带删失的第三类 Tobit 模型的半参数估计

周先波, 潘哲文*

中山大学岭南学院, 广州 510275

E-mail: zhouxb@mail.sysu.edu.cn, panzhew@mail2.sysu.edu.cn

收稿日期: 2014-04-18; 接受日期: 2014-08-05; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 71371199) 资助项目

摘要 本文考察主方程因变量带有删失结构的第三类 Tobit 模型的半参数估计问题, 基于受限因变量的条件分布提出一种新的半参数两步估计方法, 并证明所提出估计量的相合性和渐近正态性. 数值模拟的结果显示本文的估计量在一系列设计下均有着良好的表现. 通过与文献中的估计量进行比较, 结果表明, 当主方程因变量的删失比例较大或当样本量较大时, 本文的估计量是对现有估计量的一个重要补充.

关键词 带删失的第三类 Tobit 模型 半参数估计 两步估计 渐近正态性

MSC (2010) 主题分类 62G05, 62G20

1 引言

分析样本选择偏差的计量模型在经济学领域有着广泛的应用, 如劳动供给模型、人口流动模型以及健康保险模型等. 第二类 Tobit 模型和第三类 Tobit 模型 (参见文献 [1]) 是实证研究中经常选用的两类样本选择模型. 两者的区别在于前者的选择变量是一个二元变量 (如参加或不参加) 而后者的则是一个删失变量. 显然, 第三类 Tobit 模型利用了选择变量的更多信息. 本文考虑第三类 Tobit 模型的一种删失版本, 即主方程因变量本身带有一个删失结构, 称为带删失的第三类 Tobit 模型 (censored Type-3 Tobit model). 具体地, 带删失的第三类 Tobit 模型由选择方程和主方程构成, 其中选择方程具有如下形式:

$$y_{1i} = \begin{cases} y_{1i}^*, & \text{如果 } y_{1i}^* > 0, \\ 0, & \text{如果 } y_{1i}^* \leq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$
$$y_{1i}^* = x_{1i}\alpha_0 + u_{1i},$$

而主方程是

$$y_{2i} = \begin{cases} \max\{y_{2i}^*, 0\}, & \text{如果 } y_{1i} > 0, \\ 0, & \text{如果 } y_{1i} = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$
$$y_{2i}^* = x_{2i}\beta_0 + u_{2i}.$$

这里 y_{1i}^* 和 y_{2i}^* 是不能被观测的潜变量, 我们只能观测到 y_{1i} 和 y_{2i} ; x_{1i} 和 x_{2i} 是外生变量构成的行向量, 分别具有维数 k_1 和 k_2 以及支撑 Ω_1 和 Ω_2 , $i = 1, 2, \dots, n$; $\alpha_0 \in \Theta_1$ 和 $\beta_0 \in \Theta_2$ 是未知参数构成的列向量, $\Theta_1 \subset \mathbb{R}^{k_1}$ 和 $\Theta_2 \subset \mathbb{R}^{k_2}$ 是相应的参数空间; u_{1i} 和 u_{2i} 是扰动项, 与 x_{1i} 和 x_{2i} 独立. 因为 α_0 可以采用文献中较为成熟的删失模型的半参数估计技术进行估计 (如文献 [2, 3]), 所以本文只关心主方程 (1.2) 中未知参数 β_0 的估计. 与第三类 Tobit 模型相同的是, 选择变量 y_{1i} 是删失变量, 主方程潜变量 y_{2i}^* 只能在 y_{1i} 为正的时候才能被观察; 不同的是, 即使当 y_{1i} 为正时, 我们也只能观察到正的 y_{2i}^* , 这是因为主方程本身带有一个删失结构 $\max\{y_{2i}^*, 0\}$. 如果主方程的删失点不是 0, 而是发生在负无穷远处, 则模型 (1.1) 和 (1.2) 退化为第三类 Tobit 模型. 这种带删失的第三类 Tobit 模型有许多实际的应用. 例如, $y_{1i}^* = x_{1i}\alpha_0 + u_{1i}$ 是劳动供给方程, y_{1i} 表示个体实际劳动供给时间, 个体 i 若没有参加工作, 则 $y_{1i} = 0$, 从而有选择方程 (1.1); y_{2i}^* 可以是个体 i 面临的市场工资, 个体 i 参与工作 (即 $y_{1i} > 0$) 时受到最低工资法的保护, y_{2i} 是市场工资和法定最低工资的最大者, 即劳动者实际的工资水平, 也为调查工资; 但调查工资只有在个体 i 参与工作 ($y_{1i} > 0$) 时才可观察, 不参与工作时自然不能被观察到, 从而主方程 (1.2) 的设定可以说明这种既有选择又有删失的结构.

Chen [4]、Honoré 等人 [5]、Lee [6] 和 Li 和 Wooldridge [7] 考察了第三类 Tobit 模型的半参数估计问题, 在 α_0 估计量给定的前提下, 非参数地估计或修正样本选择偏差, 在独立性约束下提出了主方程参数的半参数估计量. Min 和 Sheu [8] 通过数值模拟比较了几种估计量, 指出 Li 和 Wooldridge 的估计量和 Chen 的估计量分别于样本量较小和较大时表现最好. 然而, 除 Honoré 等人外, 这些估计方法难以用于带删失的第三类 Tobit 模型 (1.1) 和 (1.2), 因为模型 (1.1) 和 (1.2) 的选择偏差项不仅仅是 α_0 的函数, 还是主方程参数 β_0 的函数, 所以仅依靠对 α_0 的第 1 步估计并不能消除选择偏差的影响.

Honoré 等人则指出, 他们的成对相减 (pairwise difference) 方法不仅适用于第三类 Tobit 模型的估计, 还能用于模型 (1.1) 和 (1.2) 的估计. 成对相减方法基于这样一个思路: 独立同分布的两个随机变量相减得到的随机变量是对称的, 而这种对称性可为估计量的构造提供所需的矩条件, 因此应用这个方法的关键在于通过剪裁 (trimming) 等手段找到独立同分布的随机变量. 在第三类 Tobit 模型中, 由于样本选择的存在, 需要对可观测的样本进行剪裁以保留扰动项的独立同分布性. 具体来说, 虽然可观测的 $(u_{1i}, u_{2i}) |_{u_{1i} > -x_{1i}\alpha_0}$ 和 $(u_{1j}, u_{2j}) |_{u_{1j} > -x_{1j}\alpha_0}$ 并非独立同分布, 但 $(u_{1i}, u_{2i}) |_{u_{1i} > \max(-x_{1i}\alpha_0, -x_{1j}\alpha_0)}$ 和 $(u_{1j}, u_{2j}) |_{u_{1j} > \max(-x_{1i}\alpha_0, -x_{1j}\alpha_0)}$ 仍然独立同分布, 因而可用于构造第三类 Tobit 模型的半参数估计量 (参见文献 [5, (6) 和 (6')]). 同样的思路可用于估计模型 (1.1) 和 (1.2), 只不过剪裁之后需要估计的不再是简单的线性模型, 而是一个删失模型. 由此, 类似于文献 [5, (6) 和 (6')], 模型 (1.1) 和 (1.2) 中 β_0 的成对相减估计量为

$$\hat{\beta}_{\text{HKU}} = \arg \min_{\beta \in \Theta_2} \sum_{i < j} 1\{y_{1i} > \max(0, (x_{1i} - x_{1j})\hat{\alpha}), y_{1j} > \max(0, (x_{1j} - x_{1i})\hat{\alpha})\} s(y_{2i}, y_{2j}, (x_{2i} - x_{2j})\beta),$$

其中 $\hat{\alpha}$ 是 α_0 的第 1 步估计量,

$$s(y_1, y_2, \delta) = \begin{cases} \Xi(y_1) - (y_2 + \delta)\xi(y_1), & \text{如果 } \delta \leq -y_2, \\ \Xi(y_1 - y_2 - \delta), & \text{如果 } -y_2 < \delta < y_1, \\ \Xi(-y_2) - (\delta - y_1)\xi(-y_2), & \text{如果 } y_1 \leq \delta, \end{cases}$$

$\Xi(\cdot)$ 是一个偶函数, 通常取为 $\Xi(d) = |d|$ 或 $\Xi(d) = d^2$, $\xi(\cdot)$ 是 $\Xi(\cdot)$ 的导函数. 然而, Honoré 等人并未证明 $\hat{\beta}_{\text{HKU}}$ 的渐近性质, 导致其在实际使用中缺乏理论指导. 而且, 成对相减方法是一种基于矩的方法, 只利用了样本一阶矩和二阶矩的信息.

本文从一个新的角度提出模型 (1.1) 和 (1.2) 的一种半参数两步估计量, 对样本选择模型的计量文献作有益的补充. 我们构造估计量的出发点是受限因变量的条件分布函数 $\Pr[y_{1i} > 0, y_{2i} > t \mid x_i = x]$ (这里 $t > 0$), 通过样本匹配, 我们找到它的一个相合估计 $\tau_n(t, x, \alpha, \beta)$, 再由之应用最小二乘原理构造一个积分形式的目标函数

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty [1\{y_{1i} > 0, y_{2i} > t\} - \tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta)]^2 w(t) dt,$$

其中 $\hat{\alpha}$ 是第 1 步的估计量. 通过最小化此目标函数即可得到第 2 步估计量 $\hat{\beta}$. 由于对 t 进行了积分, 这样构造的估计量利用了受限因变量整个条件分布的信息, 从直观上相当于利用了样本所有阶矩的信息. 因为上述目标函数由示性函数构成, 关于 β 不可微, 所以传统的“delta 方法”不可用来研究估计量 $\hat{\beta}$ 的渐近性质. 但它可写成二阶 U 统计量的形式, 故本文基于经验过程理论 (empirical process theory) 和 U 统计量分解理论 (参见文献 [9, 10]), 证明所构建的估计量的相合性和渐近正态性.

本文结构安排如下. 第 2 节介绍我们的估计量, 第 3 节证明估计量的相合性和渐近正态性, 第 4 节构造数值模拟考察估计量的小样本表现, 并与其他估计量进行比较, 第 5 节总结全文工作.

2 估计量

本节利用独立性约束, 基于受限因变量的条件分布函数构造模型 (1.1) 和 (1.2) 的半参数估计量. 记 $S(a, b) = \Pr(u_{1i} > a, u_{2i} > b)$. 令 $x_i = (x_{1i}, x_{2i})$ 表示 x_{1i} 和 x_{2i} 中不同元素组成的随机向量, 支撑为 Ω . 假设 x_i 与 (u_{1i}, u_{2i}) 独立. 对于任意的 $t > 0$ 以及任意固定的 $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, 我们有

$$\Pr[y_{1i} > 0, y_{2i} > t \mid x_i = x] = \Pr[u_{1i} > -x_{1i}\alpha_0, u_{2i} > t - x_{2i}\beta_0 \mid x_i = x] = S(-x_1\alpha_0, t - x_2\beta_0). \quad (2.1)$$

另一方面, 记 $u_{2j}(\beta) \equiv y_{2j} - x_{2j}\beta$, 其中 $\beta \in \Theta_2$, 那么对于任意固定的 $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \Omega$, 只要满足 $(\tilde{x}_1 - x_1)\alpha_0 > 0$ 和 $t + (\tilde{x}_2 - x_2)\beta > 0$, 就有

$$\begin{aligned} \Pr[u_{1j} > -x_1\alpha_0, u_{2j}(\beta) > t - x_2\beta \mid x_j = \tilde{x}] &= \Pr[y_{1j} > x_{1j}\alpha_0 - x_1\alpha_0, y_{2j} > t + x_{2j}\beta - x_2\beta \mid x_j = \tilde{x}] \\ &= \Pr[u_{1j} > -x_1\alpha_0, u_{2j} > t - \tilde{x}_2\beta_0 + \tilde{x}_2\beta - x_2\beta] \\ &= S(-x_1\alpha_0, t - \tilde{x}_2\beta_0 + \tilde{x}_2\beta - x_2\beta). \end{aligned}$$

显然, 当 $\beta = \beta_0$ 时, 上式与 (2.1) 相等, 即对于任意固定的 $x = (x_1, x_2) \in \Omega$,

$$\Pr[y_{1i} > 0, y_{2i} > t \mid x_i = x] = \frac{\Pr[y_{1j} > (x_{1j} - x_1)\alpha_0 > 0, y_{2j} > t + (x_{2j} - x_2)\beta_0 > 0]}{\Pr[(x_{1j} - x_1)\alpha_0 > 0, t + (x_{2j} - x_2)\beta_0 > 0]}.$$

记上式右端为 $\tilde{\tau}(t, x, \alpha_0, \beta_0)$, 则上式可写为

$$1\{y_{1i} > 0, y_{2i} > t\} = \tilde{\tau}(t, x_i, \alpha_0, \beta_0) + \varepsilon_i, \quad (2.2)$$

其中 ε_i 满足 $E[\varepsilon_i \mid x_i] = 0$. 如果对于几乎所有的 $x \in \Omega$, 都有 $\tilde{\tau}(t, x, \alpha_0, \beta) = \tilde{\tau}(t, x, \alpha_0, \beta_0)$ 当且仅当 $\beta = \beta_0$, 那么我们就可以利用 (2.2) 构造 β_0 的最小二乘估计量. 而且, 注意到 (2.2) 对于所有的 $t > 0$ 都成立, 因此我们可以构造一个积分形式的目标函数. 当 t 取遍所有正实数时, 主方程受限因变量条件分布的所有信息都将得到有效的利用. 这就是本文估计量的构造思路. 需要强调的是, 因为我们可以得到 α_0 的相合估计, 所以上面的分析都把 α_0 视为已知.

一般情况下, $\tilde{\tau}(t, x, \alpha, \beta)$ 对 α 和 β 不连续. 为渐近性质证明的需要, 我们定义 $\tilde{\tau}(t, x, \alpha, \beta)$ 的连续形式:

$$\tau(t, x, \alpha, \beta) = \frac{A(t, x, \alpha, \beta)}{B(t, x, \alpha, \beta)},$$

其中

$$A(t, x, \alpha, \beta) = E[1\{y_{1j} > (x_{1j} - x_1)\alpha, y_{2j} > t + (x_{2j} - x_2)\beta\}w_1((x_{1j} - x_1)\alpha)w_2(t + (x_{2j} - x_2)\beta)],$$

$$B(t, x, \alpha, \beta) = E[w_1((x_{1j} - x_1)\alpha)w_2(t + (x_{2j} - x_2)\beta)],$$

这里 $w_1(\cdot)$ 和 $w_2(\cdot)$ 是 $1\{\cdot > 0\}$ 的光滑化函数. 易证 (2.2) 对于 $\tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)$ 同样成立, 因此真实参数 β_0 是总体目标函数

$$Q(\beta; \alpha_0) = \int_0^\infty E[1\{y_{1i} > 0, y_{2i} > t\} - \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta)]^2 w(t) dt$$

的最小值点, 这里 $w(t)$ 是一个取值为正的可积的赋权函数. 假设第 1 步已经给出 α_0 的一个相合估计 $\hat{\alpha}$, 那么我们可以构造样本目标函数如下:

$$Q_n(\beta; \hat{\alpha}) \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty [1\{y_{1i} > 0, y_{2i} > t\} - \tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta)]^2 w(t) dt, \quad (2.3)$$

并且定义 β_0 的第 2 步估计量为

$$\hat{\beta}^{(1)} = \arg \min_{\beta \in \Theta_2} Q_n(\beta; \hat{\alpha}), \quad (2.4)$$

其中 $\tau_n(t, x_i, \alpha, \beta)$ 是 $\tau(t, x_i, \alpha, \beta)$ 的样本化形式, 即

$$\tau_n(t, x_i, \alpha, \beta) = \frac{A_n(t, x_i, \alpha, \beta)}{B_n(t, x_i, \alpha, \beta)}, \quad (2.5)$$

$$A_n(t, x_i, \alpha, \beta) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n 1\{y_{1j} > x_{1j}\alpha - x_{1i}\alpha, y_{2j} > t + x_{2j}\beta - x_{2i}\beta\} w_1(x_{1j}\alpha - x_{1i}\alpha) w_2(t + x_{2j}\beta - x_{2i}\beta),$$

$$B_n(t, x_i, \alpha, \beta) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n w_1(x_{1j}\alpha - x_{1i}\alpha) w_2(t + x_{2j}\beta - x_{2i}\beta).$$

这种方法还可用于构造其他类似的估计量. 例如, 注意到

$$\Pr[y_{2i} > t \mid x_i = x, y_{1i} > 0] = \frac{\Pr[y_{1j} > (x_{1j} - x_1)\alpha_0 > 0, y_{2j} > t + (x_{2j} - x_2)\beta_0 > 0]}{\Pr[y_{1j} > (x_{1j} - x_1)\alpha_0 > 0, t + (x_{2j} - x_2)\beta_0 > 0]},$$

因此可以定义另一种估计量为

$$\hat{\beta}^{(2)} = \arg \min_{\beta \in \Theta_2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1\{y_{1i} > 0\} \int_0^\infty [1\{y_{2i} > t\} - \bar{\tau}_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta)]^2 w(t) dt,$$

其中

$$\bar{\tau}_n(t, x_i, \alpha, \beta) = \frac{A_n(t, x_i, \alpha, \beta)}{\bar{B}_n(t, x_i, \alpha, \beta)},$$

$$\bar{B}_n(t, x_i, \alpha, \beta) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n 1\{y_{1j} > x_{1j}\alpha - x_{1i}\alpha\} w_1(x_{1j}\alpha - x_{1i}\alpha) w_2(t + x_{2j}\beta - x_{2i}\beta).$$

显然, 从 $\Pr[y_{1i} > t_1, y_{2i} > t_2 \mid x_i = x]$ 或 $\Pr[y_{2i} > t_2 \mid x_i = x, y_{1i} > t_1]$ 出发同样可以构造类似的估计量.

3 渐近性质

本节仅推导 $\hat{\beta}^{(1)}$ 的渐近性质, $\hat{\beta}^{(2)}$ 和其他类似估计量的渐近性质可用同样方法得到. 我们首先给出下列假设条件:

(A1) 满足 (1.1) 和 (1.2) 的随机向量序列 $\{(y_{1i}^*, y_{2i}^*, x_i)\}_{i=1}^n$ 独立同分布. 扰动项 (u_{1i}, u_{2i}) 与外生变量 x_i 独立;

(A2) 参数空间 Θ_2 是 k_2 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{k_2}$ 的一个紧子集, 真实参数 β_0 是 Θ_2 的一个内点;

(A3) 对于任意的 $t > 0$ 以及几乎所有的 $x \in \Omega$, $\tau(t, x, \alpha_0, \beta) = \tau(t, x, \alpha_0, \beta_0)$ 当且仅当 $\beta = \beta_0$;

(A4) 存在常数 $c > 0$, 使得 $B(t, x, \alpha, \beta) > c$ 对于 $t > 0$, $x \in \Omega$, $\alpha \in \Theta_1$ 和 $\beta \in \Theta_2$ 一致地成立;

(A5) $w_l(\cdot)$ ($l = 1, 2$) 是连续可微函数, 且满足 $t \leq 0$ 时 $w_l(t) = 0$, $t \in [0, 1]$ 时 $0 \leq w_l(t) \leq 1$, 以及 $t \geq 1$ 时 $w_l(t) = 1$;

(A6) 第 1 步估计量 $\hat{\alpha}$ 是 α_0 的相合估计, 且具有如下渐近表示:

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \phi_i + o_p(1),$$

其中 $\phi_i = \phi(y_{1i}, x_{1i})$, $E[\phi_i] = 0$, $E[|\phi_i|^2] < \infty$;

(A7) $\tau(t, x, \alpha, \beta)$ 对 $(\alpha', \beta)'$ 二阶连续可微, 且

$$V_{\beta\beta} \equiv \int E \left[\frac{\partial \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta} \frac{\partial \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta'} \right] w(t) dt \quad (3.1)$$

是一个正定矩阵.

注 1 (A1) 要求所得样本为随机样本且施加独立性约束. (A2) 是极值估计量的标准假设. (A3) 是识别条件, 保证了 β_0 是总体目标函数 $Q(\beta; \alpha_0)$ 的唯一最小值点. (A4) 保证了函数 $\tau(t, x, \alpha, \beta)$ 一致有界. 比 (A4) 弱的一个条件是存在常数 $c > 0$ 和 $X \subset \Omega$, 使得 $B(t, x, \alpha, \beta) > c$ 对于 $t > 0$, $x \in X$, $\alpha \in \Theta_1$ 和 $\beta \in \Theta_2$ 一致地成立, 这时需要用 $1\{x_i \in X\}$ 对样本目标函数 $Q_n(\beta; \hat{\alpha})$ 进行剪裁, 但修正后估计量渐近性质的证明思路完全相同. 为简单起见, 本文仅考虑条件 (A4). (A6) 对第 1 步估计量 $\hat{\alpha}$ 提出了一定的要求, 在第 2 步估计量渐近性质的证明中起到关键的作用. 满足 (A6) 的估计量有很多, 如文献 [2, 11, 12] 等, 它们都可作为我们的第 1 步估计量. (A7) 中的矩阵类似于非线性最小二乘估计中的 Hesse 阵.

定理 1 如果 (A1)–(A7) 成立, 那么 (2.4) 中定义的第二步估计量 $\hat{\beta}^{(1)}$ 是真实参数 β_0 的相合估计, 且具有渐近正态性

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}^{(1)} - \beta_0) \rightarrow N(0, V_{\beta\beta}^{-1} \Gamma V_{\beta\beta}^{-1}),$$

其中 $V_{\beta\beta}$ 在 (3.1) 中定义, $\Gamma = p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_{1i} - v_{2i} - V_{\beta\alpha} \phi_i)(v_{1i} - v_{2i} - V_{\beta\alpha} \phi_i)'$, 这里的 ϕ_i 在 (A6) 中定义,

$$V_{\beta\alpha} = \int_0^\infty E \left[\frac{\partial \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta} \frac{\partial \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \alpha'} \right] w(t) dt, \quad (3.2)$$

$$v_{1i} = \int_0^\infty [1\{y_{1i} > 0, y_{2i} > t\} - \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)] \frac{\partial \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta} w(t) dt, \quad (3.3)$$

$$v_{2i} = \int_0^\infty E \left[\frac{\partial \tau(t, x_j, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta} q_1(t, x_j, z_i, \alpha_0, \beta_0) | z_i \right] w(t) dt, \quad (3.4)$$

$$q_1(t, x_j, z_i, \alpha_0, \beta_0) = \frac{w_1(x_{1i}\alpha_0 - x_{1j}\alpha_0)w_2(t + x_{2i}\beta_0 - x_{2j}\beta_0)}{B(t, x_j, \alpha_0, \beta_0)} \\ \times [1\{u_{1i} > -x_{1j}\alpha_0, u_{2i} > t - x_{2j}\beta_0\} - \tau(t, x_j, \alpha_0, \beta_0)]$$

且 $z \equiv (y_1, y_2, x)$.

为进行大样本下的统计推断, 需要构造渐近方差阵 $V_{\beta\beta}^{-1}\Gamma V_{\beta\beta}^{-1}$ 的相合估计. 我们分别考虑 $V_{\beta\beta}$ 和 Γ 的估计. 沿用 Chen 和 Zhou^[11] 的方法, 我们定义 $\tau(t, x, \alpha, \beta)$ 的估计量为

$$c_n(t, x, \alpha, \beta) = \frac{a_n(t, x, \alpha, \beta)}{B_n(t, x, \alpha, \beta)},$$

其中

$$a_n(t, x, \alpha, \beta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{y_{1j} - (x_{1j} - x_1)\alpha}{h_n}\right) K\left(\frac{y_{2j} - t - (x_{2j} - x_2)\beta}{h_n}\right) w_1((x_{1j} - x_1)\alpha) w_2(t + (x_{2j} - x_2)\beta),$$

这里 $K(t) = \int_{-\infty}^t k(s)ds$, $k(\cdot)$ 是一个连续可微的关于零对称的密度函数, $\{h_n\}$ 是一个收敛于零的实数序列, 且当 $n \rightarrow \infty$ 满足 $nh_n^3 \rightarrow \infty$. 由此, 定义 $V_{\beta\beta}$ 的估计为

$$\hat{V}_{\beta\beta} \equiv \int_0^\infty \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial c_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \beta} \frac{\partial c_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \beta'} w(t) dt,$$

它是 $V_{\beta\beta}$ 的一个相合估计. 类似地, 定义 $V_{\beta\alpha}$ 的估计为

$$\hat{V}_{\beta\alpha} = \int_0^\infty \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial c_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \beta} \frac{\partial c_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \alpha'} w(t) dt.$$

而 Γ 的估计则可定义为 $\hat{\Gamma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{v}_{1i} - \hat{v}_{2i} - \hat{V}_{\beta\alpha} \hat{\phi}_i)(\hat{v}_{1i} - \hat{v}_{2i} - \hat{V}_{\beta\alpha} \hat{\phi}_i)'$, 其中

$$\hat{v}_{1i} = \int_0^\infty [1\{y_{1i} > 0, y_{2i} > t\} - c_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \hat{\beta})] \frac{\partial c_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \beta} w(t) dt,$$

$$\hat{v}_{2i} = \int_0^\infty \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial c_n(t, x_j, \hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \beta} \hat{q}_{1i}(t, x_j, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) w(t) dt,$$

$$\hat{q}_{1i}(t, x_j, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{w_1((x_{1i} - x_{1j})\hat{\alpha})w_2(t + (x_{2i} - x_{2j})\hat{\beta})}{B_n(t, x_j, \hat{\alpha}, \hat{\beta})} \\ \times [1\{y_{1i} > (x_{1i} - x_{1j})\hat{\alpha}, y_{2i} > t + (x_{2i} - x_{2j})\hat{\beta}\} - c_n(t, x_j, \hat{\alpha}, \hat{\beta})],$$

且 $\hat{\phi}_i$ 是 ϕ_i 的一个估计并满足 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{\phi}_i - \phi_i|^2 = o_p(1)$. Honoré 和 Powell^[2] 给出了 $\hat{\phi}_i$ 的一个例子.

值得注意的是, 虽然基于渐近方差阵估计的统计推断在大样本下是可靠的, 但是 Buchinsky^[13] 的经验表明, 当样本量较小时, 使用 bootstrap 方法进行推断是更优的选择.

4 数值模拟

本节设计数值模拟实验考察我们估计量 $\hat{\beta}^{(1)}$ 和 $\hat{\beta}^{(2)}$ 的小样本表现, 并与 Chen^[4] 和 Honoré 等人^[5] 的估计量进行比较. Chen 为第三类 Tobit 模型提出了两个估计量, 即

$$\hat{\beta}_{\text{Chen,I}} = \arg \min_{\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_K} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K 1\{y_{1i} > 0\} 1\{c_{k+1} > \hat{u}_{1i} > c_k, x_{1i}\hat{\alpha} > -c_k\} (y_{2i} - x_{2i}\beta - \gamma_k)^2$$

和

$$\hat{\beta}_{\text{Chen,II}} = \arg \min_{\beta \in \Theta_2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1\{y_{1i} > 0\} (y_{2i} - x_{2i}\beta - \hat{E}(x_{1i}, \beta))^2 m_i^2,$$

其中

$$\hat{E}(x_{1i}, \beta) = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n 1\{y_{1j} - x_{1j}\hat{\alpha} > -x_{1i}\hat{\alpha} > -x_{1j}\hat{\alpha}\} (y_{2j} - x_{2j}\beta)}{\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n 1\{y_{1j} - x_{1j}\hat{\alpha} > -x_{1i}\hat{\alpha} > -x_{1j}\hat{\alpha}\}}$$

是对选择偏差项的估计, 而 $m_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n 1\{y_{1j} - x_{1j}\hat{\alpha} > -x_{1i}\hat{\alpha} > -x_{1j}\hat{\alpha}\}$ 是赋予第 i 个观测值的一个权重. 仿照 Chen 的做法, 在接下来的模拟实验中, 我们均取 $K = 20$, $c_1 = -4$ 和 $c_{K+1} = 4$. 需要强调的是, Chen 的两个估计量并未考虑主方程的删失过程, 因此很有可能不是模型 (1.1) 和 (1.2) 中 β_0 的相合估计. 另外, 本节所考虑的 Honoré 等人的成对相减估计量均针对主方程带有删失过程的情形, 所以应是模型 (1.1) 和 (1.2) 中 β_0 的相合估计. 我们分别取 $\Xi(d) = |d|$ 和 $\Xi(d) = d^2$, 记为 $\hat{\beta}_{\text{HKUabs}}$ 和 $\hat{\beta}_{\text{HKUsqu}}$. 至于 α_0 的第 1 步估计量 $\hat{\alpha}$, 我们采用 Honoré 和 Powell [2] 的删失模型估计量, 并取 $\Xi(d) = |d|$.

数据生成过程与 Chen [4] 类似, 只不过主方程增加了一个删失过程,

$$\begin{aligned} y_{1i}^* &= x_{1i} + x_{2i} + u_{1i}, & y_{2i}^* &= x_{1i} + 2x_{2i} + u_{2i}, \\ y_{1i} &= \max\{y_{1i}^*, 0\}, & y_{2i} &= \max\{y_{2i}^*, 0\} \times 1\{y_{1i} > 0\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

这里真实参数是 $\alpha_0 = (1, 1)'$ 以及 $\beta_0 = (1, 2)'$, 外生变量 x_{1i} 和 x_{2i} 分别服从标准正态分布 $N(0, 1)$ 和均匀分布 $U(-2, 2)$. 不同的设计在于对扰动项分布的不同设定. u_{1i} 的数据来自于六种不同的分布, 其中前三种与 Chen 相同, 分别是标准正态、正态 Gamma 混合以及负正态 Gamma 混合, 而后三种则分别是对数正态 (密度函数为 $f(x) = (\sqrt{2\pi}x)^{-1} e^{-\ln^2(x)/2}$)、自由度为 1 的 χ^2 分布 ($f(x) = (2\pi x)^{-1/2} e^{-x/2}$) 以及指数分布的混合: $(|v_{1i}|^{1.5} + |v_{2i}|^{0.8})/2$, 其中 v_{1i} 和 v_{2i} 是独立同分布的自由度为 1 的指数分布. 在模拟中, 这六种分布都被标准化为具有零均值和单位方差. u_{2i} 的数据由下式生成: $u_{2i} = \sqrt{0.5}u_{1i} + \sqrt{0.5}u_{1i}^*$, 其中 u_{1i}^* 服从标准正态分布且与 u_{1i} 相互独立.

在计算我们的估计量时, 为简单起见, 我们用示性函数 $1\{\cdot > 0\}$ 代替样本目标函数中的光滑化函数 $w_1(\cdot)$ 和 $w_2(\cdot)$, 并设定赋权函数为 $w(t) = 1\{y_{2,0.025} \leq t \leq y_{2,0.975}\}$, 其中 $y_{2,\theta}$ 表示 y_{2i} 样本的 θ 分位数. 实验表明, 对这个分位数的微小调整并不会对模拟结果产生明显的影响. 我们采用单纯形法求解样本目标函数的最小值点.

样本容量选定为 200 和 800, 每种设计重复 1000 次, 并报告估计量的偏差 (bias)、标准差 (sd) 以及均方根误差 (rmse). 因为 Honoré 和 Powell [2] 已对第 1 步估计量 $\hat{\alpha}$ 的小样本表现进行了详细的分析, 所以本节仅报告第 2 步估计量 $\hat{\beta}$ 的模拟结果. 从表 1 和 2 可以看到, 我们的估计量和 Honoré 等人的估计量均有着良好的表现, 且随着样本容量的增加, 表现越来越好. 然而, 由于没有考虑主方程因变量的删失过程, Chen 估计量的偏差非常大, 即使当样本容量达到 800 时, 它们的偏差也没有显示出下降的趋势, 印证了 $\hat{\beta}_{\text{Chen,I}}$ 和 $\hat{\beta}_{\text{Chen,II}}$ 并不是模型 (1.1) 和 (1.2) 中 β_0 的相合估计. 从均方根误差的角度来看, 另外四种相合估计量的表现十分相似, 其中 $\hat{\beta}^{(2)}$ 略胜于 $\hat{\beta}^{(1)}$, $\hat{\beta}_{\text{HKUabs}}$ 则略胜于 $\hat{\beta}_{\text{HKUsqu}}$. 当样本量较小时, $\hat{\beta}_{\text{HKUabs}}$ 的表现稍优于 $\hat{\beta}^{(2)}$, 但当样本量增加到 800 时, $\hat{\beta}^{(2)}$ 则更胜一筹.

为考察主方程因变量具有不同的删失比例时各估计量的表现, 我们在 (4.1) y_{2i}^* 的生成过程中引入一个截距项, 即 $y_{2i}^* = c_0 + x_{1i} + 2x_{2i} + u_{2i}$. 由于扰动项的非参数性, c_0 不能被识别, 因此引入 c_0 的唯一作用在于调整 y_{2i}^* 的删失比例. 表 1 和 2 已经考虑了 $c_0 = 0$ 的情形, 这时的删失比例约为 50%. 当 $c_0 < 0$ ($c_0 > 0$) 时, y_{2i}^* 的删失比例会大于 (小于) 50%. 引入 c_0 后, 四种相合估计量的表现仍然十分相

表 1 $n = 200$ 的模拟结果

	Ours1	Ours2	Chen I	Chen II	HKUabs	HKUsqu							
标准正态	bias	-0.0181	0.0200	-0.0207	0.0151	-0.0507	-0.2200	-0.1356	-0.2233	-0.0243	0.0064	-0.0272	0.0009
	sd	0.1347	0.1804	0.1280	0.1625	0.1266	0.1276	0.1203	0.1435	0.1284	0.1489	0.1284	0.1574
	rmse	0.1358	0.1814	0.1296	0.1631	0.1363	0.2542	0.1812	0.2654	0.1306	0.1490	0.1312	0.1573
正态 Gamma 混合	bias	-0.0065	0.0164	-0.0083	0.0128	-0.0433	-0.2180	-0.1158	-0.2069	-0.0123	0.0043	-0.0123	0.0046
	sd	0.1429	0.1867	0.1394	0.1749	0.1329	0.1359	0.1287	0.1578	0.1357	0.1595	0.1381	0.1736
	rmse	0.1429	0.1873	0.1396	0.1753	0.1397	0.2568	0.1731	0.2602	0.1362	0.1595	0.1386	0.1736
负正态 Gamma 混合	bias	-0.0115	0.0194	-0.0135	0.0154	-0.0401	-0.2028	-0.1322	-0.2291	-0.0172	0.0075	-0.0194	0.0031
	sd	0.1321	0.1813	0.1249	0.1568	0.1187	0.1210	0.1149	0.1317	0.1215	0.1420	0.1236	0.1503
	rmse	0.1326	0.1822	0.1255	0.1575	0.1252	0.2361	0.1751	0.2642	0.1226	0.1421	0.1251	0.1503
对数正态	bias	0.0117	0.0001	0.0167	0.0078	-0.0303	-0.1815	-0.0717	-0.1635	0.0119	-0.0010	0.0132	0.0058
	sd	0.1563	0.1770	0.1651	0.1805	0.1464	0.1487	0.1570	0.2071	0.1607	0.1722	0.1695	0.2450
	rmse	0.1566	0.1770	0.1659	0.1806	0.1494	0.2346	0.1725	0.2638	0.1611	0.1722	0.1699	0.2449
卡方(1)	bias	0.0067	0.0038	0.0104	0.0116	-0.0345	-0.1941	-0.0831	-0.1734	0.0031	-0.0026	0.0016	-0.0058
	sd	0.1553	0.1745	0.1584	0.1872	0.1484	0.1524	0.1507	0.2006	0.1564	0.1848	0.1662	0.2158
	rmse	0.1554	0.1745	0.1586	0.1875	0.1523	0.2467	0.1720	0.2651	0.1563	0.1848	0.1661	0.2158
指数分布混合	bias	0.0328	-0.0056	0.0331	-0.0051	-0.0172	-0.1651	-0.0602	-0.1869	0.0338	-0.0044	0.0329	-0.0053
	sd	0.1212	0.1484	0.1206	0.1428	0.1225	0.1217	0.1196	0.1408	0.1209	0.1362	0.1215	0.1493
	rmse	0.1255	0.1484	0.1250	0.1428	0.1236	0.2050	0.1338	0.2340	0.1255	0.1362	0.1258	0.1493

表 2 $n = 800$ 的模拟结果

	Ours1	Ours2	Chen I	Chen II	HKUabs	HKUsqu
标准正态	bias -0.0110	0.0273 -0.0136	0.0219 -0.0455	-0.2211 -0.1300	-0.2169 -0.0173	0.0144 -0.0194
	sd	0.0679 0.0855	0.0659 0.0781	0.0594 0.0601	0.0624 0.0775	0.0654 0.0770
	rmse	0.0687 0.0897	0.0672 0.0811	0.0748 0.2291	0.1441 0.2303	0.0676 0.0783
正态 Gamma 混合	bias -0.0114	0.0186 -0.0172	0.0065 -0.0600	-0.2339 -0.1258	-0.2152 -0.0203	0.0004 -0.0218
	sd	0.0716 0.0833	0.0717 0.0799	0.0654 0.0669	0.0670 0.0814	0.0712 0.0806
	rmse	0.0725 0.0853	0.0738 0.0802	0.0887 0.2433	0.1426 0.2301	0.0740 0.0805
负正态 Gamma 混合	bias -0.0035	0.0324 -0.0069	0.0256 -0.0352	-0.2061 -0.1280	-0.2220 -0.0104	0.0185 -0.0116
	sd	0.0664 0.0892	0.0624 0.0792	0.0580 0.0604	0.0725 0.0625	0.0777 0.0624
	rmse	0.0665 0.0949	0.0627 0.0832	0.0678 0.2147	0.1414 0.2335	0.0633 0.0799
对数正态	bias 0.0107	-0.0091 0.0112	-0.0082 -0.0345	-0.1908 -0.0693	-0.1664 0.0118	-0.0073 0.0135
	sd	0.0746 0.0843	0.0756 0.0851	0.0694 0.0739	0.0783 0.1125	0.0771 0.0876
	rmse	0.0753 0.0847	0.0763 0.0854	0.0775 0.2046	0.1045 0.2008	0.0779 0.0879
卡方(1)	bias 0.0062	0.0032 0.0056	0.0019 -0.0402	-0.2028 -0.0791	-0.1663 0.0031	-0.0029 0.0075
	sd	0.0759 0.0848	0.0780 0.0883	0.0723 0.0797	0.0788 0.1137	0.0778 0.0920
	rmse	0.0762 0.0848	0.0781 0.0883	0.0827 0.2179	0.1116 0.2014	0.0778 0.0920
指数分布混合	bias 0.0307	-0.0065 0.0289	-0.0101 -0.0271	-0.1787 -0.0668	-0.1956 0.0308	-0.0065 0.0289
	sd	0.0561 0.0654	0.0560 0.0631	0.0544 0.0593	0.0602 0.0737	0.0575 0.0645
	rmse	0.0639 0.0657	0.0630 0.0639	0.0608 0.1883	0.0899 0.2090	0.0652 0.0648

似, 且 $\hat{\beta}_{\text{Chen,I}}$ 的表现总体上优于 $\hat{\beta}_{\text{Chen,II}}$, 因此表 3-6 仅比较 $\hat{\beta}^{(1)}$ 和 $\hat{\beta}_{\text{Chen,I}}$ 的模拟结果; 为进一步节省篇幅, 我们只报告前三种设计的结果. 六种估计量的完整结果可向作者索取.

表 3-6 分别报告了 c_0 取 -1 、 -0.5 、 0.5 和 1 的模拟结果. 与预期相符, 随着 c_0 从 -1 增加到 1 , Chen 估计量的表现得到了显著的改善. 当 c_0 等于 1 时, Chen 估计量的偏差甚至降到了相合估计量 $\hat{\beta}^{(1)}$ 的偏差水平, 且从均方根误差的角度来看优于相合估计量 $\hat{\beta}^{(1)}$. 这是因为, 随着 c_0 的增加, 主方程因变量的删失比例下降, 模型 (1.1) 和 (1.2) 更接近于第三类 Tobit 模型, 而对于后者而言, Chen 估计量已被证明具有相合性以及渐近正态性. 但是, 当 y_{2i}^* 的删失比例较大时, 如 c_0 等于 -1 的情形, $\hat{\beta}_{\text{Chen,I}}$ 的偏差会变得很大, 有限样本表现严重恶化, 而此时我们的估计量仍然有着稳定且优良的表现, 是 Chen 估计量的一个重要补充.

表 3 $c_0 = -1$ 时的模拟结果

		Ours1				Chen I			
		$n = 200$				$n = 800$			
标准正态	bias	-0.0068	-0.0244	-0.1248	-0.5230	-0.0074	-0.0338	-0.1261	-0.5313
	sd	0.1729	0.2262	0.1213	0.1358	0.0896	0.1210	0.0574	0.0618
	rmse	0.1729	0.2274	0.1740	0.5403	0.0898	0.1255	0.1385	0.5349
正态 Gamma 混合	bias	0.0037	-0.0162	-0.1176	-0.5115	-0.0014	-0.0288	-0.1353	-0.5385
	sd	0.1842	0.2316	0.1329	0.1408	0.0916	0.1146	0.0650	0.0695
	rmse	0.1841	0.2320	0.1775	0.5305	0.0916	0.1181	0.1501	0.5430
负正态 Gamma 混合	bias	-0.0015	-0.0172	-0.1188	-0.5195	-0.0033	-0.0354	-0.1155	-0.5195
	sd	0.1677	0.2019	0.1179	0.1267	0.0862	0.1161	0.0581	0.0608
	rmse	0.1676	0.2026	0.1673	0.5347	0.0863	0.1213	0.1293	0.5230

表 4 $c_0 = -0.5$ 时的模拟结果

		Ours1				Chen I			
		$n = 200$				$n = 800$			
标准正态	bias	-0.0247	-0.0069	-0.0752	-0.3514	-0.0315	-0.0053	-0.0797	-0.3560
	sd	0.1510	0.2050	0.1239	0.1240	0.0879	0.1303	0.0612	0.0640
	rmse	0.1529	0.2050	0.1449	0.3726	0.0933	0.1303	0.1005	0.3617
正态 Gamma 混合	bias	-0.0260	0.0016	-0.0813	-0.3527	-0.0243	-0.0013	-0.0906	-0.3643
	sd	0.1636	0.2156	0.1360	0.1432	0.0889	0.1323	0.0640	0.0673
	rmse	0.1656	0.2155	0.1584	0.3806	0.0921	0.1323	0.1109	0.3705
负正态 Gamma 混合	bias	-0.0255	-0.0029	-0.0726	-0.3477	-0.0296	-0.0184	-0.0671	-0.3445
	sd	0.1517	0.2018	0.1183	0.1242	0.0821	0.1293	0.0583	0.0640
	rmse	0.1538	0.2017	0.1388	0.3692	0.0873	0.1305	0.0889	0.3504

表5 $c_0 = 0.5$ 时的模拟结果

		Ours1		Chen I		Ours1		Chen I	
		$n = 200$				$n = 800$			
标准正态	bias	0.0230	0.0090	-0.0246	-0.1235	0.0274	0.0142	-0.0231	-0.1272
	sd	0.1418	0.1926	0.1221	0.1211	0.0780	0.1126	0.0590	0.0587
	rmse	0.1436	0.1927	0.1245	0.1729	0.0826	0.1134	0.0633	0.1401
正态 Gamma 混合	bias	0.0305	0.0142	-0.0259	-0.1280	0.0335	0.0331	-0.0361	-0.1366
	sd	0.1543	0.1978	0.1329	0.1310	0.0876	0.1241	0.0653	0.0615
	rmse	0.1573	0.1982	0.1353	0.1831	0.0937	0.1284	0.0746	0.1498
负正态 Gamma 混合	bias	0.0348	0.0146	-0.0129	-0.1111	0.0320	0.0192	-0.0155	-0.1127
	sd	0.1414	0.1847	0.1192	0.1154	0.0801	0.1256	0.0587	0.0581
	rmse	0.1455	0.1852	0.1199	0.1601	0.0862	0.1270	0.0606	0.1267

表6 $c_0 = 1$ 时的模拟结果

		Ours1		Chen I		Ours1		Chen I	
		$n = 200$				$n = 800$			
标准正态	bias	0.0808	0.0009	-0.0096	-0.0562	0.0622	-0.0335	-0.0127	-0.0602
	sd	0.1547	0.1876	0.1298	0.1182	0.0771	0.1055	0.0602	0.0572
	rmse	0.1744	0.1875	0.1301	0.1308	0.0990	0.1107	0.0615	0.0830
正态 Gamma 混合	bias	0.0872	0.0065	-0.0152	-0.0678	0.0665	-0.0298	-0.0230	-0.0775
	sd	0.1531	0.1913	0.1314	0.1304	0.0844	0.1115	0.0661	0.0609
	rmse	0.1762	0.1914	0.1322	0.1469	0.1074	0.1154	0.0699	0.0985
负正态 Gamma 混合	bias	0.0846	0.0009	-0.0074	-0.0446	0.0768	-0.0205	-0.0035	-0.0467
	sd	0.1406	0.1664	0.1177	0.1115	0.0796	0.1112	0.0593	0.0549
	rmse	0.1641	0.1663	0.1179	0.12	0.1106	0.113	0.0594	0.0721

5 总结

本文基于受限因变量的条件分布函数, 为带删失的第三类 Tobit 模型提出一种新的半参数两步估计方法, 并证明了估计量的相合性和渐近正态性. 数值模拟实验表明我们的估计量在有限样本下有着良好的表现, 且在部分设计下优于 Honoré 等人的估计量, 尤其当样本量较大时优势更加明显. 在与 Chen 估计量的比较中我们发现, 虽然当主方程因变量的删失比例较小时 Chen 估计量的表现良好, 但在大多数情形下, 我们的估计量都有更优的表现.

致谢 作者诚挚地感谢审稿人和编辑提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Amemiya T. Advanced Econometrics. Cambridge: Harvard University Press, 1985
- 2 Honoré B E, Powell J L. Pairwise difference estimators of censored and truncated regression models. J Econom, 1994, 64: 241–278
- 3 周先波. 归并数据回归模型的半参数估计方法. 系统工程理论与实践, 2012, 32: 60–66
- 4 Chen S. Semiparametric estimation of the Type-3 Tobit model. J Econom, 1997, 80: 1–34
- 5 Honoré B E, Kyriazidou E, Udry C. Estimation of Type 3 Tobit models using symmetric trimming and pairwise comparisons. J Econom, 1997, 76: 107–128
- 6 Lee L F. Semiparametric two-stage estimation of sample selection models subject to tobit-type selection rules. J Econom, 1994, 61: 305–344
- 7 Li Q, Wooldridge J M. Semiparametric estimation of partially linear models for dependent data with generated regressors. Econom Theory, 2002, 18: 625–645
- 8 Min I, Sheu S J. A Monte Carlo comparison of various semiparametric Type-3 Tobit estimators. Ann Econ Financ, 2003, 4: 125–136
- 9 Pakes A, Pollard D. Simulation and the asymptotics of optimization estimators. Econometrica, 1989, 57: 1027–1057
- 10 Sherman R P. The limiting distribution of the maximum rank correlation estimator. Econometrica, 1993, 61: 123–128
- 11 Chen S, Zhou X. Semiparametric estimation of a truncated regression model. J Econom, 2012, 167: 297–304
- 12 Powell J L. Least absolute deviations estimation for the censored regression model. J Econom, 1984, 25: 303–325
- 13 Buchinsky M. A Monte Carlo study of the asymptotic covariance estimators for quantile regression estimators. J Econom, 1994, 68: 303–338
- 14 Sherman R P. Maximal inequalities for degenerate U -process with application to optimization estimators. Ann Stat, 1994, 22: 439–459

附录 A

定理 1 的证明 先证相合性. 由极值估计量的相合性定理 (如文献 [1] 的定理 9.6.1), 要证明 $\hat{\beta}^{(1)} = \arg \min_{\beta \in \Theta_2} Q_n(\beta; \hat{\alpha})$ 是真实参数 β_0 的相合估计, 只需验证如下四点: (i) 参数空间 Θ_2 是紧的; (ii) 样本目标函数 $Q_n(\beta; \hat{\alpha})$ 依概率在 Θ_2 上一致收敛于总体目标函数 $Q(\beta; \alpha_0)$; (iii) β_0 是 $Q(\beta; \alpha_0)$ 的唯一最小值点; (iv) $Q(\beta; \alpha_0)$ 是 β 的连续函数. 由于 (A2)、(A3) 和 (A7) 分别保证了 (i)、(iii) 和 (iv), 因此下面证明 (ii) 成立. 先把 $A_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta)$ 写为

$$A_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) = A_n(t, x_i, \alpha_0, \beta) + [A_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) - A_n(t, x_i, \alpha_0, \beta)].$$

注意到

$$\begin{aligned} & |A_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) - A_n(t, x_i, \alpha_0, \beta)| \\ &= \left| \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n [1\{y_{1j} > x_{1ji}\hat{\alpha}\}w_1(x_{1ji}\hat{\alpha}) - 1\{y_{1j} > x_{1ji}\alpha_0\}w_1(x_{1ji}\alpha_0)]1\{y_{2j} > t + x_{2ji}\beta\}w_2(t + x_{2ji}\beta) \right| \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n [1\{y_{1j} > x_{1ji}\hat{\alpha}\}w_1(x_{1ji}\hat{\alpha}) - 1\{y_{1j} > x_{1ji}\alpha_0\}w_1(x_{1ji}\alpha_0)]^2}, \end{aligned}$$

其中 $x_{1ji}\alpha = (x_{1j} - x_{1i})\alpha$, $x_{2ji}\beta = (x_{2j} - x_{2i})\beta$. 由文献 [9] 的引理 12 和引理 8, 我们可以证明

$$\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n [1\{y_{1j} > x_{1ji}\hat{\alpha}\}w_1(x_{1ji}\hat{\alpha}) - 1\{y_{1j} > x_{1ji}\alpha_0\}w_1(x_{1ji}\alpha_0)]^2 = o_p(1),$$

因此 $A_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) - A_n(t, x_i, \alpha_0, \beta) = o_p(1)$ 对于 $t \in (0, \infty)$, $x_i \in \Omega$ 和 $\beta \in \Theta_2$ 一致地成立. 另一方面, 由引理 A1 知 $A_n(t, x_i, \alpha_0, \beta)$ 依概率一致收敛于 $A(t, x_i, \alpha_0, \beta)$, 因此我们有 $A_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) = A(t, x_i, \alpha_0, \beta) + o_p(1)$ 对于 $t \in (0, \infty)$, $x_i \in \Omega$ 和 $\beta \in \Theta_2$ 一致地成立. 同理, $B_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) = B(t, x_i, \alpha_0, \beta) + o_p(1)$ 对于 $t \in (0, \infty)$, $x_i \in \Omega$ 和 $\beta \in \Theta_2$ 一致地成立. 结合 (A4), 便有 $\tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) = \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta) + o_p(1)$ 对于 $t \in (0, \infty)$, $x_i \in \Omega$ 和 $\beta \in \Theta_2$ 一致地成立. 记

$$Q_{1n}(\beta; \alpha_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty [1\{y_{1i} > 0, y_{2i} > t\} - \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta)]^2 w(t) dt.$$

由于 $|\tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta)| \leq 1$ 和 $|\tau(t, x_i, \alpha_0, \beta)| \leq 1$, 因此

$$\sup_{\beta \in \Theta_2} |Q_n(\beta; \hat{\alpha}) - Q_{1n}(\beta; \alpha_0)| \leq \sup_{\beta \in \Theta_2} 4 \int_0^\infty \max_i |\tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) - \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta)| w(t) dt = o_p(1).$$

另一方面, 由一致大数定律 (如文献 [1] 的定理 4.2.1) 容易证明 $Q_{1n}(\beta; \alpha_0)$ 依概率一致收敛于 $Q(\beta; \alpha_0)$, 因此 $Q_n(\beta; \hat{\alpha})$ 依概率一致收敛于 $Q(\beta; \alpha_0)$, 即 (ii) 成立. 所以, $\hat{\beta}^{(1)}$ 是 β_0 的相合估计.

现在证明渐近正态性. 先把样本目标函数分解为三项之和,

$$Q_n(\beta; \hat{\alpha}) = Q_{1n}(\beta; \hat{\alpha}) + Q_{2n}(\beta; \hat{\alpha}) + Q_{3n}(\beta; \hat{\alpha}),$$

其中

$$Q_{1n}(\beta; \hat{\alpha}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty [d_{it} - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta)]^2 w(t) dt,$$

$$Q_{2n}(\beta; \hat{\alpha}) = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty [d_{it} - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta)][\tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta)] w(t) dt,$$

$$Q_{3n}(\beta; \hat{\alpha}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty [\tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta)]^2 w(t) dt,$$

这里 $d_{it} \equiv 1\{y_{1i} > 0, y_{2i} > t\}$. 下面对这三项分别进行分析.

对于第一项, 由 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned} & Q_{1n}(\beta; \hat{\alpha}) - Q_{1n}(\beta_0; \hat{\alpha}) \\ &= -(\beta - \beta_0)' \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty [d_{it} - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0)] \frac{\partial \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0)}{\partial \beta} w(t) dt \\ &\quad - (\beta - \beta_0)' \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \left\{ [d_{it} - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0)] \frac{\partial^2 \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0)}{\partial \beta \partial \beta'} - \frac{\partial \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0)}{\partial \beta} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0)}{\partial \beta'} \right\} w(t) dt (\beta - \beta_0) + o_p(|\beta - \beta_0|^2) \\ &= -(\beta - \beta_0)' \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty [d_{it} - \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)] \frac{\partial \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta} w(t) dt \\ &\quad - (\beta - \beta_0)' \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \left\{ [d_{it} - \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)] \frac{\partial^2 \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta \partial \alpha'} - \frac{\partial \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\partial \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \alpha'} \Big\} w(t) dt (\hat{\alpha} - \alpha_0) \\
& - (\beta - \beta_0)' \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \left\{ [d_{it} - \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)] \frac{\partial^2 \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta \partial \beta'} - \frac{\partial \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta} \right. \\
& \times \frac{\partial \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta'} \Big\} w(t) dt (\beta - \beta_0) + o_p(|\beta - \beta_0|^2) + o_p\left(\frac{|\beta - \beta_0|}{\sqrt{n}}\right) \\
& = -\frac{2}{\sqrt{n}} (\beta - \beta_0)' W_{1n} + 2(\beta - \beta_0)' V_{\beta\alpha} (\hat{\alpha} - \alpha_0) + (\beta - \beta_0)' V_{\beta\beta} (\beta - \beta_0) \\
& + o_p(|\beta - \beta_0|^2) + o_p\left(\frac{|\beta - \beta_0|}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

在 β_0 的 $o_p(1)$ 邻域内一致地成立, 其中 $W_{1n} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n v_{1i}$, 而 v_{1i} 、 $V_{\beta\alpha}$ 和 $V_{\beta\beta}$ 分别在 (3.3)、(3.2) 和 (3.1) 中定义.

对于第二项, 由引理 A2 知

$$Q_{2n}(\beta; \hat{\alpha}) - Q_{2n}(\beta_0; \hat{\alpha}) = \frac{2}{\sqrt{n}} (\beta - \beta_0)' W_{2n} + o_p\left(\frac{|\beta - \beta_0|}{\sqrt{n}}\right) + o_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

在 β_0 的 $o_p(1)$ 邻域内一致地成立, 其中 $W_{2n} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n v_{2i}$, 而 v_{2i} 在 (3.4) 中定义.

现在我们分析第三项. 由引理 A1, 我们有

$$\begin{aligned}
& [\tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta)]^2 - [\tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0) - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0)]^2 \\
& = \{[\tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta)] - [\tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0) - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0)]\} \\
& \quad \times \{[\tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta)] + [\tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0) - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0)]\} \\
& = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
& = o_p\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

在 $t \in (0, \infty)$, $x_i \in \Omega$ 和 β_0 的 $o_p(1)$ 邻域内一致地成立, 因此 $Q_{3n}(\beta; \hat{\alpha}) - Q_{3n}(\beta_0; \hat{\alpha}) = o_p(1/n)$ 在 β_0 的 $o_p(1)$ 邻域内一致地成立.

结合 (A6) 和以上三项的分析, 我们有

$$\begin{aligned}
Q_n(\beta; \hat{\alpha}) - Q_n(\beta_0; \hat{\alpha}) & = -\frac{2}{\sqrt{n}} (\beta - \beta_0)' W_n + (\beta - \beta_0)' V_{\beta\beta} (\beta - \beta_0) \\
& + o_p(|\beta - \beta_0|^2) + o_p\left(\frac{|\beta - \beta_0|}{\sqrt{n}}\right) + o_p\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

在 β_0 的 $o_p(1)$ 邻域内一致地成立, 其中

$$W_n = W_{1n} - W_{2n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n V_{\beta\alpha} \phi_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (v_{1i} - v_{2i} - V_{\beta\alpha} \phi_i) \rightarrow N(0, \Gamma).$$

再由 (A7) 和文献 [10] 的定理 1 和定理 2, 即可得到 $\sqrt{n}(\hat{\beta}^{(1)} - \beta_0) \rightarrow N(0, V_{\beta\beta}^{-1} \Gamma V_{\beta\beta}^{-1})$. $\square$

引理 A1 如果 (A1)–(A5) 成立, 那么

$$\tau_n(t, x_i, \alpha, \beta) - \tau(t, x_i, \alpha, \beta) = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

和

$$(\tau_n(t, x_i, \alpha, \beta) - \tau(t, x_i, \alpha, \beta)) - (\tau_n(t, x_i, \alpha_0, \beta_0) - \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)) = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

在 $t \in (0, \infty)$, $x_i \in \Omega$, α_0 的 $o_p(1)$ 邻域和 β_0 的 $o_p(1)$ 邻域内一致地成立.

证明 仿照文献 [9], 容易验证函数类

$$\{q_0(t, x_i, z, \alpha, \beta) : t \in (0, \infty), x_i \in \Omega, \alpha \in \Theta_1, \beta \in \Theta_2\}$$

具有 Euclid 性质, 其中

$$q_0(t, x_i, z, \alpha, \beta) = 1\{y_1 > (x_1 - x_{1i})\alpha, y_2 > t + (x_2 - x_{2i})\beta\}w_1((x_1 - x_{1i})\alpha)w_2(t + (x_2 - x_{2i})\beta).$$

因此, 由文献 [14] 的推论 7 可得 $A_n(t, x_i, \alpha, \beta) - A(t, x_i, \alpha, \beta) = O_p(1/\sqrt{n})$ 对于 $t \in (0, \infty)$, $x_i \in \Omega$, $\alpha \in \Theta_1$ 和 $\beta \in \Theta_2$ 一致地成立. 同理可证得 $B_n(t, x_i, \alpha, \beta) - B(t, x_i, \alpha, \beta) = O_p(1/\sqrt{n})$ 对于 $t \in (0, \infty)$, $x_i \in \Omega$, $\alpha \in \Theta_1$ 和 $\beta \in \Theta_2$ 一致地成立. 由此,

$$\begin{aligned} & \tau_n(t, x_i, \alpha, \beta) - \tau(t, x_i, \alpha, \beta) \\ &= \frac{A_n(t, x_i, \alpha, \beta) - B_n(t, x_i, \alpha, \beta)\tau(t, x_i, \alpha, \beta)}{B_n(t, x_i, \alpha, \beta)} \\ &= \frac{A_n(t, x_i, \alpha, \beta) - B_n(t, x_i, \alpha, \beta)\tau(t, x_i, \alpha, \beta)}{B(t, x_i, \alpha, \beta)} \\ &\quad - \frac{[A_n(t, x_i, \alpha, \beta) - B_n(t, x_i, \alpha, \beta)\tau(t, x_i, \alpha, \beta)][B_n(t, x_i, \alpha, \beta) - B(t, x_i, \alpha, \beta)]}{B^2(t, x_i, \alpha, \beta)} + o_p\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= U_{n1}(t, x_i, \alpha, \beta) + O_p\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

其中

$$U_{n1}(t, x_i, \alpha, \beta) = \frac{A_n(t, x_i, \alpha, \beta) - B_n(t, x_i, \alpha, \beta)\tau(t, x_i, \alpha, \beta)}{B(t, x_i, \alpha, \beta)} = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n q_1(t, x_i, z_j, \alpha, \beta),$$

这里

$$q_1(t, x_i, z_j, \alpha, \beta) = \frac{w_1(x_{1ji}\alpha)w_2(t + x_{1ji}\beta)}{B(t, x_i, \alpha, \beta)} [1\{y_{1j} > x_{1ji}\alpha, y_{2j} > t + x_{2ji}\beta\} - \tau(t, x_i, \alpha, \beta)].$$

容易验证函数类 $\{q_1(t, x_i, z, \alpha, \beta) : t \in (0, \infty), x_i \in \Omega, \alpha \in \Theta_1, \beta \in \Theta_2\}$ 具有 Euclidean 性质, 且 $E[q_1(t, x_i, z_j, \alpha, \beta) | x_i] = 0$, 因此由文献 [14] 的推论 7 和推论 8 即可得到

$$U_{n1}(t, x_i, \alpha, \beta) = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

和

$$U_{n1}(t, x_i, \alpha, \beta) - U_{n1}(t, x_i, \alpha_0, \beta_0) = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

在 $t \in (0, \infty)$, $x_i \in \Omega$, α_0 的 $o_p(1)$ 邻域和 β_0 的 $o_p(1)$ 邻域内一致地成立. $\square$

引理 A2 如果 (A1)–(A7) 成立, 那么

$$Q_{2n}(\beta; \hat{\alpha}) - Q_{2n}(\beta_0; \hat{\alpha}) = \frac{2}{\sqrt{n}}(\beta - \beta_0)'W_{2n} + o_p\left(\frac{|\beta - \beta_0|}{\sqrt{n}}\right) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

在 β_0 的 $o_p(1)$ 邻域内一致地成立, 其中 $W_{2n} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n v_{2i}$, 而 v_{2i} 在 (3.4) 中定义.

证明 把 $Q_{2n}(\beta; \hat{\alpha})$ 分解为 $Q_{2n}(\beta; \hat{\alpha}) = Q_{2n1}(\beta; \hat{\alpha}) - Q_{2n2}(\beta; \hat{\alpha})$, 其中

$$Q_{2n1}(\beta; \hat{\alpha}) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty [\tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0)][\tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta)]w(t)dt,$$

$$Q_{2n2}(\beta; \hat{\alpha}) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty [d_{it} - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0)][\tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta)]w(t)dt.$$

我们首先考察 $Q_{2n1}(\beta; \hat{\alpha})$. 由 Taylor 展开以及引理 A1, 可得

$$\begin{aligned} & Q_{2n1}(\beta; \hat{\alpha}) - Q_{2n1}(\beta_0; \hat{\alpha}) \\ &= (\beta - \beta_0)' \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \frac{\partial \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0)}{\partial \beta} [\tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta)]w(t)dt + o_p\left(\frac{|\beta - \beta_0|}{\sqrt{n}}\right) \\ &= (\beta - \beta_0)' \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \frac{\partial \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta} [\tau_n(t, x_i, \alpha_0, \beta_0) - \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)]w(t)dt + o_p\left(\frac{|\beta - \beta_0|}{\sqrt{n}}\right) \\ &= (\beta - \beta_0)' \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \frac{\partial \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta} U_{n1}(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)w(t)dt + o_p\left(\frac{|\beta - \beta_0|}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

在 β_0 的 $o_p(1)$ 邻域内一致地成立. 记

$$U_{n2}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta} U_{n1}(t, x_i, \alpha_0, \beta_0) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n q_2(t, x_i, z_j),$$

其中 $q_2(t, x_i, z_j) = \frac{\partial \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta} q_1(t, x_i, z_j, \alpha_0, \beta_0)$, 那么

$$Q_{2n1}(\beta; \hat{\alpha}) - Q_{2n1}(\beta_0; \hat{\alpha}) = 2(\beta - \beta_0)' \int_0^\infty U_{n2}(t)w(t)dt + o_p\left(\frac{|\beta - \beta_0|}{\sqrt{n}}\right).$$

容易验证函数类 $\{q_2(t, x_i, z_j) : t \in (0, \infty)\}$ 具有 Euclid 性质, 且 $E[q_2(t, x_i, z_j) | x_i] = 0$, 因此由 Sherman^[10] 的 U 统计量分解方法可证得

$$U_{n2}(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n E[q_2(t, x_j, z_i) | z_i] + O_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

在 $t \in (0, \infty)$ 上一致地成立. 所以,

$$Q_{2n1}(\beta; \hat{\alpha}) - Q_{2n1}(\beta_0; \hat{\alpha}) = \frac{2}{\sqrt{n}} (\beta - \beta_0)' W_{2n} + o_p\left(\frac{|\beta - \beta_0|}{\sqrt{n}}\right)$$

在 β_0 的 $o_p(1)$ 邻域内一致地成立.

接下来分析 $Q_{2n2}(\beta; \hat{\alpha})$. 根据引理 A1, 我们有

$$\begin{aligned} & Q_{2n2}(\beta; \hat{\alpha}) - Q_{2n2}(\beta_0; \hat{\alpha}) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty v_{it} \{[\tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta) - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta)] - [\tau_n(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0) - \tau(t, x_i, \hat{\alpha}, \beta_0)]\}w(t)dt + o_p\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 2 \int_0^\infty \{[U_{n3}(t, \hat{\alpha}, \beta) - U_{n3}(t, \hat{\alpha}, \beta_0)] - [U_{n4}(t, \hat{\alpha}, \beta) - U_{n4}(t, \hat{\alpha}, \beta_0)]\}w(t)dt + o_p\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

其中 $v_{it} = d_{it} - \tau(t, x_i, \alpha_0, \beta_0)$,

$$U_{n3}(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_{it} U_{n1}(t, x_i, \alpha, \beta),$$

$$U_{n4}(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_{it} U_{n1}(t, x_i, \alpha, \beta) \frac{B_n(t, x_i, \alpha, \beta) - B(t, x_i, \alpha, \beta)}{B(t, x_i, \alpha, \beta)}.$$

如果记 $q_3(t, z_i, z_j, \alpha, \beta) = v_{it} q_1(t, x_i, z_j, \alpha, \beta)$, 那么 $U_{n3}(t, \alpha, \beta)$ 可以写为

$$U_{n3}(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n q_3(t, z_i, z_j, \alpha, \beta).$$

注意到函数类 $\{q_3(t, z_i, z_j, \alpha, \beta) : t \in (0, \infty), \alpha \in \Theta_1, \beta \in \Theta_2\}$ 具有 Euclid 性质, 且满足 $E[q_3(t, z_i, z_j, \alpha, \beta) | z_i] = 0$ 和 $E[q_3(t, z_i, z_j, \alpha, \beta) | z_j] = 0$, 因此由文献 [14] 的推论 8 可得

$$U_{n3}(t, \alpha, \beta) - U_{n3}(t, \alpha, \beta_0) = o_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

在 $t \in (0, \infty)$, $\alpha \in \Theta_1$ 和 β_0 的 $o_p(1)$ 邻域内一致地成立. 同理, 通过对三阶 U 统计量 $U_{n4}(t, \alpha, \beta)$ 进行分析, 可以证得 $U_{n4}(t, \alpha, \beta) - U_{n4}(t, \alpha, \beta_0) = o_p(n^{-3/2})$ 在 $t \in (0, \infty)$, $\alpha \in \Theta_1$ 和 β_0 的 $o_p(1)$ 邻域内一致地成立. 因此, $Q_{2n2}(\beta; \hat{\alpha}) - Q_{2n2}(\beta_0; \hat{\alpha}) = o_p(1/n)$ 在 β_0 的 $o_p(1)$ 邻域内一致地成立.

综上所述可得

$$Q_{2n}(\beta; \hat{\alpha}) - Q_{2n}(\beta_0; \hat{\alpha}) = \frac{2}{\sqrt{n}}(\beta - \beta_0)' W_{2n} + o_p\left(\frac{|\beta - \beta_0|}{\sqrt{n}}\right) + o_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

在 β_0 的 $o_p(1)$ 邻域内一致地成立. □

Semiparametric estimation of a censored Type-3 Tobit model

ZHOU XianBo & PAN ZheWen

Abstract This paper presents a two-step semiparametric estimation approach to the censored Type-3 Tobit model based on the entire conditional distribution of the limited dependent variables. The estimator is shown to be consistent and asymptotically normal. Simulation designs show that our estimator performs well in a variety of designs. In comparing with existing estimators, we conclude that our estimator is an important complement to the literature when the censoring rate of the main equation is moderately large or/and when the sample size is large.

Keywords censored Type-3 Tobit model, semiparametric estimation, two-step estimation, asymptotic normality

MSC(2010) 62G05, 62G20

doi: 10.1360/012015-18