11} + a_s^{12})e^{-\int_0^s (a_u^{00} + a_u^{11} + r_u)du - \int_v^s (a_u^{02} + a_u^{12})du - \int_0^v a_u^{22}du} a_v^{22}]dv \\ &= \int_0^s \langle \mathbf{A}_1(0, v) \text{diag}(\mathbf{a}^{22}(v)) \mathbf{A}_2(v, s) \text{diag}(\mathbf{L}_1)(\mathbf{a}^{11}(s) + \mathbf{a}^{12}(s)), X_0 \rangle dv, \\ \bar{h}_3(s) &= \int_0^s E^1[(1 - R_1(s))(a_s^{11} + a_s^{10})e^{-\int_0^s (a_u^{22} + a_u^{11} + r_u)du - \int_v^s (a_u^{10} + a_u^{20})du - \int_0^v a_u^{00}du} a_v^{00}]dv \\ &= \int_0^s \langle \mathbf{A}_1(0, v) \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(v)) \mathbf{A}_3(v, s) \text{diag}(\mathbf{L}_1)(\mathbf{a}^{11}(s) + \mathbf{a}^{10}(s)), X_0 \rangle dv,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\bar{h}_4(s) &= \int_0^s \int_x^s E^1[e^{-\int_0^x (r_v + a_v^{00} + a_v^{11} + a_v^{22})dv - \int_x^y (r_v + a_v^{10} + a_v^{20} + a_v^{11} + a_v^{22})dv - \int_y^s (r_v + a_v^{10} + a_v^{11} + a_v^{12})dv} \\ &\quad \times a_x^{00}(a_y^{20} + a_y^{22})(1 - R_1(s))(a_s^{11} + a_s^{10} + a_s^{12})]dydx \\ &\quad + \int_0^s \int_y^s E^1[(1 - R_1(s))(a_s^{11} + a_s^{10} + a_s^{12})(a_x^{00} + a_x^{02})a_y^{22} \\ &\quad \times e^{-\int_0^y (r_v + a_v^{00} + a_v^{11} + a_v^{22})dv - \int_y^x (r_v + a_v^{00} + a_v^{02} + a_v^{11} + a_v^{12})dv - \int_x^s (r_v + a_v^{10} + a_v^{11} + a_v^{12})dv}]dxdy \\ &= \int_0^s \int_x^s \langle \mathbf{A}_1(0, x) \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(x)) \mathbf{A}_3(x, y) (\text{diag}(\mathbf{a}^{22}(y) + \mathbf{a}^{20}(y))) \\ &\quad \times \mathbf{A}_4(y, s) \text{diag}(\mathbf{L}_1)(\mathbf{a}^{11}(s) + \mathbf{a}^{10}(s) + \mathbf{a}^{12}(s)), X_0 \rangle dydx \\ &\quad + \int_0^s \int_y^s \langle \mathbf{A}_1(0, y) \text{diag}(\mathbf{a}^{22}(x)) \mathbf{A}_2(y, x) (\text{diag}(\mathbf{a}^{00}(x) + \mathbf{a}^{02}(x))) \mathbf{A}_4(x, s) \\ &\quad \times \text{diag}(\mathbf{L}_1)(\mathbf{a}^{11}(s) + \mathbf{a}^{10}(s) + \mathbf{a}^{12}(s)), X_0 \rangle dxdy.\end{aligned}$$

则令期望折现保费支付和期望折现损失支付相等立得结论. $\square$

下面我们来计算双边 CVA. 由定义 2.1 知, $1_{\{\tau_1 \leq t\}} P_t = 0$. 则

$$\begin{aligned}P_t &= 1_{\{\tau_1 > t\}} P_t \\ &= 1_{\{\tau_1 > t, \tau_0 > t, \tau_2 > t\}} P_t + 1_{\{\tau_1 > t, \tau_0 \leq t, \tau_2 \leq t\}} P_t + 1_{\{\tau_1 > t, \tau_0 > t, \tau_2 \leq t\}} P_t + 1_{\{\tau_1 > t, \tau_0 \leq t, \tau_2 > t\}} P_t.\end{aligned}$$

特别地,

$$P_{\tau_0} 1_{\{\tau_0 < \tau_1 \wedge \tau_2\}} = 1_{\{\tau_1 > \tau_0, \tau_0 \leq \tau_0, \tau_2 > \tau_0\}} P_{\tau_0},$$

以及

$$P_{\tau_2} 1_{\{\tau_2 < \tau_0 \wedge \tau_1\}} = 1_{\{\tau_1 > \tau_2, \tau_0 > \tau_2, \tau_2 \leq \tau_2\}} P_{\tau_2}.$$

因此, 为了计算双边 CVA, 我们需分别计算在事件 $\{\tau_1 > t, \tau_0 \leq t, \tau_2 > t\}$ 和 $\{\tau_1 > t, \tau_0 > t, \tau_2 \leq t\}$ 发生的条件下 P_t 的价值. 首先给出一些有用的结论.

引理 5.1 对任意的 $0 < t \leq s \leq T$ 和任意 $\mathfrak{S}_T^X$ -可测的随机变量 Z , 我们有

$$1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} E_t[Z 1_{\{\tau_1 > s, \tau_2 > s\}}] = 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} E[Z e^{-\int_t^s (a_v^{11} + a_v^{10} + a_v^{20} + a_v^{22})dv} | \mathfrak{S}_t^X], \quad (5.3)$$

以及

$$1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} E_t[Z 1_{\{\tau_1 > s, t < \tau_2 \leq s\}}]$$

$$= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} E \left[Z \int_t^s (a_y^{22} + a_y^{20}) e^{-\int_y^s a_v^{12} dv - \int_t^y (a_v^{20} + a_v^{22}) dv - \int_t^s (a_v^{11} + a_v^{10}) dv} dy | \mathfrak{S}_t^X \right]. \quad (5.4)$$

证明 将测度 P 变换至 P^1 得到

$$\begin{aligned} & 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} E_t [Z 1_{\{\tau_1 > s, \tau_2 > s\}}] \\ &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} E^1 [Z 1_{\{\tau_2 > s\}} e^{-\int_t^s (a_v^{11} + a_v^{10} 1_{\{\tau_0 \leq v\}}) dv} | \mathfrak{S}_t^X] \\ &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} E^1 [Z 1_{\{\tau_2 > s\}} e^{-\int_t^s (a_v^{11} + a_v^{10} 1_{\{\tau_0 \leq v\}} + a_v^{12} 1_{\{\tau_2 \leq v\}}) dv} | \mathfrak{S}_t^X, \tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t] \\ &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} \frac{E^1 [1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_2 > s\}} Z e^{-\int_t^s (a_v^{11} + a_v^{10}) dv} | \mathfrak{S}_t^X]}{E^1 [1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_2 > t\}} | \mathfrak{S}_t^X]} \\ &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} \frac{E^1 [E^1 [1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_2 > s\}} | \mathfrak{S}_t^X] Z e^{-\int_t^s (a_v^{11} + a_v^{10}) dv} | \mathfrak{S}_t^X]}{E^1 [1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_2 > t\}} | \mathfrak{S}_t^X]} \\ &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} \frac{E^1 [\int_0^t a_u^{00} e^{-\int_0^s a_v^{22} dv - \int_0^u a_v^{00} dv - \int_u^s a_v^{20} dv} du Z e^{-\int_t^s (a_v^{11} + a_v^{10}) dv} | \mathfrak{S}_t^X]}{\int_0^t a_u^{00} e^{-\int_0^t a_v^{22} dv - \int_0^u a_v^{00} dv - \int_u^t a_v^{20} dv} du} \\ &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} E^1 [Z e^{-\int_t^s (a_v^{11} + a_v^{10} + a_v^{20} + a_v^{22}) dv} | \mathfrak{S}_t^X], \end{aligned}$$

其中倒数第二个等式是利用命题 4.2 得到的. 又由于 X 在测度 P^1 和 P 下具有相同的分布, 从而 (5.3) 成立.

类似地,

$$\begin{aligned} & 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} E_t [Z 1_{\{\tau_1 > s, t < \tau_2 \leq s\}}] \\ &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} E^1 [Z 1_{\{t < \tau_2 \leq s\}} e^{-\int_t^s (a_v^{11} + a_v^{10} 1_{\{\tau_0 \leq v\}} + a_v^{12} 1_{\{\tau_2 \leq v\}}) dv} | \mathfrak{S}_t^X] \\ &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} E^1 [Z 1_{\{t < \tau_2 \leq s\}} e^{-\int_t^s (a_v^{11} + a_v^{10} 1_{\{\tau_0 \leq v\}} + a_v^{12} 1_{\{\tau_2 \leq v\}}) dv} | \mathfrak{S}_t^X, \tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t] \\ &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} \frac{E^1 [1_{\{\tau_0 \leq t, t < \tau_2 \leq s\}} Z e^{-\int_t^s (a_v^{11} + a_v^{10} + a_v^{12} 1_{\{\tau_2 \leq v\}}) dv} | \mathfrak{S}_t^X]}{E^1 [1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_2 > t\}} | \mathfrak{S}_t^X]} \\ &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} \frac{E^1 [E^1 [1_{\{\tau_0 \leq t, t < \tau_2 \leq s\}} e^{-\int_{\tau_0}^s a_v^{12} dv} | \mathfrak{S}_t^X] Z e^{-\int_t^s (a_v^{11} + a_v^{10}) dv} | \mathfrak{S}_t^X]}{E^1 [1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_2 > t\}} | \mathfrak{S}_t^X]} \\ &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} \\ &\quad \times \frac{E^1 [\int_t^s \int_0^t (a_y^{22} + a_y^{20}) a_x^{00} e^{-\int_0^y a_u^{22} du - \int_y^s a_v^{12} dv - \int_0^x a_u^{00} du - \int_x^y a_u^{20} du} dx dy Z e^{-\int_t^s (a_v^{11} + a_v^{10}) dv} | \mathfrak{S}_t^X]}{\int_0^t a_u^{00} e^{-\int_0^t a_v^{22} dv - \int_0^u a_v^{00} dv - \int_u^t a_v^{20} dv} du} \\ &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} E^1 \left[Z \int_t^s (a_y^{22} + a_y^{20}) e^{-\int_y^s a_v^{12} dv - \int_t^y (a_v^{20} + a_v^{22}) dv - \int_t^s (a_v^{11} + a_v^{10}) dv} dy | \mathfrak{S}_t^X \right], \end{aligned}$$

其中倒数第二个等式成立是利用了推论 4.1. 再由 X 在测度 P^1 和 P 下具有相同的分布可知 (5.4) 成立. $\square$

引理 5.2 对任意的 $0 < t \leq s \leq T$ 和任意 $\mathfrak{S}_T^X$ -可测的随机变量 Z , 我们有

$$1_{\{\tau_2 \leq t, \tau_1 > t, \tau_0 > t\}} E_t [Z 1_{\{\tau_1 > s, \tau_0 > s\}}] = 1_{\{\tau_2 \leq t, \tau_1 > t, \tau_0 > t\}} E [Z e^{-\int_t^s (a_v^{11} + a_v^{12} + a_v^{00} + a_v^{02}) dv} | \mathfrak{S}_t^X], \quad (5.5)$$

以及

$$1_{\{\tau_2 \leq t, \tau_1 > t, \tau_0 > t\}} E_t [Z 1_{\{\tau_1 > s, t < \tau_0 \leq s\}}]$$

$$= 1_{\{\tau_2 \leq t, \tau_1 > t, \tau_0 > t\}} E \left[Z \int_t^s (a_y^{00} + a_y^{02}) e^{-\int_y^s a_v^{10} dv - \int_t^y (a_v^{00} + a_v^{02}) dv - \int_t^s (a_v^{11} + a_v^{10}) dv} dy | \mathfrak{S}_t^X \right]. \quad (5.6)$$

证明 证明类似于引理 5.1 的证明, 因此我们略去了证明. $\square$

命题 5.2 在事件 $\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}$ 发生的条件下, 公平保费率为 κ 的无对手风险的 CDS 合同的价格具有如下的表达式:

$$1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} P_t = 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} \langle \mu_t, X_t \rangle \triangleq 1_{\{\tau_1 > t, \tau_2 \leq t\}} \bar{P}_t,$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_t = & \int_t^T (\mathbf{A}_3(t, s) (\text{diag}(\mathbf{L}_1)(\mathbf{a}^{11}(s) + \mathbf{a}^{10}(s)) - \kappa \mathbf{1}) + \int_t^s \mathbf{A}_3(t, y) \text{diag}(\mathbf{a}^{20}(y) \mathbf{a}^{22}(y)) \\ & \times \mathbf{A}_4(y, s) (\text{diag}(\mathbf{L}_1)(\mathbf{a}^{11}(s) + \mathbf{a}^{10}(s) + \mathbf{a}^{12}(s)) - \kappa \mathbf{1}) dy) ds, \end{aligned}$$

$\mathbf{A}_2(t, s)$ 和 $\mathbf{L}_1$ 由命题 5.1 中给出.

特别地,

$$P_{\tau_0} = 1_{\{\tau_0 \leq \tau_0, \tau_1 > \tau_0, \tau_2 > \tau_0\}} P_{\tau_0} \triangleq 1_{\{\tau_0 \leq \tau_0, \tau_1 > \tau_0, \tau_2 > \tau_0\}} \bar{P}_{\tau_0}.$$

证明 利用引理 5.1 和 3.1 可得

$$\begin{aligned} & 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} \kappa E_t \left[\int_t^T 1_{\{\tau_1 > s\}} e^{-\int_t^s r_v dv} ds \right] \\ &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} \kappa \int_t^T \left(E[e^{-\int_t^s (r_v + a_v^{11} + a_v^{10} + a_v^{20} + a_v^{22}) dv} | \mathfrak{S}_t^X] \right. \\ & \quad \left. + \int_t^s E[(a_y^{22} + a_y^{20}) e^{-\int_t^y (r_v + a_v^{10} + a_v^{11} + a_v^{20} + a_v^{22}) dv - \int_y^s (r_v + a_v^{12} + a_v^{10} + a_v^{11}) dv} | \mathfrak{S}_t^X] dy \right) ds. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} & E[(a_y^{22} + a_y^{20}) e^{-\int_t^y (r_v + a_v^{10} + a_v^{11} + a_v^{20} + a_v^{22}) dv - \int_y^s (r_v + a_v^{12} + a_v^{10} + a_v^{11}) dv} | \mathfrak{S}_t^X] \\ &= E[(a_y^{22} + a_y^{20}) e^{-\int_t^y (r_v + a_v^{10} + a_v^{11} + a_v^{20} + a_v^{22}) dv} E[e^{-\int_y^s (r_v + a_v^{12} + a_v^{10} + a_v^{11}) dv} | \mathfrak{S}_y^X] | \mathfrak{S}_t^X] \\ &= E[e^{-\int_t^y (r_v + a_v^{10} + a_v^{11} + a_v^{20} + a_v^{22}) dv} \langle \text{diag}(\mathbf{a}^{20}(y) + \mathbf{a}^{22}(y)) \mathbf{A}_4(y, s) \mathbf{1}, X_y \rangle | \mathfrak{S}_t^X] \\ &= \langle \mathbf{A}_3(t, y) \text{diag}(\mathbf{a}^{20}(y) + \mathbf{a}^{22}(y)) \mathbf{A}_4(y, s) \mathbf{1}, X_t \rangle dy, \end{aligned}$$

以及

$$E[e^{-\int_t^s (r_v + a_v^{11} + a_v^{10} + a_v^{20} + a_v^{22}) dv} | \mathfrak{S}_t^X] = \langle \mathbf{A}_3(t, s) \mathbf{1}, X_t \rangle.$$

因此,

$$\begin{aligned} & 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} \kappa E_t \left[\int_t^T 1_{\{\tau_1 > s\}} e^{-\int_t^s r_v dv} ds \right] \\ &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} \kappa \left(\int_t^T \langle \mathbf{A}_3(t, s) \mathbf{1}, X_t \rangle + \langle \mathbf{A}_3(t, y) \text{diag}(\mathbf{a}^{20}(y) + \mathbf{a}^{22}(y)) \mathbf{A}_4(y, s) \mathbf{1}, X_t \rangle dy \right) ds. \end{aligned}$$

类似地, $[t, T]$ 区间内的期望折现损失支付为

$$1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} E_t[(1 - R_1(\tau_1)) e^{-\int_t^{\tau_1} r_v} 1_{\{t < \tau_1 \leq T\}}]$$

$$\begin{aligned}
 &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} E_t \left[\int_t^T (1 - R_1(s)) e^{-\int_t^s r_v} 1_{\{\tau_1 > s\}} dH_s^1 \right] \\
 &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} \int_t^T E_t [e^{-\int_t^s r_v} 1_{\{\tau_1 > s, \tau_2 > s\}} (1 - R_1(s)) (a_s^{11} + a_s^{10})] ds \\
 &\quad + 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} \int_t^T E_t [e^{-\int_t^s r_v} 1_{\{\tau_1 > s, t < \tau_2 \leq s\}} (1 - R_1(s)) (a_s^{11} + a_s^{10} + a_s^{12})] ds \\
 &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} \left(\int_t^T E [e^{-\int_t^s (r_v + a_v^{11} + a_v^{10} + a_v^{20} + a_v^{22})} dv (1 - R_1(s)) (a_s^{11} + a_s^{10}) | \mathfrak{F}_t^X] ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_t^T \int_t^s E [(a_y^{22} + a_y^{20}) e^{-\int_t^y (r_v + a_v^{11} + a_v^{10} + a_v^{20} + a_v^{22})} dv - \int_y^s (r_v + a_v^{12} + a_v^{10} + a_v^{11}) dv \right. \\
 &\quad \left. \times (1 - R_1(s)) (a_s^{11} + a_s^{10} + a_s^{12}) | \mathfrak{F}_t^X] dy ds \right) \\
 &= 1_{\{\tau_0 \leq t, \tau_1 > t, \tau_2 > t\}} \int_t^T \left(\langle \mathbf{A}_3(t, s) \text{diag}(\mathbf{L}_1)(\mathbf{a}^{11}(s) + \mathbf{a}^{10}(s)), X_t \rangle + \int_t^s \langle \mathbf{A}_3(t, y) \right. \\
 &\quad \left. \times \text{diag}(\mathbf{a}^{20}(y) + \mathbf{a}^{22}(y)) \mathbf{A}_4(y, s) \text{diag}(\mathbf{L}_1)(\mathbf{a}^{11}(s) + \mathbf{a}^{10}(s) + \mathbf{a}^{12}(s)), X_t \rangle dy \right) ds,
 \end{aligned}$$

其中第二个等式成立是由于 $H_s^1 - \int_0^{t \wedge \tau_1} \lambda_s^1 ds$ 是一个 $\mathfrak{F}$ -鞅, 第三个等式是由引理 5.1 得到的. 则由定义 2.1 即可得出结论. $\square$

命题 5.3 在事件 $\{\tau_0 > t, \tau_1 > t, \tau_2 \leq t\}$ 发生的条件下, 公平保费率为 κ 的无对手风险的 CDS 合同的价格具有如下的表达式:

$$1_{\{\tau_0 > t, \tau_1 > t, \tau_2 \leq t\}} P_t = 1_{\{\tau_0 > t, \tau_1 > t, \tau_2 \leq t\}} \langle \nu_t, X_t \rangle \triangleq 1_{\{\tau_0 > t, \tau_1 > t, \tau_2 \leq t\}} \hat{P}_t,$$

其中

$$\begin{aligned}
 \nu_t &= \int_t^T \left(\mathbf{A}_2(t, s) (\text{diag}(\mathbf{L}_1)(\mathbf{a}^{11}(s) + \mathbf{a}^{12}(s)) - \kappa \mathbf{1}) + \int_t^s \mathbf{A}_2(t, y) \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(y) + \mathbf{a}^{02}(y)) \right. \\
 &\quad \left. \times \mathbf{A}_4(y, s) (\text{diag}(\mathbf{L}_1)(\mathbf{a}^{11}(s) + \mathbf{a}^{10}(s) + \mathbf{a}^{12}(s)) - \kappa \mathbf{1}) dy \right) ds,
 \end{aligned}$$

$\mathbf{A}_2(t, s)$ 和 $\mathbf{L}_1$ 由命题 5.1 中给出.

特别地,

$$P_{\tau_2} = 1_{\{\tau_2 \leq \tau_2, \tau_0 > \tau_2, \tau_1 > \tau_2\}} P_{\tau_0} \triangleq 1_{\{\tau_2 \leq \tau_2, \tau_0 > \tau_2, \tau_1 > \tau_2\}} \hat{P}_{\tau_0}.$$

证明 证明类似于命题 5.2 的证明. 利用引理 5.1 和引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}
 &1_{\{\tau_2 \leq t, \tau_1 > t, \tau_0 > t\}} \kappa E_t \left[\int_t^T 1_{\{\tau_1 > s\}} e^{-\int_t^s r_v} dv ds \right] \\
 &= 1_{\{\tau_2 \leq t, \tau_1 > t, \tau_0 > t\}} \kappa \int_t^T \left(E [e^{-\int_t^s (r_v + a_v^{11} + a_v^{12} + a_v^{00} + a_v^{02})} dv | \mathfrak{F}_t^X] \right. \\
 &\quad \left. + \int_t^s E [(a_y^{00} + a_y^{02}) e^{-\int_t^y (r_v + a_v^{00} + a_v^{02} + a_v^{11} + a_v^{10})} dv - \int_y^s (r_v + a_v^{10} + a_v^{11} + a_v^{10}) dv | \mathfrak{F}_t^X] dy \right) ds \\
 &= 1_{\{\tau_2 \leq t, \tau_1 > t, \tau_0 > t\}} \kappa \int_t^T \left(\langle \mathbf{A}_2(t, s) \mathbf{1}, X_t \rangle + \int_t^s \langle \mathbf{A}_2(t, y) \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(y) + \mathbf{a}^{02}(y)) \mathbf{A}_4(y, s) \mathbf{1}, X_t \rangle dy \right) ds.
 \end{aligned}$$

在 $[t, T]$ 区间内的期望折现损失支付为

$$\begin{aligned}
 & 1_{\{\tau_2 \leq t, \tau_1 > t, \tau_0 > t\}} E_t[(1 - R_1(\tau_1))e^{-\int_t^{\tau_1} r_v} 1_{\{t < \tau_1 \leq T\}}] \\
 &= 1_{\{\tau_2 \leq t, \tau_1 > t, \tau_0 > t\}} E_t \left[\int_t^T (1 - R_1(s))e^{-\int_t^s r_v} 1_{\{\tau_1 > s\}} dH_s^1 \right] \\
 &= 1_{\{\tau_2 \leq t, \tau_1 > t, \tau_0 > t\}} \int_t^T E_t[e^{-\int_t^s r_v} dv 1_{\{\tau_1 > s\}} (1 - R_1(s))(a_s^{11} + a_s^{12} + a_s^{10} 1_{\{\tau_0 \leq s\}})] ds \\
 &= 1_{\{\tau_2 \leq t, \tau_1 > t, \tau_0 > t\}} \int_t^T E_t[e^{-\int_t^s r_v} dv 1_{\{\tau_1 > s, \tau_0 > s\}} (1 - R_1(s))(a_s^{11} + a_s^{12})] ds \\
 &\quad + 1_{\{\tau_2 \leq t, \tau_1 > t, \tau_0 > t\}} \int_t^T E_t[e^{-\int_t^s r_v} dv 1_{\{\tau_1 > s, t < \tau_0 \leq s\}} (1 - R_1(s))(a_s^{11} + a_s^{10} + a_s^{12})] ds \\
 &= 1_{\{\tau_2 \leq t, \tau_1 > t, \tau_0 > t\}} \left(\int_t^T \langle \mathbf{A}_2(t, s) \text{diag}(\mathbf{L}_1)(\mathbf{a}^{11}(s) + \mathbf{a}^{12}(s)), X_t \rangle ds + \int_t^s \langle \mathbf{A}_2(t, y) \right. \\
 &\quad \left. \times \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(y) + \mathbf{a}^{02}(y)) \mathbf{A}_4(y, s) \text{diag}(\mathbf{L}_1)(\mathbf{a}^{11}(s) + \mathbf{a}^{10}(s) + \mathbf{a}^{12}(s)), X_t \rangle dy \right) ds.
 \end{aligned}$$

则由定义 2.1 立得结论. $\square$

为了简便起见, 对每一 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)^* \in \mathbb{R}^N$, 记 $\mathbf{a}^+ = (a_1^+, \dots, a_N^+)^*$, $\mathbf{a}^- = (a_1^-, \dots, a_N^-)^*$.

命题 5.4 在事件 $\{\tau_0 \wedge \tau_2 > t\}$ 发生的条件下,

$$\begin{aligned}
 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_2 > t\}} \text{CVA}_t &= 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 > t\}} \int_t^T \langle \mathbf{A}_1(t, s) \text{diag}(\mathbf{a}^{22}(s)) \text{diag}(\mathbf{L}_2) \boldsymbol{\nu}_s^+ \\
 &\quad - \mathbf{A}_1(t, s) \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(s)) \text{diag}(\mathbf{L}_0) \boldsymbol{\mu}_s^-, X_t \rangle ds,
 \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{L}_2 = \mathbf{1} - \mathbf{R}_2 \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{A}_1(t, s)$ 由命题 5.1 中给出以及 $\boldsymbol{\mu}_s$ 由命题 5.2 中给出.

特别地,

$$\text{CVA}_0 = \int_0^T \langle \mathbf{A}_1(0, s) \text{diag}(\mathbf{a}^{22}(s)) \text{diag}(\mathbf{L}_2) \boldsymbol{\nu}_s^+ - \mathbf{A}_1(0, s) \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(s)) \text{diag}(\mathbf{L}_0) \boldsymbol{\mu}_s^-, X_0 \rangle ds.$$

证明 由命题 2.1 知,

$$\begin{aligned}
 & 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_2 > t\}} \text{CVA}_t \\
 &= 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_2 > t\}} E_t[(1 - R_2(s))e^{-\int_t^s r_v} dv \hat{P}_s^+ 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 > s\}} dH_s^2] \\
 &\quad - 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_2 > t\}} E_t[(1 - R_0(s))e^{-\int_t^s r_v} dv \bar{P}_s^- 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 > s\}} dH_s^0] \\
 &= 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 > t\}} E_t \left[\int_t^T e^{-\int_t^s r_v} dv (1 - R_2(s)) \hat{P}_s^+ 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 > s\}} a_s^{22} ds \right] \\
 &\quad - 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 > t\}} E_t \left[\int_t^T e^{-\int_t^s r_v} dv (1 - R_0(s)) \bar{P}_s^- 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 > s\}} a_s^{00} ds \right] \\
 &= 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 > t\}} \int_t^T E[e^{-\int_t^s (r_v + a_v^{00} + a_v^{11} + a_v^{22}) dv} \langle \text{diag}(\mathbf{a}^{22}(s)) \text{diag}(\mathbf{L}_2) \boldsymbol{\nu}_s^+, X_s \rangle | \mathfrak{F}_t^X] ds \\
 &\quad - 1_{\{\tau_0 \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 > t\}} \int_t^T E[e^{-\int_t^s (r_v + a_v^{00} + a_v^{11} + a_v^{22}) dv} \langle \text{diag}(\mathbf{a}^{00}(s)) \text{diag}(\mathbf{L}_0) \boldsymbol{\mu}_s^-, X_s \rangle | \mathfrak{F}_t^X] ds,
 \end{aligned}$$

其中第二个等式成立是因为 $H_t^i - \int_0^{\tau_i \wedge t} \lambda_s^i ds$ 是一个 $\mathfrak{S}$ -鞅, 最后一个等式是由命题 4.1、5.2 和 5.3 得到的. 则由引理 3.1 立得结论. $\square$

图 1 κ 与 q 的关系 图 2 CVA_0 与 q 的关系 图 3 CVA_0 与 q 的关系, 对较大的 a^{12}

6 数值结果

在本节中, 我们将做一些数值计算来阐述我们的理论结果. 为了简便起见, 我们考虑 $N = 2$, 也就是 X 仅在两个状态间转换, 其中状态 e_1 和状态 e_2 分别表示好的经济状态和坏的经济状态. 若非特别说明以下参数在计算过程中保持不变:

$$\begin{aligned} T &= 10, \quad \mathbf{r} = (0.05, 0.02)^*, \quad \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = (0.6, 0.2)^*, \\ \mathbf{a}^{00}(t) &= (0.01, 0.05)^*, \quad \mathbf{a}^{11}(t) = \mathbf{a}^{22}(t) = (0.01, 0.05)^*, \\ \mathbf{a}^{ij}(t) &= (0.002, 0.01)^*, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

假设

$$q_{11} = q_{22} = -q.$$

图 1 呈现了保费率和 q 之间的关系. 由图 1 可见, 当初始经济状态为 e_2 时, 公平保费率比较高. 进一步可见, 当初始经济状态为 e_1 时, 公平保费率随着 q 的增加而增大, 这是因为较大的 q 意味着好的经济状态转换为坏的经济状态的可能性更大. 而当初始经济状态为 e_2 时, 公平保费率随着 q 的增加而减小, 这是因为较大的 q 意味着坏的经济状态转换为好的经济状态的可能性更大.

图 2 描述了 q 对 CVA_0 的影响. 由图 2 可见, 当初始经济状态为 e_2 时, CVA 在 0 时刻的值比较大. 图 3 刻画了 $\mathbf{a}^{ij}, i \neq j$ 对 CVA_0 的影响. 由图 3 可见, CVA_0 随着 $\mathbf{a}^{ij}, i \neq j$ 的增加而增加, 这是因

为当 $\alpha^{ij}, i \neq j$ 增大时, 违约相关性也相应增加从而信用估值调整也随之增大了. 因此, 数值结果说明经济环境的转换对公平保费率和 CVA 的影响是非常显著的, 在信用风险建模中我们应该考虑到经济环境转换的影响.

7 结论

本文考虑了一个马氏调制的、相互作用的强度模型, 该模型假设所有公司的违约强度均受一马氏链的影响, 并且当某一公司发生违约时, 其他公司的违约强度将会发生改变. 进一步, 假设利率和违约时的回复率也是马氏调制的. 一般而言, 在随机强度模型下很难给出 CDS 合同的信用估值调整的闭型公式. 然而在我们所考虑的马氏调制的定价模型下, 无对手信用风险的公平保费率以及 CDS 合同的双边 CVA 可以表示为线性常微分方程组的基本解的形式. 因此, 我们所考虑的模型更容易操作. 数值结果说明考虑马氏调制的影响在对手风险的定价中有着非常重要的意义.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见与建议.

参考文献

- 1 Gregory J. Counterparty Credit Risk: The New Challenge for Global Financial Markets. New York: Wiley, 2010
- 2 Cesari G, Aquilina J, Niels Charpillon N, et al. Modelling, Pricing, and Hedging Counterparty Credit Exposure: A Technical Guide. Berlin: Springer-Verlag, 2010
- 3 Tang Y, Li B. Quantitative Analysis, Derivatives Modeling, and Trading Strategies. Singapore: World Scientific, 2006
- 4 Bao Q F, Chen S, Li S D. Unilateral CVA for CDS in Contagion Model: with Volatilities and correlation of spread and interest. Econ Model, 2012, 29: 471–477
- 5 Dong Y H, Yuen K C, Wu C F. Unilateral counterparty risk valuation of CDS using a regime-switching intensity model. Statist Probab Lett, 2014, 85: 25–35
- 6 Jarrow R, Yu, F. Counterparty risk and the pricing of defaultable securities. J Finance, 2001, 56: 1765–1799
- 7 Yu F. Correlated defaults in intensity-based models. Math Financ, 2007, 17: 155–173
- 8 Collin-Dufresne P, Goldstein R, Hugonnier J. A general formula for valuing defaultable securities. Econometrica, 2004, 72: 1377–1407
- 9 Bremaud P. Point Processes and Queues: Martingale Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1981
- 10 Giesecke K, Longstaff F A, Schaefer S, et al. Corporate bond default risk: A 150-year perspective. J Financ Econ, 2011, 102: 233–250
- 11 Buffington J, Elliott R J. American options with regime switching. Int J Theor Appl Financ, 2002, 5: 497–514
- 12 Elliott R J, Siu T K. Robust optimal portfolio choice under Markovian regime-switching model. Methodol Comput Appl Probab, 2009, 11: 145–157
- 13 Ma J, Yun Y Y. Correlated intensity, counter party risks, and dependent mortalities. Insurance Math Econom, 2010: 47, 337–351

CVA calculation for CDS under a contagion model with regime-switching intensities

DONG YingHui

Abstract This paper considers the bilateral credit valuation adjustment (CVA) of a credit default swap (CDS) under a contagion model with regime-switching intensities, where the interest rate, the recovery, and the default intensities of the investor, the protection seller and the reference entity are all driven by a continuous-time homogenous Markov chain describing the macro-economy. By using the idea of “change of measure” and some formulas for the Laplace transforms of the cumulated intensities, we obtain the formula for the bilateral CVA of

a CDS contract in terms of fundamental matrix solutions of linear, matrix-valued, ordinary differential equations. Based on the results, we perform some numerical experiments to examine how the regime-switching and the default dependence affect the bilateral CVA.

Keywords bilateral credit valuation adjustment, interacting default intensities, regime-switching

MSC(2010) 60G46, 60J27

doi: 10.1360/012014-65