双圆柱区域上的高阶四元数函数的 Dirichlet 边值问题

杨丕文

四川师范大学数学系, 成都 610066

E-mail: ypwen1@sina.com

收稿日期: 2009-06-24; 接受日期: 2011-04-21

高校博士点基金 (批准号: 20095134110001) 和四川省教育厅重点项目 (批准号: 10ZA003) 资助项目

摘要 本文讨论了四元数分析中多圆柱区域上方程 $\partial_z^n u(z) = f$ 的 Dirichlet 边值问题. 获得问题的可解条件, 并当可解条件满足时, 给出了解的积分表示.

关键词 四元数分析 n - 正则函数 Dirichlet 边值问题

MSC (2000) 主题分类 30G35

1 引言

四元数分析是近些年发展起来的高维空间的函数论, 在数学物理中有广泛的应用^[1-6]. 本文利用四元数分析的方法, 研究了一类 n 阶偏微分方程的 Dirichlet 边值问题.

所谓四元数分析, 是指在四元数代数 $\mathbb{Q}$ 上建立的分析理论. 而 $\mathbb{Q}$ 是一个以 $1, i, j$ 和 k 为基元的四维实向量空间. i, j, k 满足关系:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

而

$$\mathbb{Q} = \{x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 | x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\},$$

$\mathbb{Q}$ 也可以看作二维复向量空间, 从而也记为

$$\mathbb{Q} = \{z = z_1 + jz_2 | z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}.$$

四元数函数是 $\mathbb{C}^2$ 空间中一个点集 G 到 $\mathbb{Q}$ 的映射. 即

$$F: G \rightarrow \mathbb{Q}, \\ F(z_1, z_2) = f_1(z_1, z_2) + jf_2(z_1, z_2).$$

这里 $f_1(z_1, z_2)$ 和 $f_2(z_1, z_2)$ 是定义在点集 G 上的复值函数.

英文引用格式: Yang P W. The Dirichlet boundary value problems for some quaternion functions of higher order on the polydisc (in Chinese). Sci Sin Math, 2011, 54(6): 485–496, doi: 10.1360/012009-481

设 $z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_3 + ix_4$,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} + i \frac{\partial}{\partial x_4} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} - i \frac{\partial}{\partial x_4} \right).$$

定义

$$\partial_z = 2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right),$$

其共轭算子

$$\partial_{\bar{z}} = 2 \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - j \frac{\partial}{\partial z_2} \right),$$

则有

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} \partial_z = 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} \right) = \Delta,$$

这里的 Δ 即四维 Laplace 算子.

若设 G 是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个区域, 四元数函数 $F(z) \in C^1(G)$ 且满足方程

$$\partial_z F = 0, \quad (1.1)$$

则称 $F(z)$ 是区域 G 内的左正则函数, 简称为正则函数.

设 $u(z)$ 是定义在 G 上的一个四元数函数. 若 $u(z) \in C^n(G)$ 且满足方程

$$\partial_z^n u(z) = 0, \quad (1.2)$$

则称 $u(z)$ 为区域 G 上的 n -正则四元数函数. 由于 $\partial_z^n \partial_{\bar{z}}^n = \Delta^n$, 故 n -正则四元数函数 $u(z)$ 满足方程 $\Delta^n u(z) = 0$, 从而 $u(z)$ 的每一分量函数都是 n 调和函数.

在本文中我们主要讨论多圆柱区域上方程 $\partial_z^n u(z) = f$ 的 Dirichlet 边值问题. 利用一类积分算子将其转换成 n -正则四元数函数, 并进一步化为正则四元数函数的 Dirichlet 边值问题来获得结果的.

2 n -正则函数与 T_n 算子

在 [7] 中, 我们证明了 n 阶四元数函数的 Pompeiu 公式.

定理 1 设 G 是一个有界区域, 其边界是一光滑曲面 S . 若四元数函数 $\Psi(z) \in C^n(G) \cap C^{n-1}(\bar{G})$, 当 $n > 1$ 时,

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n-2)!(n-1)!\pi^2} \int_S \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k 2^{2k} \partial_{\bar{\zeta}}^{n-k} \left[\frac{(n-1)!(n-2)!}{(n-k-1)!(n-k-2)!} r^{2(n-k-2)} \ln r^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + g_k(n) r^{2(n-k-2)} \right] \Im(\partial_{\bar{\zeta}}^{n-k-1} \Psi) + (-1)^{n-1} 2^{2(n-1)} (n-2)!(n-1)! \left(\partial_{\bar{\zeta}} \frac{1}{r^2} \right) \Im \Psi \right\} dS \end{aligned}$$

$$-\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n-2)!(n-1)!\pi^2} \int_G \partial_{\bar{\zeta}}^n (r^{2(n-2)} \ln r^2) (\partial_{\bar{\zeta}}^n \Psi) d\sigma, \quad z \in G, \quad (2.1)$$

其中

$$g_0(n) = 0, \quad g_{k+1}(n) = \frac{(n-1)!(n-2)!}{(n-k-1)!(n-k-2)!} (2n-2k-3) + (n-k-2)(n-k-1)g_k(n),$$

$$k = 0, 1, \dots, n-3.$$

由 Pompeiu 公式即可推出下列的 n -正则函数的 Cauchy 积分公式.

定理 2 若四元数函数 $w(z)$ 在光滑曲面 S 所围成的有界区域 G 内 n -正则 ($n > 1$), 且 $w(z) \in C^{n-1}(\bar{G})$, 则

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n-2)!(n-1)!\pi^2} \int_S \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k 2^{2k} \partial_{\bar{\zeta}}^{n-k} \left[\frac{(n-1)!(n-2)!}{(n-k-1)!(n-k-2)!} r^{2(n-k-2)} \ln r^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + g_k(n) r^{2(n-k-2)} \right] \Im(\partial_{\bar{\zeta}}^{n-k-1} w) + (-1)^{n-1} 2^{2(n-1)} (n-1)!(n-2)! \left(\partial_{\bar{\zeta}} \frac{1}{r^2} \right) \Im w \right\} dS \\ & = \begin{cases} w(z), & z \in G, \\ 0, & z \in \bar{G}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

用数学归纳法可以证明下列结果.

定理 3 区域 G 内的四元数函数 $w(z)$ 是 n -正则函数的充要条件是 $w(z)$ 可由区域 G 内的正则函数如下表示:

$$w(z) = \psi_0(z) + x_1 \psi_1(z) + \frac{x_1^2}{2!} \psi_2(z) + \cdots + \frac{x_1^{n-1}}{(n-1)!} \psi_{n-1}(z), \quad (2.3)$$

其中 $\psi_k, k = 0, 1, \dots, n-1$ 是区域 G 内的正则函数, 且这样的表示是唯一的.

反之, $\psi_k(z), k = 0, 1, \dots, n-1$, 可由 $w(z)$ 如下表示:

$$\psi_k(z) = \partial_z^k w - x_1 \partial_z^{k-1} w + \frac{x_1^2}{2!} \partial_z^{k+2} w - \cdots + (-1)^{n-k-1} \frac{x_1^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \partial_z^{n-1} w. \quad (2.4)$$

定理 3 指出了 n -正则函数与正则函数之间的关系. 利用这个定理, 可以由正则函数的函数论性质^[8]推出 n -正则函数的一些相关性质, 下面的两个推论就是这样的例子.

推论 1 (n -正则函数的 Liouville 定理) 若 $w(z)$ 是全空间 $\mathbb{C}^2$ 上的 n -正则函数, $w(z), \partial_z w(z), \dots, \partial_z^{n-1} w(z)$ 在全空间 $\mathbb{C}^2$ 上有界, 且对于定点 $z_0, \partial_z w(z_0) = \cdots = \partial_z^{n-1} w(z_0) = 0$. 则 $w(z)$ 恒为常数.

证明 根据 $w(z)$ 的表示式 (2.3), $\partial_z^{n-1} w = \psi_{n-1}(z)$. 由 $\partial_z^{n-1} w$ 在全空间有界, 故 $\psi_{n-1}(z)$ 在全空间正则且有界. 由正则函数的 Liouville 定理, $\psi_{n-1}(z)$ 在 $\mathbb{C}^2$ 中恒为常数. 而因 $\partial_z^{n-1} w(z_0) = 0$, 故

$$\psi_{n-1}(z) \equiv 0.$$

同样, 由 $\partial_z^{n-2} w = \psi_{n-2}(z) + x \psi_{n-1}(z) = \psi_{n-2}(z)$, 而 $\partial_z^{n-2} w$ 在全空间有界及 $\partial_z^{n-2} w(z_0) = 0$ 推得

$$\psi_{n-2}(z) \equiv 0.$$

同样的方法递推可得到 $\psi_{n-3}(z) = \cdots = \psi_1(z) \equiv 0$, 因此 $w(z) = \psi_0(z)$. 而 $w(z)$ 由在全空间有界, 故 $\psi_0(z)$ 在全空间正则且有界, 从而 $\psi_0(z)$ 恒为常数, 即得 $w(z)$ 恒为常数.

推论 2 (n -正则函数的唯一性定理) 若 $w(z)$ 是区域 G 内的 n -正则函数. 假设非空区域 $G_0 \subset G$, 而在 G_0 上, $w(z) = \partial w(z) = \cdots = \partial^{n-1} w(z) = 0$, 那么在 G 内

$$w(z) \equiv 0.$$

证明 根据 $w(z)$ 的表示式 (2.3), $\partial_z^{n-1} w = \psi_{n-1}(z)$, 而 $\psi_{n-1}(z)$ 在 G 内正则, 由条件, 在 G_0 上, $\psi_{n-1}(z) = 0$, 由正则函数的唯一性定理, 可推出在 G 上

$$\psi_{n-1}(z) \equiv 0.$$

由 $\partial_z^{n-2} w = \psi_{n-2}(z) + x\psi_{n-1}(z) = \psi_{n-2}(z)$, 同样推得

$$\psi_{n-2}(z) \equiv 0.$$

递推即可以得到在 G 内

$$w(z) \equiv 0.$$

设 $f(z)$ 是定义在有界区域 G 上的四元数函数, $f(z) \in L_1(G)$, 记

$$T_n f = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}(n-2)!(n-1)!\pi^2} \int_G \partial_{\bar{\zeta}}^n (r^{2(n-2)} \ln r^2) f(\zeta) d\sigma. \quad (2.5)$$

关于 $T_n f$ 算子, 类似于 [7] 中关于 Tf 的讨论可以证明

定理 4 1° $T_n f$ 关于 z 在 $\bar{G}$ 外 n -正则, $T_n f$ 对 $z \in G$ 几乎处处存在, $T_n f \in L_p(\bar{G}_*)$, $1 \leq p < \frac{4}{3}$, G_* 是 $\mathbb{C}^2$ 空间中的任意有界区域.

2° 若四元数函数 $\varphi \in C_0^\infty(G)$, 则

$$(T_n f, \partial_z^n \varphi) = (-1)^n (f, \varphi). \quad (2.6)$$

3° 若 G 是 $\mathbb{C}^2$ 空间中的有界区域, $f(z) \in L_p(\bar{G})$, $p > 4$, 则

$$T_n f \in C_\alpha^{n-1}(\bar{G}), \quad \alpha = \frac{p-4}{p}.$$

若四元数函数 $f, g \in L_1(G)$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(G)$, 都有 $(g, \partial_z^n \varphi) = (-1)^n (f, \varphi)$, 则称 f 为 g 的按 z 的 n 阶广义微商, 记为 $(g)_{\partial_z^n} = f$. 由此定义和等式 (2.6), $(T_n f)_{\partial_z^n} = f$.

容易验证下列结果.

定理 5 若四元数函数 $g \in C^n(G)$ 且 $\partial_z^n g = f$, 则 $(g)_{\partial_z^n} = f$.

对于 G 内的方程

$$\partial_z^n u = f, \quad (2.7)$$

当 $f \in L_1(G)$ 时有如下形式的弱解

$$u = w(z) + T_n f, \quad (2.8)$$

其中 $w(z)$ 是 G 内的任意 n -正则函数.

而当 $f \in C_\alpha(G)$, $0 < \alpha < 1$ 时, (2.8) 所表示的 G 内方程 (2.7) 的解是方程的古典解.

3 双圆柱区域 P 上四元数方程的 Dirichlet 边值问题

设 P 是 $\mathbb{C}^2$ 空间中的单位双圆柱区域, 即 $P = P_1 \times P_2, P_i = \{z_i | |z_i| < 1\}, i = 1, 2$. 考察如下 P 上的方程 $\partial_z u = f$ 的 Dirichlet 边值问题.

求 P 上的四元数方程 $\partial_z u = f$ 的解 $u(z)$, $f(z)$ 是定义在 $\bar{P}$ 上的已知四元数函数, $f(z) \in L_p(\bar{P}), p > 4$, 使 $u(z) = u_1(z) + ju_2(z)$ 在 $\bar{P}$ 上连续且满足条件

$$\begin{aligned} I[u(t)] &= u_2(t) = \varphi(t), \quad t \in \partial P, \\ \operatorname{Re}[R(u(t))] &= \operatorname{Re}u_1(t) = r(t), \quad t = (t_1, t_2) \in \Gamma = \partial P_1 \times \partial P_2, \\ \operatorname{Im}[R(u(0))] &= \operatorname{Im}u_1(0) = a, \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 $\varphi(t)$ 是定义在 P 的边界 ∂P 上的已知复值函数, $r(t)$ 是定义在 P 的特征边界 Γ 上的实值函数, $\varphi(t) \in C_\alpha(\partial P), r(t) \in C_\alpha(\Gamma), 0 < \alpha < 1$, 而 a 是一个实常数. 将此边值问题简称为问题 D. 特别当 $f = 0$ 时, 上述问题即成为四元数正则函数的问题 D.

为了解决上述问题 D, 需要多复变函数双圆柱区域上的相应的边值问题的一些结果. 所以在下面首先讨论这样的问题.

3.1 双圆柱区域上的非齐次 Cauchy-Riemann 方程的 Dirichlet 边值问题

考虑 P 上二元解析函数 $\Phi(z)$ 的如下 Dirichlet 边值问题: 求 P 上的二元解析函数 $\Phi(z)$, 使其在 $\bar{P}$ 上连续, 在 Γ 上满足边界条件

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\Phi(t)] &= r(t), \quad t = (t_1, t_2) \in \Gamma, \\ \operatorname{Im}\Phi(0) &= a, \end{aligned} \quad (3.2)$$

上式中的 $r(t) \in C_\alpha(\Gamma), 0 < \alpha < 1, a$ 是一实常数. 将这一问题简称为二元解析函数的问题 D.

引理 1 P 上二元解析函数问题 D 可解当且仅当对于所有的自然数 $m, n, r(t)$ 满足条件

$$\int_{\Gamma} r(\zeta_1, \zeta_2) \frac{\zeta_1^{m-1}}{\zeta_2^{n+1}} d\zeta_1 d\zeta_2 = 0, \quad (3.3)$$

当条件 (3.3) 满足时, 其解可由如下 Schwarz 积分公式表示,

$$\Phi(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} r(\zeta_1, \zeta_2) \left[\frac{2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} - \frac{1}{\zeta_1 \zeta_2} \right] d\zeta_1 d\zeta_2 + ia = P(r) + ia. \quad (3.4)$$

证明 将 $r(t)$ 在 Γ 上展开成 Fourier 级数

$$r(t_1, t_2) = \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} a_{mn} t_1^m t_2^n, \quad (3.5)$$

其系数

$$a_{mn} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{r(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1^{m+1} \zeta_2^{n+1}} d\zeta_1 d\zeta_2 = \bar{a}_{-m, -n}, \quad m, n = 0, \pm 1, \dots$$

若问题 D 有解, $\Phi(z)$ 满足边界条件

$$\operatorname{Re}\Phi(t_1, t_2) = r(t_1, t_2), \quad (t_1, t_2) \in \Gamma,$$

由 $\Phi(z)$ 在 P 内解析, 故 $\Phi(z)$ 在 P 内能展成 Taylor 级数

$$\Phi(z_1, z_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} z_1^m z_2^n.$$

从而根据 Abel 定理得到

$$\operatorname{Re}\Phi(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \left(\sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} t_1^m t_2^n + \sum_{m,n=0}^{\infty} \overline{c_{mn}} t_1^{-m} t_2^{-n} \right) = r(t_1, t_2), \quad t \in \Gamma.$$

与 (3.5) 式比较即得到

$$c_{00} = a_{00} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{r(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1 \zeta_2} d\zeta_1 d\zeta_2.$$

当 $m, n = 0, 1, \dots$, 且 m, n 不同为零时,

$$c_{mn} = 2a_{mn} = \frac{2}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{r(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1^{m+1} \zeta_2^{n+1}} d\zeta_1 d\zeta_2.$$

而当 $m < 0, n > 0$ 或 $m > 0, n < 0$ 时

$$a_{mn} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{r(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1^{m+1} \zeta_2^{n+1}} d\zeta_1 d\zeta_2 = 0.$$

从而得到条件 (3.3) 是问题 D 可解的必要条件. 此时

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} 2a_{mn} z_1^m z_2^n - a_{00} + i\operatorname{Im}\Phi(0, 0) \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} r(\zeta_1, \zeta_2) \left[\frac{2z_1^m z_2^n}{\zeta_1^{m+1} \zeta_2^{n+1}} - \frac{1}{\zeta_1 \zeta_2} \right] d\zeta_1 d\zeta_2 + ia \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} r(\zeta_1, \zeta_2) \left[\frac{2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} - \frac{1}{\zeta_1 \zeta_2} \right] d\zeta_1 d\zeta_2 + ia. \end{aligned}$$

反之, 若条件 (3.3) 成立. 令

$$\Phi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} r(\zeta_1, \zeta_2) \left[\frac{2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} - \frac{1}{\zeta_1 \zeta_2} \right] d\zeta_1 d\zeta_2 + ia,$$

则 $\Phi(z)$ 是一个 Cauchy 型积分, 从而在 Γ 外解析且满足如下 Plemelj 公式:

$$\Phi^{++}(t) - \Phi^{+-}(t) - \Phi^{-+}(t) + \Phi^{--}(t) = 2r(t), \quad t \in \Gamma, \quad (3.6)$$

其中 $\Phi^{++}(t), \Phi^{+-}(t), \Phi^{-+}(t), \Phi^{--}(t)$ 分别表示 z 从 $P^{++} = P, P^{+-} = \{|z_1| < 1\} \times \{|z_2| > 1\}, P^{-+} = \{|z_1| > 1\} \times \{|z_2| < 1\}, P^{--} = \{|z_1| > 1\} \times \{|z_2| > 1\}$ 内趋于 Γ 上的点 t 时的极限值.

分别将 $\Phi(z)$ 在 $P, P^{+-}, P^{-+}, P^{--}$ 内展成幂级数

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{2r(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1^{m+1} \zeta_2^{n+1}} d\zeta_1 d\zeta_2 \right) z_1^m z_2^n \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{r(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1 \zeta_2} d\zeta_1 d\zeta_2 + ia, \quad z \in P, \end{aligned}$$

$$\Phi(z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} 2r(\zeta_1, \zeta_2) \zeta_1^{m-1} \zeta_2^{n-1} d\zeta_1 d\zeta_2 \right) \frac{1}{z_1^m z_2^n} \\ \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{r(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1 \zeta_2} d\zeta_1 d\zeta_2 + ia, \quad z \in P^{--},$$

而由条件 (3.3),

$$\Phi(z) = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{r(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1 \zeta_2} d\zeta_1 d\zeta_2 + ia, \quad z \in P^{+-}, \\ \Phi(z) = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{r(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1 \zeta_2} d\zeta_1 d\zeta_2 + ia, \quad z \in P^{-+}.$$

分别令 $z \rightarrow t$ 且将其代入公式 (3.6), 由此可以得到

$$\operatorname{Re} \Phi^{++}(t) = r(t), \quad t \in \Gamma,$$

此外容易由 $\Phi(0) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{r(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1 \zeta_2} d\zeta_1 d\zeta_2 + ia$ 得到 $\operatorname{Im} \Phi(0) = a$. 从而即得条件 (3.3) 满足时, 问题 D 可解且解可如 (3.4) 表示.

引理 2 对于 P 上关于 $f(z_1, z_2)$ 的非齐次 Cauchy-Riemann 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} f(z_1, z_2) = g_1(z_1, z_2), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} f(z_1, z_2) = g_2(z_1, z_2), \end{cases} \quad (3.7)$$

其中 $g_1, g_2 \in W_p^1(P), p > 2$, 当且仅当相容性条件

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} g_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} g_2, \quad z = (z_1, z_2) \in P$$

满足时可解, 且通解可如下表示,

$$f(z_1, z_2) = \Phi(z_1, z_2) + T_{P_1} g_1 + T_{P_2} g_2 - T_{P_1} T_{P_2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} g_1 \right). \quad (3.8)$$

这里 $\Phi(z_1, z_2)$ 是 P 内的任意二元解析函数,

$$T_{P_1} g_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{P_1} \frac{g_1(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} d\sigma_{\zeta_1}, \\ T_{P_2} g_2 = -\frac{1}{\pi} \int_{P_2} \frac{g_2(z_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - z_2} d\sigma_{\zeta_2}, \\ T_{P_1} T_{P_2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} g_1 \right) = -\frac{1}{\pi} \int_{P_1} \frac{1}{\zeta_1 - z_1} \left(-\frac{1}{\pi} \int_{P_2} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} g_1(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - z_2} d\sigma_{\zeta_2} \right) d\sigma_{\zeta_1} \\ = \frac{1}{\pi^2} \int_{P_1} d\sigma_{\zeta_1} \int_{P_2} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} g_1(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\sigma_{\zeta_2},$$

且 $T_{P_1} g_1 + T_{P_2} g_2 - T_{P_1} T_{P_2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} g_1 \right) \in C_{\alpha}(\bar{P}), 0 < \alpha < 1$.

上述引理利用单复变中 T 算子性质^[11, 12] 容易推出.

由引理 1 和 2 即可获得下列定理.

定理 6 对于 P 上的非齐次 Cauchy-Riemann 方程 (3.7) 的问题 D, 即求 P 内方程 (3.7) 的解 $f(z)$, 使其在 $\bar{P}$ 上连续, 在特征边界 $\Gamma = \partial P_1 \times \partial P_2$ 上满足边界条件 $\operatorname{Re} f(t) = r(t)$ 且 $\operatorname{Im} f(0) = a$, 当且仅当

$$r_1(t) = r(t) - \operatorname{Re} \left[T_{P_1} g_1 + T_{P_2} g_2 - T_{P_1} T_{P_2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} g_1 \right) \right](t)$$

满足条件 (3.3) 时可解, 其解如 (3.8) 式表示, 其中的二元解析函数

$$\Phi(z) = P(r_1) + ia_1 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} r_1(\zeta_1, \zeta_2) \left[\frac{2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} - \frac{1}{\zeta_1 \zeta_2} \right] d\zeta_1 d\zeta_2 + ia_1.$$

上式中

$$a_1 = a - \operatorname{Im} \left[\left(T_{P_1} g_1 + T_{P_2} g_2 - T_{P_1} T_{P_2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} g_1 \right) \right)(0) \right].$$

3.2 双圆柱区域 P 上的四元数正则函数与方程 $\partial_z u = f$ 的 Dirichlet 问题

首先, 我们考虑 P 上的四元数正则函数 $\Psi(z) = \psi_1 + j\psi_2$ 的问题 D, 作

$$\psi_2 = \int_{\partial P} \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu} G(z, \zeta) dS_{\zeta}, \quad (3.9)$$

其中 $G(z, \zeta)$ 是双圆柱区域 P 的 Green 函数, ν 是曲面 ∂P 外法方向, 而 $\frac{\partial}{\partial \nu} G(z, \zeta)$ 也被称为双圆柱区域 P 的 Poisson 核, 则 $\psi_2(z)$ 是 P 内的复调和函数, 即 $\psi_2(z)$ 是在 P 内满足 Laplace 方程 $\Delta \psi_2 = 0$ 的复值函数. 从而下列关于函数 $\psi_1(z)$ 的非齐次 Cauchy-Riemann 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \psi_1 = \frac{\partial}{\partial z_2} \psi_2, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \psi_1 = -\frac{\partial}{\partial z_1} \psi_2 \end{cases} \quad (3.10)$$

的相容性条件满足. 由定理 6, 关于复值函数 $\psi_1(z)$ 满足边界条件

$$\operatorname{Re} \psi_1(t) = r_2(t), \quad t \in \Gamma$$

的问题 D, 其中

$$r_2(t) = r(t) - \operatorname{Re} \left[T_{P_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} \psi_2 \right) - T_{P_2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} \psi_2 \right) - T_{P_1} T_{P_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}_2 \partial \bar{\zeta}_2} \psi_2 \right) \right](t), \quad (3.11)$$

以及

$$\operatorname{Im} \psi_1(0) = a_2 = a - \operatorname{Im} \left[T_{P_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} \psi_2 \right) - T_{P_2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} \psi_2 \right) - T_{P_1} T_{P_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}_2 \partial \bar{\zeta}_2} \psi_2 \right) \right](0),$$

当且仅当 $r_2(t)$ 满足条件 (3.3) 时可解, 且其解

$$\psi_1(z) = P(r_2) + ia_2 + T_{P_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} \psi_2 \right) - T_{P_2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} \psi_2 \right) - T_{P_1} T_{P_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}_2 \partial \bar{\zeta}_2} \psi_2 \right), \quad (3.12)$$

其中

$$P(r_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} r_2(\zeta_1, \zeta_2) \left[\frac{2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} - \frac{1}{\zeta_1 \zeta_2} \right] d\zeta_1 d\zeta_2.$$

由上面的讨论, 即得出下列定理.

定理 7 对于 P 上的四元数正则函数的问题 D, 当 (3.11) 式所表示的 $r_2(t)$ 满足条件 (3.3) 时可解, 且其解 $\Psi(z) = \psi_1(z) + j\psi_2(z)$, 其中 $\psi_1(z)$ 与 $\psi_2(z)$ 分别由 (3.12) 式和 (3.9) 式所表示.

其次对于 P 上方程 $\partial_z u = f$ 的问题 D, 由 [7] 中的结果, 方程 $\partial_z u = f$ 的解可以表示成 $u(z) = \Psi(z) + T_P f$, 其中 $\Psi(z)$ 是 P 上的四元数正则函数,

$$T_P f = -\frac{1}{2\pi^2} \int_P \frac{\overline{\zeta - z}}{|\zeta - z|^4} f(\zeta) d\sigma_\zeta.$$

而由于 $f(z) \in L_p(P)$, $p > 4$, 从而有 $T_P f \in C_\alpha(\overline{P})$, $\alpha = \frac{p-4}{p}$. 因此可将方程 $\partial_z u = f$ 的问题 D 化为 P 上四元数正则函数 $\Psi(z) = \psi_1(z) + j\psi_2(z)$ 的满足条件

$$\begin{aligned} \psi_2(t) &= \varphi(t) - I(T_P f)(t), \quad t \in \partial P, \\ \operatorname{Re} \psi_1(t) &= r(t) - \operatorname{Re}[R(T_P f)(t)], \quad t \in \Gamma, \\ \operatorname{Im}[\psi_1(0)] &= a - \operatorname{Im}[R(T_P f)(0)] \end{aligned} \quad (3.13)$$

的问题 D. 当其可解时, 即有 $\partial_z u = f$ 的问题 D 可解, 且解可相应给出.

由定理 7, 即可得到下列定理.

定理 8 设

$$\psi_2(z) = \int_{\partial P} (\varphi(\zeta) - I(T_P f)(\zeta)) \frac{\partial}{\partial \nu} G(z, \zeta) dS_\zeta. \quad (3.14)$$

当

$$r_3(t) = r(t) - \operatorname{Re}[R(T_P f)(t)] - \operatorname{Re} \left[T_{P_1} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_2} \psi_2 \right) - T_{P_2} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \psi_2 \right) - T_{P_1} T_{P_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta_2 \partial \zeta_2} \psi_2 \right) \right] (t)$$

在 Γ 上满足条件 (3.3) 时, P 上方程 $\partial_z u = f$ 的问题 D 可解. 其解 $u(z) = \Psi(z) + T_P f$, 其中 $\Psi(z) = \psi_1(z) + j\psi_2(z)$,

$$\psi_1(z) = P(r_3) + ia_3 + T_{P_1} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_2} \psi_2 \right) - T_{P_2} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \psi_2 \right) - T_{P_1} T_{P_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta_2 \partial \zeta_2} \psi_2 \right).$$

这里

$$a_3 = a - \operatorname{Im}[R(T_P f)(0)] - \operatorname{Im} \left[T_{P_1} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_2} \psi_2 \right) - T_{P_2} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \psi_2 \right) - T_{P_1} T_{P_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta_2 \partial \zeta_2} \psi_2 \right) \right] (0),$$

而 $\psi_2(z)$ 如 (3.14) 所示.

4 四元数 n -正则函数与方程 $\partial_z^n u = f$ 的 Dirichlet 边值问题

在本节中, 我们考虑双圆柱区域 P 上的四元数 n -正则函数与方程 $\partial_z^n u = f$ 的如下 Dirichlet 边值问题.

求方程 $\partial_z^n u = f$ 在双圆柱区域 P 上的解, $f(z)$ 是定义在 $\overline{P}$ 上的已知四元数函数, $f(z) \in L_p(\overline{P})$, $p > 4$, 使 $u(z)$ 在 $\overline{P}$ 上连续且满足条件: 当 $k = 0, 1, \dots, n-1$ 时,

$$I[\partial_z^k u] = \varphi_k(t), \quad t \in \partial P,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[R(\partial_z^k u)] &= r_k(t), \quad t \in \Gamma = \partial P_1 \times \partial P_2, \\ \operatorname{Im}[R(\partial_z^k u)](0) &= a_k, \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中 $\varphi_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, 是定义在 P 的边界 ∂P 上的已知复值函数, $r_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, 是定义在 P 的特征边界 Γ 上的实值函数, $\varphi_k(t) \in C_\alpha(\partial P)$, $r_k(t) \in C_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$. 而 $a_k, k = 0, 1, \dots, n-1$, 是已知实常数. 将上述边值问题简称为方程 $\partial_z^n u = f$ 的问题 D. 而当 $f(z) = 0$, 方程 $\partial_z^n u = 0$ 的解即为 P 内的四元数 n - 正则函数, 此时上述问题即为 n - 正则函数的问题 D.

首先我们考虑 P 上的四元数 n - 正则函数 $w(z)$ 的问题 D. 利用定理 3, 可以将 P 上的 n - 正则函数的问题 D, 化为 P 上的四元数正则函数的问题 D, 从而获得下列结果.

定理 9 对于 P 上的四元数 n - 正则函数 $w(z)$ 的问题 D, 当

$$r'_k(t) = r_k(t) - x'_1 r_{k+1}(t) + \frac{x_1'^2}{2!} r_{k+2}(t) - \dots + (-1)^{n-k-1} \frac{x_1'^{n-k-1}}{(n-k-1)!} r_{n-1}(t),$$

这里 $t = (t_1, t_2)$, $t_1 = x'_1 + ix'_2$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, 在 Γ 上满足条件 (3.3) 时可解. 其解如 (2.3) 式所表示, 其中的 $\psi_k(z) = \psi_{k1}(z) + j\psi_{k2}(z)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, 是 P 上的正则函数,

$$\psi_{k2}(z) = \int_{\partial P} \varphi'_k(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu} G(z, \zeta) dS_\zeta,$$

此处

$$\varphi'_k(\zeta) = \varphi_k(\zeta) - x'_1 \varphi_{k+1}(\zeta) + \frac{x_1'^2}{2!} \varphi_{k+2}(\zeta) - \dots + (-1)^{n-k-1} \frac{x_1'^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \varphi_{n-1}(\zeta),$$

而

$$\psi_{k1}(z) = P(r'') + ia'_k + T_{P_1} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_2} \psi_{k2} \right) - T_{P_2} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \psi_{k2} \right) - T_{P_1} T_{P_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta_2 \partial \zeta_1} \psi_{k2} \right),$$

其中

$$\begin{aligned} r''_k(t) &= r'_k(t) - \operatorname{Re} \left[T_{P_1} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_2} \psi_{k2} \right) - T_{P_2} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \psi_{k2} \right) - T_{P_1} T_{P_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_1} \psi_{k2} \right) \right](t), \\ a'_k &= a_k - \operatorname{Im} \left[T_{P_1} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_2} \psi_{k2} \right) - T_{P_2} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \psi_{k2} \right) - T_{P_1} T_{P_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta_2 \partial \zeta_2} \psi_{k2} \right) \right](0). \end{aligned}$$

证明 因为此问题的解 $w(z)$ 是 P 内的 n - 正则函数, 故可由公式 (2.3) 所表示. 而由 (2.4) 式可推出 $w(z)$ 满足条件 (4.1) 当且仅当对于 $k = 0, 1, \dots, n-1$, (2.3) 式右端中的 $\psi_k(z) = \psi_{k1}(z) + j\psi_{k2}(z)$ 是满足边界条件

$$\begin{aligned} I[\psi_k(t)] &= \psi_{k2}(t) \\ &= \varphi_k(t) - x'_1 \varphi_{k+1}(t) + \frac{x_1'^2}{2!} \varphi_{k+2}(t) \\ &\quad - \dots + (-1)^{n-k-1} \frac{x_1'^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \varphi_{n-1}(t), \quad t \in \partial P, \\ \operatorname{Re}[R(\psi_k(t))] &= \operatorname{Re}[\psi_{k1}(t)] = r'_k(t), \quad t \in \Gamma, \end{aligned}$$

及

$$\operatorname{Im}[R(\psi_k(0))] = \operatorname{Im}[\psi_{k2}(0)] = a_k$$

的 P 上正则向量函数问题 D 的解, 从而利用定理 7 的结果, 即可完成证明.

其次考察 P 上方程 $\partial_z^n u = f$ 的问题 D. 由于 P 上方程 $\partial_z^n u = f$ 的解可以表示成

$$u(z) = w(z) + T_n f,$$

其中 $w(z)$ 是 P 上的 n -正则函数, 而

$$T_n f = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}(n-2)!(n-1)!\pi^2} \int_P \partial_{\bar{\zeta}}^n (r^{2(n-2)} \ln r^2) f(\zeta) d\sigma.$$

由于 $f \in L_p(P)$, $p > 4$, 根据定理 4, $T_n f \in C_{\alpha}^{n-1}(\bar{P})$, $0 < \alpha < 1$. 从而可将方程 $\partial_z^n u = f$ 的问题 D 转化为 n -正则函数的问题 D. 利用定理 9, 即可获得下列定理.

定理 10 当 P 上的满足下列边界条件及点型条件

$$\begin{aligned} I[\partial_z^k w] &= \varphi_k(t) - I[T_n f](t), \quad t \in \partial P, \\ \operatorname{Re}[R(\partial_z^k w)] &= r_k(t) - \operatorname{Re}[R(T_n f)(t)], \quad t \in \Gamma, \\ \operatorname{Im}[R(\partial_z^k w)(0)] &= a_k - \operatorname{Im}[R(T_n f)(0)] \end{aligned} \quad (4.2)$$

的 n -正则函数 $w(z)$ 的问题 D 可解时, P 上方程 $\partial_z^n u = f$ 的问题 D 可解. 其解可以表示为

$$u(z) = w(z) + T_n f.$$

可解条件及上述解中的 n -正则函数 $w(z)$ 可如定理 9 给出.

参考文献

- 1 Deavours C A. The quaternion calculus. Amer Math Monthly, 1973, 80: 995–1008
- 2 Sudbery A. Quaternionic analysis. Math Proc Camb Soc, 1979, 85: 199–225
- 3 Kyrala A. Theoretical Physics. Philadelphia: Sanders, 1967
- 4 Phillips H. Vector Analysis. New York: Wiley, 1963
- 5 Yang P W, Li M L, Chen Y. Initial-boundary value problems of some hyperbolic systems of first order equations. Acta Math Appl Sin Chin Ser, 2008, 31: 61–71
- 6 Yang P W, Yang S, Li M L. An initial-boundary value problem for the Maxwell equations. J Differential Equations, 2010, 249: 3003–3023
- 7 Yang P W. The operators T in quaternionic analysis and two classes of boundary value problems. Acta Math Sin Chin Ser, 2001, 44: 343–350
- 8 Yang P W. Some properties of the regular function in quaternion calculus. Acta Math Appl Sinica Chin Ser, 2010, 33: 1095–1112
- 9 Wen G C, Tain M Y. Some boundary value problems for several complex variables. J Yantai Univ Nat Sci Eng, 1989, 2: 1–14
- 10 Begehr H, Dzhuraev A. An Introduction to Several Complex Variables and Partial Differential Equations. Harlow: Longman, 1997
- 11 Vekya I N. Generalized Analytic Functions. Oxford: Pergamon, 1962
- 12 Tutschke W. Boundary value problems for generalized analytic functions of several complex variables. Ann Polon Math, 1981, 39: 227–238
- 13 Yang P W. Regular function on the ball and the bicylinder in quaternion calculus. J Systems Sci Math Sci Chin Ser, 1999, 19: 257–263
- 14 Yang P W. Hölder continuity of $T_G f$ and Riemann-Hilbert boundary value problem in quaternion calculus. Acta Math Sin Chin Ser, 2003, 46: 993–998
- 15 Yang P W. The Riemann-Hilbert boundary value problem for the Moisil-Theodoresco system. Acta Math Sci, 2006, 26: 1057–1063

- 16 Yang P W, Li M L, Yang S. The characteristic boundary value problems for hyperbolic equations in commutative quaternion algebra. *Acta Math Sin Chin Ser*, 2007, 50: 1249–1256
- 17 Yang P W, Yang S. The Riemann-Hilbert problems for classes of hyperbolic equations in commutative quaternion space. *Acta Math Sin Chin Ser*, 2008, 51: 171–180

The Dirichlet boundary value problems for some quaternion functions of higher order on the polydisc

YANG PiWen

Abstract In this paper, we discuss the Dirichlet boundary value problems for some quaternion functions of higher order on the polydisc, obtain the solvable conditions of the problems, and give out the integral representations of solutions of the problems when the solvable conditions hold.

Keywords: quaternion calculus, n -regular function, Dirichlet boundary value problem

MSC(2000): 30G35

doi: 10.1360/012009-481