基于POD模型降阶法的非线性瞬态热传导分析

梁钰¹, 郑保敬^{2*}, 高效伟^{1,3}, 吴泽艳², 王峰^{2,4}

1. 大连理工大学航空航天学院, 大连 116024;

2. 三峡大学水利与环境学院, 宜昌 443002;

3. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024;

4. 三峡大学湖北省水电工程施工与管理重点实验室, 宜昌 443002

*联系人, E-mail: zheng_bj@126.com

收稿日期: 2018-05-23; 接受日期: 2018-07-27; 网络出版日期: 2018-10-09

国家自然科学基金(编号: 11602129, 11672061)资助项目

摘要 本文结合特征正交分解(Proper Orthogonal Decomposition, POD)模型降阶法和有限元法, 提出一种求解物性参数随温度变化的非线性瞬态热传导问题的快速算法. 该方法利用简单线性问题的POD基底, 快速计算复杂非线性问题, 具有很高的工程应用价值. 首先, 对结构的线性瞬态热传导问题进行分析, 在实验数据或数值方法计算结果的基础上, 选取一些时刻结构的温度场构成瞬像矩阵, 并对瞬像矩阵进行特征正交分解获得一组最优POD基底; 其次, 利用线性问题的POD基底对非线性瞬态热传导问题的有限元离散格式进行降阶分析, 得到非线性瞬态热传导问题降阶模型的低阶常微分方程组; 最后, 通过求解降阶模型的常微分方程组获得结构各个时刻温度场的分布情况. 文中通过几个数值算例验证了本文方法的有效性, 计算结果表明本文方法具有良好的计算精度, 并且计算效率能提高1–2个数量级.

关键词 特征正交分解, 模型降阶, 非线性瞬态热传导, POD基底, 瞬像矩阵

PACS: 44.05.+e, 02.70.Dh, 02.10.Yn

1 引言

材料物性参数随温度变化引起的非线性热传导问题在工程实践中普遍存在. 由于这类问题的复杂性, 对该类问题的求解主要依赖于数值模拟的方法. 目前, 一些常用的数值方法, 如有限元法、无网格法、边界元法等, 在求解非线性热传导问题中得到了广泛的应用^[1–9]. 然而在航空航天、核工程以及金属加工等领域

与热传导有关的一些工程问题中需要对结构的温度进行实时控制和快速预测. 上述数值方法在求解这类大型、复杂系统时, 因离散格式中自由度太大需要耗费大量计算时间和计算资源, 不能满足实时控制和快速预测的要求. 基于特征正交分解(POD)模型降阶法是实现这一目标的有效方法之一^[10–12].

POD模型降阶法旨在从一组已有的实验数据或数值仿真结果中提取问题的一组解基底, 将原问题的解

引用格式: 梁钰, 郑保敬, 高效伟, 等. 基于POD模型降阶法的非线性瞬态热传导分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 124603
Liang Y, Zheng B J, Gao X W, et al. Reduced order model analysis method via proper orthogonal decomposition for nonlinear transient heat conduction problems (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2018, 48: 124603, doi: 10.1360/SSPMA2018-00199

用基底线性表示, 可以将原问题含有成千上万自由度的系统离散模型降为只含几十个甚至几个自由度的低维模型^[10]. 因此, 该方法在保证计算结果满足精度要求的同时能极大地降低计算成本. 近年来, POD模型降阶法已经在流体力学、结构动力学、最优控制、热传导等领域得到了广泛的应用^[13-31].

在与热传导模型降阶法的相关研究中, Zhang和Xiang^[25]结合无网格法和POD方法建立了线性瞬态热传导问题的降阶模型, 不仅保持了无网格法的计算精度, 更是显著提高了计算效率; Fic等人^[23]结合有限元法和POD方法建立了非线性瞬态热传导问题的降阶模型, 利用非线性热传导问题前若干时间步的计算结果构建POD基底, 并利用POD模型降阶法的外推能力获得了令人满意的计算结果, 但在构造POD基底时需要耗费大量计算时间; 胡金秀等人^[27]结合有限元法和POD方法建立了线性瞬态热传导问题的降阶模型, 并利用常数边界条件获得的POD基底对时变边界条件的瞬态热传导问题进行模型降阶分析, 该方法不仅具有很好的外推能力, 还可以快速准确地预测边界条件随时间变化时温度场的分布情况, 拓宽了POD模型降阶法的实际应用范围. 目前, POD模型降阶法主要应用其外推能力进行快速分析, 该方法能显著提高大规模线性瞬态热传导问题的计算效率, 但对于非线性瞬态热传导问题的计算效率提升并不明显. 其主要原因是建立POD基底所需的温度场来自非线性热传导问题前若干时间步的数值计算结果, 而传统数值方法在计算大规模非线性瞬态热传导问题过程中需要耗费大量的计算时间, 因此在建立POD基底时需要花费较大的计算量, 从而影响POD模型降阶法的整体计算效率.

本文在前人工作的基础上, 提出一种用线性瞬态热传导问题建立的POD基底计算物性参数随温度变化的非线性瞬态热传导问题的模型降阶法. 该方法通过实验数据或数值方法计算线性瞬态热传导问题的温度场建立POD基底, 用该基底对非线性瞬态热传导问题进行模型降阶分析; 并且对于边界条件类型相同的非线性热传导问题, 当边界条件和初始条件发生变化时不需要重新计算POD基底, 因此该方法能极大地提高非线性瞬态热传导问题的计算效率. 这在材料温度会发生大范围变化的航空航天等领域需要实时温度控制与快速计算中具有重要的工程应用价值和广阔的应用前景.

2 非线性瞬态热传导问题的有限元法

2.1 控制方程

考虑物性参数随温度变化的非线性瞬态热传导问题, 在求解域 Ω 内其控制方程为

$$\rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + Q. \quad (1)$$

边界条件:

$$T = T, \text{ (在 } \Gamma_1 \text{ 边界上)}, \quad (2)$$

$$-k(T)\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \bar{q}, \text{ (在 } \Gamma_2 \text{ 边界上)}, \quad (3)$$

$$-k(T)\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = h(T - T_a), \text{ (在 } \Gamma_3 \text{ 边界上)}. \quad (4)$$

初始条件:

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}), \quad (5)$$

式中, $\rho(T)$ 和 $c(T)$ 分别为材料的密度和比热容; $k(T)$ 为热传导系数; T 为温度场; Q 为热源密度; $\mathbf{n}$ 为边界外法线向量; T 为给定的温度; $\bar{q}$ 为给定的热流密度; h 为换热系数; T_a 为外界环境温度.

2.2 有限元离散格式

对于二维非线性瞬态热传导问题, 其有限元法离散格式为

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{F}, \quad (6)$$

式中, $\mathbf{T}$ 为节点温度列向量, $\mathbf{C}$ 为热容矩阵, $\mathbf{K}$ 为热传导矩阵, $\mathbf{F}$ 为温度载荷向量. $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{F}$ 由各单元相应的阵列元素组集而成具体如下:

$$C_{ij} = \sum C_{ij}^e, K_{ij} = \sum K_{ij}^e, F_i = \sum F_i^e, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} C_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} \rho c N_i N_j d\Omega, \\ K_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} \left(k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma_3^e} h N_i N_j d\Gamma, \\ F_i^e &= \int_{\Omega^e} Q N_i d\Omega + \int_{\Gamma_2^e} \bar{q} N_i d\Gamma + \int_{\Gamma_3^e} h T_a N_i d\Gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

在计算矩阵 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{K}$ 时, 由于 ρ , c 和 k 都是关于温度的函数, 因此, 式(6)是一个非线性的微分方程组, 其可写为

$$\mathbf{C}(\mathbf{T})\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}(\mathbf{T})\mathbf{T} = \mathbf{F}. \quad (9)$$

2.3 非线性方程组的求解

式(9)中系数矩阵 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{K}$ 都是关于未知量温度 $\mathbf{T}$ 的函数, 因此它们随着时间变化而变化. 通过加权差分法可以将时间域离散为若干个时间步, 在每个时间步长 Δt 内, 对 $(t+\Delta t)$ 点建立差分格式:

$$T_{t+\theta\Delta t} = \theta T_{t+\Delta t} + (1-\theta)T_t, \quad (10)$$

$$\frac{\partial T_{t+\theta\Delta t}}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}(T_{t+\Delta t} - T_t). \quad (11)$$

将式(10)和(11)代入式(9), 可得到一般形式的两点差分格式:

$$\left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}(\mathbf{T}_{t+\theta\Delta t}) + \theta \mathbf{K}(\mathbf{T}_{t+\theta\Delta t}) \right] \mathbf{T}_{t+\Delta t} = \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}(\mathbf{T}_{t+\theta\Delta t}) - (1-\theta) \mathbf{K}(\mathbf{T}_{t+\theta\Delta t}) \right] \mathbf{T}_t + \mathbf{F}_{t+\Delta t}, \quad (12)$$

式中, 参数 θ 为加权系数, 不同的参数值对应不同的差分格式:

$\theta=0$, 向前差分格式,

$\theta=1$, 向后差分格式,

$\theta=1/2$, Crank-Nicolson格式,

$\theta=2/3$, Galerkin格式.

本文采用向前差分格式, 而向前差分格式为显示离散格式, 因此, 式(12)可简化为

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}(\mathbf{T}_t) \mathbf{T}_{t+\Delta t} = \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}(\mathbf{T}_t) - \mathbf{K}(\mathbf{T}_t) \right] \mathbf{T}_t + \mathbf{F}_{t+\Delta t}. \quad (13)$$

经过以上步骤, 可将一个非线性微分方程组化为分段线性的代数方程组. 利用式(13), 从 $t=0$ 开始, 依次递推可以求得各个时刻节点的温度值.

3 特征正交分解模型降阶法

3.1 瞬像矩阵的生成

瞬像(Snapshots), 也称快照. 根据Sirovich提出的快照方法, 令 $\mathbf{T}$ 为模型的温度场变量, 在指定的 M 个时间点处, 取温度场的集合 A :

$$A = \{\mathbf{T}(t_1), \mathbf{T}(t_2), \dots, \mathbf{T}(t_M)\}, \quad (14)$$

其中,

$$\mathbf{T}(t) = \begin{pmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ \vdots \\ T_N(t) \end{pmatrix}$$

表示 t 时刻计算模型的 N 个网格节点处的温度值, 其数值可能来自模型的数值模拟结果, 或者来自实际物理过程的观测数据或实验结果. 称 $\mathbf{A}$ 为计算模型的瞬像矩阵, 其维数为 $N \times M$.

3.2 POD基底的获取

POD基底又称POD模态. 对于结构离散模型的节点上任意时刻的温度可以用一组POD基底线性组合表示, 如:

$$\mathbf{T}(t) = \alpha_1(t)\boldsymbol{\phi}_1 + \alpha_2(t)\boldsymbol{\phi}_2 + \dots + \alpha_r(t)\boldsymbol{\phi}_r, \quad (15)$$

式中, $\boldsymbol{\phi}_i$ 和 α_i , $i=1, 2, \dots, r$ 分别为POD基底及其对应的系数. 为了获得满足式(15)的POD基底, 当 $M \ll N$ 时, 定义相关矩阵 $\mathbf{R}$ 为

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \in R^{M \times M}. \quad (16)$$

求相关矩阵 $\mathbf{R}$ 的特征值及特征向量, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\boldsymbol{\phi}_j &= \sigma_j^2 \boldsymbol{\phi}_j, j = 1, 2, \dots, l, \\ l &\leq M, \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_l^2 > 0, \end{aligned} \quad (17)$$

式中, σ_j^2 为特征值, $\boldsymbol{\phi}_j$ 为对应的特征向量. 则POD基底可表示为

$$\boldsymbol{\phi}_j = \frac{1}{\sigma_j} \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}_j, j = 1, 2, \dots, l, l \leq M. \quad (18)$$

很容易证明 $\boldsymbol{\phi}_j(j=1, 2, \dots, l)$ 是一组标准正交基, 即它们满足

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \cdot \boldsymbol{\phi}_j = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (19)$$

在计算过程中, 通常只取前 r 个基底进行模型降阶分析, r 的选取规则为

$$r = \operatorname{argmin} \left\{ I(r) : I(r) \geq \frac{\gamma}{100} \right\}, \quad (20)$$

其中,

$$I(r) = \frac{\sum_{j=1}^r \sigma_j}{\sum_{j=1}^l \sigma_j}. \quad (21)$$

一般取 $\gamma=99.99$.

3.3 POD模型降阶分析

在非线形热传导问题中, 节点上任意时刻的温度可以用POD基底表示为如式(15)所示的线性组合, 记 $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_r]$, 则 $\Phi \in R^{N \times r}$, 称 Φ 为基底矩阵. 令 $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_r]^T$, 式(15)又可表示为

$$\mathbf{T} = \Phi \alpha. \quad (22)$$

将式(22)代入式(9), 得

$$\mathbf{C}(\mathbf{T})\Phi \dot{\alpha} + \mathbf{K}(\mathbf{T})\Phi \alpha = \mathbf{F}. \quad (23)$$

式(23)两边同时乘以 Φ^T , 得到

$$\Phi^T \mathbf{C}(\mathbf{T})\Phi \dot{\alpha} + \Phi^T \mathbf{K}(\mathbf{T})\Phi \alpha = \Phi^T \mathbf{F}. \quad (24)$$

式(24)可写为

$$\tilde{\mathbf{C}} \dot{\alpha} + \tilde{\mathbf{K}} \alpha = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (25)$$

其中,

$$\tilde{\mathbf{C}} = \Phi^T \mathbf{C}(\mathbf{T})\Phi, \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \Phi^T \mathbf{K}(\mathbf{T})\Phi, \quad (27)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \Phi^T \mathbf{F}. \quad (28)$$

式(25)即为原问题的降阶模型. 待求解的未知量已转化为待定系数 α , 跟原问题相比, 未知量的自由度由 N 降为 M , 大大减小了求解问题的规模. 降阶模型的初始条件为

$$\alpha(0) = \Phi^T \mathbf{T}_0. \quad (29)$$

求解降阶模型的方程组式(25), 可得到各个时刻的系数值 α , 将其代入式(22)即可得到原问题所求的各个节点处温度值.

4 数值算例

4.1 算例1: 方板的一维瞬态热传导问题

如图1所示, 边长为1 m×1 m的金属方板, 在常温条件下方板的材料参数为: 密度 $\rho=7850 \text{ kg/m}^3$, 比热容 $c=400 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, 导热系数 $k=350 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. 如果考虑温度对材料参数的影响时, 假设导热系数随温度发生变化 $k=350(0.01T+0.5) \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. 方板初始时刻的温度为 0°C , 板的上端和下端为绝热边界, 板的右端的

图1 方板的几何模型

Figure 1 Geometric model of square plate.

温度保持为 $T_1=0^\circ\text{C}$, 左端的温度随着时间变化 $T_2=100(1-\cos(\pi t/1000))^\circ\text{C}$.

方板的有限元法计算模型如图2所示, 该模型包含2500个四边形线性单元, 共2601个节点. 在有限元法计算过程中时间步长取 $\Delta t=2 \text{ s}$. 图3和4为方板3个参考点A(0.1, 0.5), B(0.5, 0.5)和C(0.8, 0.5)处的温度随时间的变化, 其中图3为线性热传导问题的计算结果, 图4为考虑材料参数随温度变化的非线性热传导问题的计算结

图2 (网络版彩图)方板的有限元法计算模型

Figure 2 (Color online) FEM computational model of square plate.

图 3 (网络版彩图)线性热传导问题参考点处温度随时间的变化

Figure 3 (Color online) Variation with time of temperature at reference points of linear heat conduction problem.

图 4 (网络版彩图)非线性热传导问题参考点处温度随时间的变化

Figure 4 (Color online) Variation with time of temperature at reference points of nonlinear heat conduction problem.

果.从图中可以看出,考虑材料参数受温度影响和不考虑材料参数受温度影响时,方板的温度场分布情况区别比较明显.

为了快速计算非线性热传导问题,从已有的计算结果中选取若干时刻的温度场构造瞬像矩阵,通过特征正交分解获取一组基底,然后进行模型降阶分析.分别从上述线性问题和非线性问题的计算结果中各自选取 $t=100, 200, \dots, 1500$ s共计15个时刻方板的温度值构成瞬像矩阵 $\mathbf{A}$,代入式(16)–(18)可得到相关矩阵的特征值和特征向量.图5为线性热传导问题和非线性热传导问题的特征值分布的对比情况,由式(21)可知,对于线性热传导问题,当 $r=4$ 时, $I(4)=99.9994\%$;而对于非

图 5 (网络版彩图)特征值的分布情况

Figure 5 (Color online) Distribution of eigenvalue.

线性热传导问题,当 $r=4$ 时, $I(4)=99.9961\%$.因此本算例中取前4阶POD基底进行模型降阶分析.

分别用上述两种POD基底对方板的非线性热传导问题进行分析,其计算结果和有限元法计算结果的对比如图6所示.从图中可以看出,用线性热传导问题构造的POD基底和用非线性热传导问题构造的POD基底获得的计算结果均和有限元法计算的结果吻合得很好.但是在构造POD基底时,用线性问题的结果构造瞬像矩阵时花费的计算时间为1.67 s,而非线性问题的结果构造瞬像矩阵时花费的计算时间为49.53 s.因此,用线性热传导问题的计算结果构造POD基底对非线性热传导问题进行模型降阶分析时的计算效率更高.在后续算例中均采用线性热传导问题的计算结构构造POD基底进行模型降阶分析.

图 6 (网络版彩图)非线性热传导问题参考点处温度随时间的变化

Figure 6 (Color online) Variation with time of temperature at reference points of nonlinear heat conduction problem.

4.2 算例2: 方板的二维瞬态热传导问题

考虑算例1中的金属方板, 假设初始时刻板的温度为 0°C . 板的上端、下端和右端的温度固定为 0°C , 左端的温度突然升至 100°C . 用有限元法计算方板线性热传导问题的温度场, 取 $t=100, 200, \dots, 1500\text{ s}$ 共计15个时刻方板的温度值构成瞬像矩阵 $\mathbf{A}$, 将其代入式(16)–(18)可得到相关矩阵的特征值和特征向量. 图7为特征值的分布情况, 由式(21)可知当 $r=4$ 时, $I(4)=99.9991\%$, 因此本算例中取前4阶POD基底进行模型降阶分析.

考虑方板的物性参数随温度变化时, 取上述线性热传导问题获得的前4阶POD基底, 用POD模型降阶法分析该方板的非线性热传导问题. 假设方板的导热系数为 $k=350(1-0.0005T)\text{ W m}^{-1}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, 初始温度为 0°C ; 方板的上端、下端和右端的温度固定为 0°C , 左端的温度随时间变化 $T=t\text{e}^{-\frac{t}{1000}}\text{ }^{\circ}\text{C}$. 图8为方板在2000 s时有限元法和POD模型降阶法计算的温度场结果; 图9为在参考点A, B, C处的温度随时间变化的情况. 从图中可以看出, 用POD模型降阶法计算的结果和有限元法计算的结果吻合得非常好, 这表明用线性热传导问题的温度场建立的POD基底能很好地模拟物性参数随温度变化情况下的非线性热传导问题. 并且用常数边界条件建立的POD基底可以快速计算变边界条件的非线性热传导问题.

为了对比有限元法和POD模型降阶法的计算效率, 方板分别划分为 20×20 (共441个节点), 50×50 (共2601个节点), 80×80 (共6561个节点)和 100×100 (共10201个节点), 4个节点线性单元, 用有限元法和POD

图7 (网络版彩图)特征值的分布情况

Figure 7 (Color online) Distribution of eigenvalue.

模型降阶法所花费的时间如表1所示. 从表中可以看出POD模型降阶法的计算效率能提高1–2个数量级, 并且随着离散模型自由度的增加, POD模型降阶法的计算效率也越高.

4.3 算例3: 涡轮叶片瞬态非线性热传导问题

考虑一个含有冷却通道的涡轮叶片, 其几何模型和边界条件如图10所示. 在稳定工作状态下, 叶片外部热空气的温度为 1300 K , 内部冷却气流的温度为 750 K . 初始时刻叶片的温度为 300 K , 在该温度条件下叶片的材料参数为: 密度 $\rho=7990\text{ kg/m}^3$, 比热容 $c=345\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$, 导热系数 $k=400\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$. 涡轮叶片热分析的有限元法计算模型如图11所示, 该模型包含3830个三角形单元, 共计2181个节点.

当不考虑温度对材料参数影响时, 用有限元法计算上述条件下叶片内各个节点处的温度值, 取 $t=5, 10,$

图8 (网络版彩图)2000 s时刻方板的温度场分布情况. (a) 有限元法计算结果; (b) POD降阶法计算结果

Figure 8 (Color online) Distribution of temperature of square plate at time of 2000 s. (a) Computational results of FEM; (b) computational results of POD based reduced order method.

图 9 (网络版彩图)参考点处温度随时间的变化

Figure 9 (Color online) Variation with time of temperature at reference points.

表 1 有限元法和POD方法计算时间的对比

Table 1 Computational time comparison of FEM and POD method

方法	441	2601	6561	10201
FEM	0.89 s	49.53 s	445.37 s	1406.76 s
POD	0.176 s	2.978 s	15.415 s	35.801 s
时间比值	5.1	16.6	28.9	39.3

..., 100 s共计20个时刻各个节点处的温度值构成瞬像矩阵. 由式(16)–(18)可得到相关矩阵的特征值和特征向量, 图12为各个特征值的分布情况. 由式(21)可知当 $r=5$ 时, $I(5)=99.998\%$, 因此本算例中取前5阶POD基底进行模型降阶分析.

当涡轮刚开始工作后, 叶片外部热空气温度随时

图 10 (网络版彩图)涡轮叶片的几何模型

Figure 10 (Color online) Geometrical model of turbine blade.

图 11 (网络版彩图)涡轮叶片的有限元离散模型

Figure 11 (Color online) Finite element discrete model of turbine blade.

图 12 (网络版彩图)特征值的分布情况

Figure 12 (Color online) Distribution of eigenvalue.

间变化 $T_a = 300 + 1000(1 - e^{-0.0125t})$ K, 叶片内部冷却空气温度在150 s内由300 K线性上升到750 K, 之后冷却空气的温度保持750 K不变. 考虑叶片的物性参数随温度变化: 导热系数 $k = (450 - 0.2T)$ W m⁻¹ °C⁻¹, 比热容 $c = (300 + 0.1T)$ J kg⁻¹ K⁻¹. 选取线性热传导问题分析时获得的前5阶POD基底, 用POD模型降阶法分析上述情况下风扇的非线性热传导问题. 用有限元法和POD模型降阶法计算的结果对比情况如图13和14所示. 图13为 $t=400$ s时刻叶片的温度场分布情况; 图14为在参考点A, B, C处的温度随时间变化的情况, 从图中可以看出, 用POD模型降阶法计算的结果和有限元法计算的结果吻合得非常好. 在分析过程中, 有限元法计算时

图 13 (网络版彩图)400 s时刻叶片的温度场分布情况. (a) 有限元法计算结果; (b) POD降阶法计算结果

Figure 13 (Color online) Temperature distribution of turbine blade at time of 400 s. (a) Computational results of FEM; (b) computational results of POD method.

图 14 (网络版彩图)参考点处温度随时间的变化

Figure 14 (Color online) Variation with time of temperature at reference points.

间为41.27 s, 而本文方法用时2.63 s, 计算效率提高了15.7倍.

5 结论

本文提出了一种从线性瞬态热传导问题的温度场中提取POD基底, 对物性参数随温度变化的非线性热传导问题进行模型降阶的快速算法. 与传统POD模型降阶法不同, 本文方法不需要从非线性热传导问题的温度场中获取POD基底, 因此获取POD基底时更容易, 而且耗费的时间也更少.

研究表明, 用线性瞬态热传导问题的POD基底能有效地对材料非线性瞬态热传导问题进行快速计算, 即使非线性热传导问题的边界条件数值发生变化, 也不需要重新计算POD基底, 这对边界条件复杂的航空航天等领域需要实时温度控制与快速计算具有重要的应用价值.

本文方法适用于给定温度、热流密度和热对流边界条件的瞬态热传导问题, 对于热辐射边界条件的瞬态热传导问题还有待进一步的研究.

参考文献

- 1 Bathe K J, Khoshgoftaar M R. Finite element formulation and solution of nonlinear heat transfer. *Nucl Eng Des*, 1979, 51: 389–401
- 2 Tamma K K, Namburu R R. Explicit second-order accurate Taylor-Galerkin-based finite-element formulations for linear/nonlinear transient heat transfer. *Numer Heat Transfer*, 1988, 13: 409–426
- 3 Thakur H, Singh K M, Sahoo P K. Meshless local Petrov-Galerkin method for nonlinear heat conduction problems. *Numer Heat Transfer Part B-Fundamentals*, 2009, 56: 393–410
- 4 Chang C W. A new meshless method for solving steady-state nonlinear heat conduction problems in arbitrary plane domain. *Eng Anal Bound Elem*, 2016, 70: 56–71
- 5 Li Q H, Chen S S, Luo X M. Using meshless local natural neighbor interpolation method to solve two-dimensional nonlinear problems. *Int J Appl Mech*, 2016, 8: 1650069
- 6 Wang F, Lin G, Zheng B J, et al. MLPG method based on moving Kriging interpolation for solving nonlinear heat conduction problems (in Chinese). *J Dalian Univ Tech*, 2014, 54: 339–344 [王峰, 林皋, 郑保敬, 等. 非线性热传导问题的基于滑动Kriging插值的MLPG法. 大连理工大学学报, 2014, 54: 339–344]

大学学报, 2014, 54: 339–344]

- 7 Mierzwiczak M, Chen W, Fu Z J. The singular boundary method for steady-state nonlinear heat conduction problem with temperature-dependent thermal conductivity. *Int J Heat Mass Transfer*, 2015, 91: 205–217
- 8 Feng S Z, Cui X Y, Li A M, et al. A face-based smoothed point interpolation method (FS-PIM) for analysis of nonlinear heat conduction in multi-material bodies. *Int J Thermal Sci*, 2016, 100: 430–437
- 9 Yang K, Peng H F, Wang J, et al. Radial integration BEM for solving transient nonlinear heat conduction with temperature-dependent conductivity. *Int J Heat Mass Transfer*, 2017, 108: 1551–1559
- 10 Chatterjee A. An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Curr Sci*, 2000, 78: 808–817
- 11 Liang Y C, Lee H P, Lim S P, et al. Proper orthogonal decomposition and its applications—Part I: Theory. *J Sound Vib*, 2002, 252: 527–544
- 12 Rathinam M, Petzold L R. A new look at proper orthogonal decomposition. *SIAM J Numer Anal*, 2004, 41: 1893–1925
- 13 Luo Z D, Wang R W, Chen J, et al. A reduced finite difference scheme based on POD method for the non-stationary Navier-Stokes equation (in Chinese). *Sci Sin Ser A-Math*, 2007, 37: 709–718 [罗振东, 王瑞文, 陈静, 等. 非定常的Navier-Stokes方程基于特征正交分解的差分格式. 中国科学A辑: 数学, 2007, 37: 709–718]
- 14 Yao W G, Xu M, Ye M. Unsteady aerodynamic force modeling via proper orthogonal decomposition ROM (in Chinese). *Chin J Theor Appl Mech*, 2010, 42: 637–644 [姚伟刚, 徐敏, 叶茂. 基于特征正交分解的非定常气动力建模技术. 力学学报, 2010, 42: 637–644]
- 15 Wu X H, Tao W Q, Lv Y L, et al. Reduced order model for fast computation of incompressible fluid flow problem (in Chinese). *Chin Soc Elec Eng*, 2010, 30: 69–74 [吴学红, 陶文铨, 吕彦力, 等. 不可压缩流动问题快速计算的降阶模型. 中国电机工程学报, 2010, 30: 69–74]
- 16 Xu D Y, Guan H, Wu C J. A shock wave, rows of vortices/sound wave interaction and POD analysis (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2012, 42: 78–94 [许东洋, 关晖, 吴锤结. 激波-多涡列-声场相互作用及其POD分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2012, 42: 78–94]
- 17 Duan Y H, Wu W H, Fan Z L, et al. Proper orthogonal decomposition-based data mining aerodynamic shape for design optimization (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2017, 66: 220203 [段焰辉, 吴文华, 范召林, 等. 基于本征正交分解的气动优化设计外形数据挖掘. 物理学报, 2017, 66: 220203]
- 18 Feng Y K, Du X Z, Yang L J. Extrapolating POD reduced-order model based on temperature gradient for unsteady heat conduction (in Chinese). *Sci Sin-Tech Sci*, 2018, 48: 39–47 [冯俞楷, 杜小泽, 杨立军. 非稳态导热基于温度梯度的本征正交分解降维方法. 中国科学: 技术科学, 2018, 48: 39–47]
- 19 Krysl P, Lall S, Marsden J E. Dimensional model reduction in non-linear finite element dynamics of solids and structures. *Int J Numer Meth Eng*, 2001, 51: 479–504
- 20 Atwell J A, King B B. Proper orthogonal decomposition for reduced basis feedback controllers for parabolic equations. *Math Comput Model*, 2001, 33: 1–19
- 21 Kunisch K, Volkwein S. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for a general equation in fluid dynamics. *SIAM J Numer Anal*, 2003, 40: 492–515
- 22 Tang L, Gao X W. POD/RSM-based S/Hypersonic aerodynamic module for TPS/RLV structural design and optimization: X-34 case study. In: *The Proceedings of the 43rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. 2005, AIAA-2005-0839
- 23 Fic A, Bialecki R A, Kassab A J. Solving transient nonlinear heat conduction problems by proper orthogonal decomposition and the finite-element method. *Numer Heat Transfer Part B-Fundamentals*, 2005, 48: 103–124
- 24 Utturkar Y, Zhang B, Shyy W. Reduced-order description of fluid flow with moving boundaries by proper orthogonal decomposition. *Int J Heat Fluid Flow*, 2005, 26: 276–288
- 25 Zhang X, Xiang H. A fast meshless method based on proper orthogonal decomposition for the transient heat conduction problems. *Int J Heat Mass Transfer*, 2015, 84: 729–739
- 26 Dehghan M, Abbaszadeh M. Proper orthogonal decomposition variational multiscale element free Galerkin (POD-VMEFG) meshless method for solving incompressible Navier-Stokes equation. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2016, 311: 856–888
- 27 Hu J X, Zheng B J, Gao X W. Reduced order model analysis method via proper orthogonal decomposition for transient heat conduction (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2015, 45: 014602 [胡金秀, 郑保敬, 高效伟. 基于特征正交分解降阶模型的瞬态热传导分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2015, 45: 014602]
- 28 Zheng B J, Liang Y, Gao X W, et al. Analysis for dynamic response of functionally graded materials using POD based reduced order model (in Chinese). *Chin J Theor Appl Mech*, 2018, 50: 1–11 [郑保敬, 梁钰, 高效伟, 等. 功能梯度材料动力学问题的POD模型降阶分析. 力学学报, 2018, 50: 1–11]

2018, 50: 1–11]

- 29 Kostova-Vassilevska T, Oxberry G M. Model reduction of dynamical systems by proper orthogonal decomposition: Error bounds and comparison of methods using snapshots from the solution and the time derivatives. *J Comput Appl Math*, 2018, 330: 553–573
- 30 Ramesh S S, Lim K M. Reduced-order model for underwater target identification using proper orthogonal decomposition. *J Sound Vib*, 2017, 391: 50–72
- 31 Antoranz A, Ianiro A, Flores O, et al. Extended proper orthogonal decomposition of non-homogeneous thermal fields in a turbulent pipe flow. *Int J Heat Mass Transfer*, 2018, 118: 1264–1275

Reduced order model analysis method via proper orthogonal decomposition for nonlinear transient heat conduction problems

LIANG Yu¹, ZHENG BaoJing^{2*}, GAO XiaoWei^{1,3}, WU ZeYan² & WANG Feng^{2,4}

¹ School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

² College of Hydraulic & Environmental Engineering, China Three Gorges University, Yichang 443002, China;

³ State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

⁴ Hubei Key Laboratory of Construction and Management in Hydropower Engineering, China Three Gorges University, Yichang 443002, China

A reduced order analysis method is proposed to solve the nonlinear transient heat conduction problems with temperature-dependent conductivity of material by using the proper orthogonal decomposition (POD) model reduction method and the finite element method. Firstly, the POD basis vectors are developed by calculating eigenvectors of an autocorrelation matrix composed of snapshots, which clustered by the given results of obtained from experiments or numerical methods for the linear transient heat transfer problem. Secondly, the finite element discrete scheme of the nonlinear transient heat conduction problem is reduced the order by using the POD basis vectors of the linear problem, and a lower order ordinary differential equation system of the reduced order model of the nonlinear transient heat conduction problem is obtained. Finally, the value of temperature field at each time is obtained by solving the reduced-order ordinary differential equations. Several numerical examples are given to verify the effectiveness of the proposed method. The results show that the proposed method has a good accuracy and the computational efficiency can be improved by 1–2 orders of magnitude.

proper orthogonal decomposition, reduced order model, nonlinear transient heat conduction, POD base vectors, snapshots

PACS: 44.05.+e, 02.70.Dh, 02.10.Yn

doi: [10.1360/SSPMA2018-00199](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00199)