半群中的 Lipschitz 各态历经和广义各态历经

献给张芷芬教授 90 华诞

夏旭, 郑作环*, 周喆

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

E-mail: xiayu14@mailsucas.ac.cn, zhzheng@amt.ac.cn, zzhou@amss.ac.cn

收稿日期: 2016-04-29; 接受日期: 2016-07-13; 网络出版日期: 2016-11-14; * 通信作者

中国科学院随机复杂结构与数据科学重点实验室 (批准号: 2008DP173182)、国家数学与交叉科学中心和国家自然科学基金 (批准号: 11301512) 资助项目

摘要 本文利用链回复性研究连续映射迭代形成的半群上 Lipschitz 各态历经和广义各态历经, 分别给出 Lipschitz 各态历经和广义各态历经的充分必要条件, 并举例说明各态历经、广义各态历经和 Lipschitz 各态历经性的关系.

关键词 Lipschitz 各态历经 广义各态历经 对偶不变集 连续区域 Ω 扩张集

MSC (2010) 主题分类 37A20, 37E45, 37H05, 47E05, 81Q10

1 引言

自从 Boltzmann 引进了各态历经假设, 各态历经理论取得了很大的进展. 首先, Birkhoff^[1] 和 von Neumann^[2] 在 1930 年证明了各态历经定理. Kolmogorov^[3] 在 1950 年引进了熵的理论. 在 1960 年, Ornstein 和 Weiss^[4] 证明了 Bernoulli 位移的完备性, 即熵是 Bernoulli 位移的完全同构不变量 (参见文献 [5]). 各态历经理论已经应用到了数论、代数、经典力学和天气预报等各个领域和方向 (参见文献 [6–12]).

为了研究计算稳定性和动力系统结构, Easton^[13] 在同胚映射迭代形成的离散动力系统中引进了 Lipschitz 各态历经的定义, 并且证明了强链传递是 Lipschitz 各态历经的充分条件. 有的动力系统是 Lipschitz 各态历经的但在某个不变测度下不是各态历经的, 同时有的动力系统在某个不变测度下是各态历经的, 但不是 Lipschitz 各态历经的. 文献 [14] 引入了广义各态历经, 它同时包含了各态历经和 Lipschitz 各态历经, 即如果某个动力系统是 Lipschitz 各态历经的, 则存在某个不变测度, 在这个不变测度下这个系统是广义各态历经的; 如果动力系统在某个不变测度下是各态历经的, 则这个系统在这个不变测度下是广义各态历经的. 文献 [15] 分别给出了 Lipschitz 各态历经和广义各态历经的充分必要条件.

本文研究连续映射迭代形成的半群, 给出两个例子, 第一个例子说明各态历经和 Lipschitz 各态历经不是包含关系, 第二个例子说明广义各态历经确实比各态历经和 Lipschitz 各态历经的范围更广. 本

英文引用格式: Xia X, Zheng Z H, Zhou Z. The Lipschitz ergodicity and generalized ergodicity of semigroups (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 205–220, doi: 10.1360/N012016-00090

文利用对偶不变集、连续区域和 Ω 扩张集, 研究各态历经、广义各态历经和 Lipschitz 各态历经性.

以下是本文结构: 第 2 节主要证明了 E 链传递是 Lipschitz 各态历经的充分必要条件, 广义 E 链传递是广义各态历经的充分必要条件; 第 3 节利用对偶不变集对半群进行划分, 从而给出了 Lipschitz 各态历经和广义各态历经的判别方法; 第 4 节利用扩张集给出了 Lipschitz 各态历经和广义各态历经的判别方法; 第 5 节举例说明在连续映射迭代形成的半群中, 各态历经、Lipschitz 各态历经和广义各态历经之间的关系. 第 6 节对上述结果的后续研究作了初步的探讨, 供有兴趣的读者参考.

2 一个集合的连续区域

(X, d) 是一个紧度量空间, $f: X \rightarrow X$ 是空间 X 上的一个连续映射, 则在空间 X 中形成了一个半群. 我们用 β 标记 X 上的 Borel σ 代数, μ 是 Borel 完备测度, (X, β, μ) 记作完备概率空间. 为了研究动力系统的性质, 我们引进了各态历经的概念. f 称作关于不变测度 μ 是各态历经的, 如果在 X 中的任何一个可测不变子集 A , 要么 $\mu(A) = 1$ 成立, 要么 $\mu(A) = 0$ 成立. 然后 Easton 推广到了 Lipschitz 各态历经. f 称作 Lipschitz 各态历经的, 如果对于任何满足: 对于任意的 $x \in X$, $G(f(x)) = G(x)$ 的 Lipschitz 函数 $G: X \rightarrow \mathbb{R}$, 可以推出 G 是常函数. 在文献 [14] 中进一步发展到了广义各态历经: f 称作关于不变测度 μ 是广义各态历经的, 如果对于任何满足 $G(f(x)) = G(x)$, $\forall x \in X$ 的 Lipschitz 函数 $G: X \rightarrow \mathbb{R}$, 可以推出 G 关于测度 μ 几乎处处为常数.

在研究各态历经的过程中引进了下面的概念:

假设 A 是 X 的一个不变子集, 那么 A 称作强链回复的, 如果 $\forall p, q \in A$, $\forall \epsilon > 0$ 存在集合 $\{p = x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset X$ 使得

$$\sum_{k=1}^n d(f(x_{k-1}), x_k) < \epsilon.$$

在本文中推广了相关定义:

定义 2.1 假设 A 是 X 的一个不变子集, 那么 A 称作 E 链回复的, 如果 $\forall p, q \in A$, $\forall \epsilon > 0$ 存在集合

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset X \quad (2.1)$$

和集合

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n, \gamma_n, \gamma_{n+1}\} \subset \mathbb{N} \quad (2.2)$$

使得

$$\sum_{k=1}^n d(f^{\gamma_k}(x_{k-1}), f^{\bar{\gamma}_k}(x_k)) < \epsilon, \quad (2.3)$$

并且

$$f^{\gamma_0}(x_0) = p \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_0}(p) = x_0 \quad (2.4)$$

有一个成立, 同时

$$f^{\gamma_{n+1}}(x_n) = q \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_{n+1}}(q) = x_n \quad (2.5)$$

有一个成立.

定义 2.2 X 称作关于测度 μ 几乎 E 链传递的, 如果存在一个 Borel 集 $B \subset X$ 使得 $\mu(B) = 1$, 且在 B 上是 E 链回复的.

在文中称两个点之间存在一条 (E, ϵ) 链, 若对于 $p, q \in X$ 和 $\epsilon > 0$, 如果存在集合

$$A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset X$$

和集合

$$B = \{\gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \gamma_n, \bar{\gamma}_n, \gamma_{n+1}\} \subset \mathbb{N}$$

使得

$$\sum_{k=1}^n d(f^{\gamma_k}(x_{k-1}), f^{\bar{\gamma}_k}(x_k)) < \epsilon,$$

并且 $f^{\gamma_0}(x_0) = p$ 或者 $f^{\gamma_0}(p) = x_0$ 有一个成立, 同时 $f^{\gamma_{n+1}}(x_n) = q$ 或者 $f^{\gamma_{n+1}}(q) = x_n$ 有一个成立, 则称集合 $\{x_0, x_1, \dots, x_n; \gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \gamma_n, \bar{\gamma}_n, \gamma_{n+1}\}$ 是一个从 p 到 q 的 (E, ϵ) 链.

令 A 为 X 的一个子集, $E(A)$ 定义为

$$E(A) = \{x \in X \mid \forall \epsilon > 0, \exists q \in A, \text{使得存在 } (E, \epsilon) \text{ 链连接 } q \text{ 与 } x\}.$$

从这个定义我们得到, 如果 $A \subset X$, 则 $A \subset E(A)$; 如果 $A = \emptyset$, 则 $E(A) = \emptyset$, 对于任意的 $p \in X$, 记 $E(p) = E(\{p\})$.

性质 2.3 $E(A)$ 是 X 中的一个不变子集.

证明 当 A 为空集时显然成立, 当 A 不为空集时, 若任意一个 $q \in E(A)$, 则存在一个点 $p \in A$, 使得有一个 (E, ϵ) 轨道连接 p 和 q . 令 r 为 q 的广义轨道上一点, 即存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$f^m(q) = r \quad \text{或者} \quad f^m(r) = q. \quad (2.6)$$

不妨假设 $f^m(q) = r$. 不失一般性, 设 $E(q, \epsilon)$ 轨道从 q 到 p 是这种情形: 存在集合

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset X \quad (2.7)$$

和集合

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \gamma_n, \bar{\gamma}_n, \gamma_{n+1}\} \subset \mathbb{N} \quad (2.8)$$

使得

$$\sum_{k=1}^n d(f^{\gamma_k}(x_{k-1}), f^{\bar{\gamma}_k}(x_k)) < \epsilon, \quad (2.9)$$

并且

$$f^{\gamma_0}(x_0) = p \quad \text{和} \quad f^{\gamma_{n+1}}(x_n) = q. \quad (2.10)$$

在这种情形下用新的集合

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \gamma_n, \bar{\gamma}_n, \gamma_{n+1} + m\} \subset \mathbb{N}, \quad (2.11)$$

其他的不变就得到新的 $E(p, \epsilon)$ 轨道连接 p 和 r , 因此 $r \in E(A)$, 其他情形同理. 故对任一点 $p \in E(A)$, 它的广义轨道上的任何一点都在 $E(A)$ 中, 所以,

$$f(E(A)) \subset E(A) \quad \text{且} \quad f^{-1}(E(A)) \subset E(A). \quad (2.12)$$

这样就证明了 $E(A)$ 的不变性. □

性质 2.4 $E(A) = E(E(A))$.

证明 当 A 为空集时显然成立, 当 A 不为空集时, 从定义显然得出 $E(A) \subset E(E(A))$, 对任意的 $p \in E(E(A))$ 存在 $q \in E(A)$ 使得 $E(q, \epsilon/2)$ 轨道连接 q 和 p , 即存在集合

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset X \quad (2.13)$$

和集合

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n, \gamma_n, \gamma_{n+1}\} \subset \mathbb{N} \quad (2.14)$$

使得

$$\sum_{k=1}^n d(f^{\gamma_k}(x_{k-1}), f^{\bar{\gamma}_k}(x_k)) < \frac{\epsilon}{2}, \quad (2.15)$$

并且

$$f^{\gamma_0}(x_0) = q \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_0}(q) = x_0 \quad (2.16)$$

有一个成立, 同时

$$f^{\gamma_{n+1}}(x_n) = p \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_{n+1}}(p) = x_n \quad (2.17)$$

有一个成立.

同时也存在 $q_1 \in A$, 使得存在 $E(q_1, \epsilon/2)$ 轨道连接 q_1 和 q , 即存在集合

$$\{y_0, y_1, \dots, y_m\} \subset X \quad (2.18)$$

和集合

$$\{\beta_0, \beta_1, \bar{\beta}_1, \beta_2, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_m, \beta_m, \beta_{m+1}\} \subset \mathbb{N} \quad (2.19)$$

使得

$$\sum_{k=1}^m d(f^{\beta_k}(y_{k-1}), f^{\bar{\beta}_k}(y_k)) < \frac{\epsilon}{2}, \quad (2.20)$$

并且

$$f^{\beta_0}(y_0) = q \quad \text{或者} \quad f^{\beta_0}(q) = y_0 \quad (2.21)$$

有一个成立, 同时

$$f^{\beta_{m+1}}(y_m) = p \quad \text{或者} \quad f^{\beta_{m+1}}(p) = y_m \quad (2.22)$$

有一个成立. 这时取新的集合

$$\{\beta_0, \beta_1, \bar{\beta}_1, \beta_2, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_m, \beta_m, \beta_{m+1}, \gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n, \gamma_n, \gamma_{n+1}\} \subset \mathbb{N}, \quad (2.23)$$

$$\{y_0, y_1, \dots, y_m, x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset X. \quad (2.24)$$

同时

$$f^{\beta_0}(y_0) = q \quad \text{或者} \quad f^{\beta_0}(q) = y_0 \quad (2.25)$$

有一个成立, 同样

$$f^{\gamma_{n+1}}(x_n) = p \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_{n+1}}(p) = x_n \quad (2.26)$$

有一个成立, 那么就有

$$\sum_{k=1}^m d(f^{\beta_k}(y_{k-1}), f^{\bar{\beta}_k}(y_k)) + \sum_{k=1}^n d(f^{\gamma_k}(x_{k-1}), f^{\bar{\gamma}_k}(x_k)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad (2.27)$$

这就是一个从 q_1 到 p 的 $E(q_1, \epsilon)$ 轨道. 从而 $p \in E(A)$, 故 $E(E(A)) \subset E(A)$. $\square$

性质 2.5 $E(A)$ 也是闭集.

证明 当 A 为空集时显然成立, 当 A 不是空集时, 令 p 是集合 $E(A)$ 的一个极限点, 那么存在一个点列 $\{p_n\} \subset E(A)$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p, \quad (2.28)$$

则在 A 中也存在一列点 $\{q_n\} \subset A$, 使得 $\forall \epsilon > 0, \exists E(q_n, \epsilon)$ 从 q_n 到 p_n .

对于 $\epsilon > 0$, 存在 $n_1 > 0$ 使得

$$d(p_{n_1}, p) < \frac{\epsilon}{4}, \quad (2.29)$$

则存在 $E(p, \epsilon/4)$ 轨道从 q_{n_1} 到 p_{n_1} , 即存在集合

$$\{x_0, x_1, \dots, x_m\} \subset X \quad (2.30)$$

和集合

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_m, \gamma_m, \gamma_{m+1}\} \subset \mathbb{N} \quad (2.31)$$

使得

$$\sum_{k=1}^m d(f^{\gamma_k}(x_{k-1}), f^{\bar{\gamma}_k}(x_k)) < \frac{\epsilon}{4}, \quad (2.32)$$

并且

$$f^{\gamma_0}(x_0) = q_n \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_0}(q_n) = x_0 \quad (2.33)$$

有一个成立, 同时

$$f^{\gamma_{m+1}}(x_m) = p_n \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_{m+1}}(p_n) = x_m \quad (2.34)$$

有一个成立.

不失一般性, 假设是这种情形:

$$f^{\gamma_0}(x_0) = q_n \quad \text{和} \quad f^{\gamma_{m+1}}(x_m) = p_n. \quad (2.35)$$

此时取集合

$$\{x_0, x_1, \dots, x_m, p\} \subset X \quad (2.36)$$

和集合

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_m, \gamma_m, \gamma_{m+1}, 0, 0\} \subset \mathbb{N}, \quad (2.37)$$

则产生了一条 $E(q, \epsilon)$ 轨道从 q_{n_1} 到 p , 因此 $q \in E(A)$, 故 $E(A)$ 是闭集. $\square$

定理 2.6 假定 A 是 X 的一个闭不变子集. f 限制在 A 上是 Lipschitz 各态历经的, 当且仅当 f 在 A 上是 E 链传递的.

证明 假设 f 是 E 链传递的, 则对于任意一个 Lipschitz 连续函数 G , 假设 G 的 Lipschitz 常数为 K , 且满足 $G(f(x)) = G(x)$, $\forall x \in X$, 则由 E 链传递的性质知, 对任意两点 $p, q \in A$, 任意的 $\epsilon > 0$, 存在一个 $E(p, \epsilon)$ 轨道连接 p 和 q . 不妨假定 $E(p, \epsilon)$ 轨道从 p 到 q 是这种情形, 即存在集合

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset X \quad (2.38)$$

和集合

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n, \gamma_n, \gamma_{n+1}\} \subset \mathbb{N} \quad (2.39)$$

使得

$$\sum_{k=1}^n d(f^{\gamma_k}(x_{k-1}), f^{\bar{\gamma}_k}(x_k)) < \epsilon, \quad (2.40)$$

并且 $f^{\gamma_0}(x_0) = p$, $f^{\gamma_{n+1}}(x_n) = q$, 则

$$d(G(p), G(q)) < \sum_{i=1}^n d(G(f^{\gamma_i}(x_{i-1})), G(f^{\bar{\gamma}_i}(x_i))),$$

从而小于 $K\epsilon$. 令 ϵ 趋于零, 得 $G(p) = G(q)$. 因此, f 在 A 上是 Lipschitz 各态历经的.

假设 f 在 A 上是 Lipschitz 各态历经的. 假设 f 在 A 上不是 E 链传递的, 则存在 $a, b \in A$, $E(a)$ 与 $E(b)$ 相交为空集. 定义一个函数

$$h(x) = \inf\{\epsilon > 0 \mid \text{存在 } E(a, \epsilon) \text{ 轨道连接 } a \text{ 和 } x\}. \quad (2.41)$$

那么任意两点 $c, e \in X$, 对于任意的 $\epsilon > h(c)$, 由函数 h 的定义知, 存在 $E(a, \epsilon)$ 轨道连接 a 和 c , 即存在集合

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset X \quad (2.42)$$

和集合

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n, \gamma_n, \gamma_{n+1}\} \subset \mathbb{N} \quad (2.43)$$

使得

$$\sum_{k=1}^n d(f^{\gamma_k}(x_{k-1}), f^{\bar{\gamma}_k}(x_k)) < \epsilon, \quad (2.44)$$

并且 $f^{\gamma_0}(x_0) = a$, $f^{\gamma_{n+1}}(x_n) = c$. 选择新的集合

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n, e\} \subset X. \quad (2.45)$$

不妨记 $x_{n+1} = e$, 集合

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n, \gamma_n, \gamma_{n+1}, 0, 0\} \subset \mathbb{N}, \quad (2.46)$$

$\bar{\gamma}_{n+1} = 0$, $\gamma_{n+2} = 0$, 则产生了一条从 a 到 e 的一条轨道使得

$$\sum_{k=1}^{n+1} d(f^{\gamma_k}(x_{k-1}), f^{\bar{\gamma}_k}(x_k)) < \epsilon + d(c, e), \quad (2.47)$$

因此,

$$h(e) \leq d(c, e) + \epsilon. \quad (2.48)$$

因为 ϵ 是大于 $h(c)$ 的任意一个数, 所以得

$$h(e) \leq d(c, e) + h(c). \quad (2.49)$$

同理可得

$$h(d) \leq d(c, e) + h(e). \quad (2.50)$$

因此得到

$$|h(c) - h(d)| \leq d(c, e). \quad (2.51)$$

所以, h 是 Lipschitz 连续函数. 从定义知 h 函数是不变函数, 因为 $E(a)$ 与 $E(b)$ 的交为空集, 所以 $h(b) \neq 0$. 因此产生矛盾, 定理得证. $\square$

定理 2.7 下面几个性质互相等价:

- (i) f 在 X 中是 Lipschitz 各态历经的;
- (ii) 对任意 $p \in X$, $E(p) = X$;
- (iii) 存在 $p \in X$ 使得 $E(p) = X$.

证明 (ii) $\Rightarrow$ (iii) 显然成立.

下面证明 (iii) $\Rightarrow$ (i). 假设存在 $p \in X$ 使得 $E(p) = X$, 则对任意两点 $q_1, q_2 \in X$, 存在 $E(p, \epsilon/2)$ 轨道连接 p 和 q_1 , 也就是存在集合

$$\{x_0, x_1, \dots, x_m\} \subset X \quad (2.52)$$

和集合

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_m, \gamma_m, \gamma_{m+1}\} \subset \mathbb{N} \quad (2.53)$$

使得

$$\sum_{k=1}^m d(f^{\gamma_k}(x_{k-1}), f^{\bar{\gamma}_k}(x_k)) < \frac{\epsilon}{4}, \quad (2.54)$$

并且

$$f^{\gamma_0}(x_0) = p \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_0}(p) = x_0 \quad (2.55)$$

有一个成立, 同时

$$f^{\gamma_{m+1}}(x_m) = q_1 \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_{m+1}}(q_1) = x_m \quad (2.56)$$

有一个成立.

不失一般性, 假设是这种情形:

$$f^{\gamma_0}(x_0) = p \quad \text{和} \quad f^{\gamma_{m+1}}(x_m) = q_1. \quad (2.57)$$

同样存在 $E(p, \epsilon/2)$ 轨道连接 p 和 q_1 , 即存在集合

$$\{y_0, y_1, \dots, y_r\} \subset X \quad (2.58)$$

和集合

$$\{\beta_0, \beta_1, \bar{\beta}_1, \beta_2, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_r, \beta_r, \beta_{r+1}\} \subset \mathbb{N} \quad (2.59)$$

使得

$$\sum_{k=1}^r d(f^{\beta_k}(y_{k-1}), f^{\bar{\beta}_k}(y_k)) < \frac{\epsilon}{4}, \quad (2.60)$$

并且

$$f^{\beta_0}(y_0) = p \quad \text{或者} \quad f^{\beta_0}(p) = y_0 \quad (2.61)$$

有一个成立, 同时

$$f^{\beta_{r+1}}(y_r) = q_1 \quad \text{或者} \quad f^{\beta_{r+1}}(q_1) = y_r \quad (2.62)$$

有一个成立.

不失一般性, 假设是这种情形:

$$f^{\beta_0}(y_0) = p \quad \text{和} \quad f^{\beta_{r+1}}(y_r) = q_1. \quad (2.63)$$

这时我们取新的集合

$$\{\beta_{r+1}, \bar{\beta}_r, \beta_r, \dots, \bar{\beta}_2, \beta_2, \bar{\beta}_1, \beta_1, \beta_0, \gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \gamma_m, \bar{\gamma}_m, \gamma_{m+1}\} \subset \mathbb{N} \quad (2.64)$$

和集合

$$\{y_r, \dots, y_1, y_0, x_0, x_1, \dots, x_m\} \subset X, \quad (2.65)$$

从而产生相应的 $E(q, \epsilon)$ 连接 q_2 和 q_1 , 因此, f 在 X 上是 E 链传递的, 由定理 2.6 知 f 在 X 中是 Lipschitz 各态历经的.

假设 (i) 成立, 则由定理 2.6 知, f 是 E 链传递的. 从而任意两点 $a, b \in X$, 对于任意的 $\epsilon > 0$, 都有 $E(a, \epsilon)$ 轨道连接 a 和 b , 也就是存在集合

$$\{x_0, x_1, \dots, x_m\} \subset X \quad (2.66)$$

和集合

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_m, \gamma_m, \gamma_{m+1}\} \subset \mathbb{N} \quad (2.67)$$

使得

$$\sum_{k=1}^m d(f^{\gamma_k}(x_{k-1}), f^{\bar{\gamma}_k}(x_k)) < \epsilon, \quad (2.68)$$

并且

$$f^{\gamma_0}(x_0) = a \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_0}(a) = x_0 \quad (2.69)$$

有一个成立, 同时

$$f^{\gamma_{m+1}}(x_m) = b \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_{m+1}}(b) = x_m \quad (2.70)$$

有一个成立. 因此, 固定任意一个点 $a \in X$, 对于任意一个点 $b \in X$, 有 $b \in E(a)$, 所以 $X \subset E(a)$. 另外一个方向 $E(a) \subset X$ 显然成立, 所以 $E(a) = X$. 因为 a 是任意取的, 所以 (ii) 成立, 故定理得证. $\square$

注 2.8 当不是全空间 X 时, 可以用 X 的不变闭子集 A 来代替, f 限制在 A 上可以得到类似的结论.

定理 2.9 f 在 X 中关于不变测度 μ 是广义各态历经的, 当且仅当 f 关于不变测度 μ 是几乎 E 链传递的.

证明 假设 f 在 X 中关于不变测度 (f, μ) 是广义各态历经的, 也就是对于任何满足 $G(f(x)) = G(x)$ ($\forall x \in X$) 的 Lipschitz 函数 $G: X \rightarrow \mathbb{R}$, 可以推出 G 关于不变测度 μ 几乎处处为常数. 那么我们可以取出一个不变集合 A , $\mu(A) = 1$, 且对于任何满足 $G(f(x)) = G(x)$ ($\forall x \in X$) 的 Lipschitz 函

数 $G: X \rightarrow \mathbb{R}$, 可以推出 G 在 A 上处处为常数, 因此是 Lipschitz 各态历经的. 由定理 2.6 知, f 是 E 链传递的, 又因为 $\mu(A) = 1$, 所以, f 关于不变测度 (f, μ) 是几乎 E 链传递的.

假设 f 关于不变测度 (f, μ) 是几乎 E 链传递的, 那么我们可以取出一个不变集合 A , $\mu(A) = 1$, 且 f 在 A 上是 E 链传递的. 由定理 2.6 知, f 在 A 上是 Lipschitz 各态历经的. 又因为 $\mu(A) = 1$, 所以, f 在 X 中关于不变测度 (f, μ) 是广义各态历经的, 也就是对于任何满足 $G(f(x)) = G(x)$ ($\forall x \in X$) 的 Lipschitz 函数 $G: X \rightarrow \mathbb{R}$, 可以推出 G 关于不变测度 μ 几乎处处为常数. $\square$

定理 2.10 下面三个性质相互等价:

- (i) f 在 X 上关于测度 μ 是广义各态历经的;
- (ii) 存在 $A \in \beta$, 使得 $\mu(A) = 0$, 且对任意的 $p \in X \setminus A$, 有 $E(p) \in \beta$, 使得 $\mu(E(p)) = 1$;
- (iii) 存在 $p \in X$, 使得 $E(p) \in \beta$, 并且 $\mu(E(p)) = 1$.

证明 从 (ii) 到 (iii) 的证明显然成立.

当 (iii) 成立时, 考虑 f 限制在 $E(p)$ 上, 则由定理 2.7 知, f 在 $E(p)$ 上是 Lipschitz 各态历经的, 从而 f 在 X 上关于测度 μ 是广义各态历经的, 故 (i) 得证.

假设 (i) 成立, 则由定理 2.9 知, f 在 X 中是几乎 E 链传递的. 因此存在不变集合 $A \in \beta$, 使得 $\mu(A) = 0$, f 在 X 中是 A 链传递的, 即对任意两点 $p, q \in X \setminus A$ 和任意的 $\epsilon > 0$, 存在集合

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset X \quad (2.71)$$

和集合

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \gamma_n, \bar{\gamma}_n, \gamma_{n+1}\} \subset \mathbb{N} \quad (2.72)$$

使得

$$\sum_{k=1}^n d(f^{\gamma_k}(x_{k-1}), f^{\bar{\gamma}_k}(x_k)) < \epsilon, \quad (2.73)$$

并且

$$f^{\gamma_0}(x_0) = p \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_0}(p) = x_0 \quad (2.74)$$

有一个成立, 同时

$$f^{\gamma_{n+1}}(x_n) = q \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_{n+1}}(q) = x_n \quad (2.75)$$

有一个成立. 因此, 对于 $X \setminus A$ 中的任意一点 r , 有 $E(r) \supset A$, 由 A 的定义知 $X \setminus A \in \beta$. 因为 $\mu(A) = 0$, 且 μ 是完备的, 所以 $E(r) \in \beta$, 且 $\mu(E(r)) = 1$, 故 (ii) 成立. $\square$

推论 2.11 f 关于测度 μ 是广义各态历经的, 当且仅当对任意一点 $p \in X$, 有

$$E(p) \in \beta, \quad \mu(\{p \in X \mid \mu(E(p)) = 0\}) = 0.$$

同时, 若任意一个集合 $A \in \beta$, 满足 $\mu(A) > 0$, 则 $\mu(E(A)) = 1$.

推论 2.12 f 关于测度 μ 是广义各态历经的, 当且仅当存在 $A \in \beta$, 使得 f 在 A 中是 E 链传递的, 同时 $E(A) \in \beta$ 并且 $\mu(E(A)) = 1$.

3 对偶不变集

本节总是假设 I 是 X 的一个不变子集. 为了研究半群的对偶不变集, 这里推广 α 极限集的定义为

$$\alpha(p) = \{q \in X \mid \text{任意 } \epsilon > 0, \text{ 存在 } n \in N, q_n \in X, \text{ 使得 } d(q, q_n) < \epsilon, \text{ 且 } f^n(q_n) = p\}. \quad (3.1)$$

另外, ω 极限集的定义就是传统的定义. 同时定义与 I 有紧密关系的两个对偶不变集合 I^* 和 $D(I)$ 如下:

$$I^* = \{p \in X \mid (\alpha(p) \cup \omega(p)) \cap I = \emptyset\}, \quad (3.2)$$

$$D(I) = \{p \in X \mid \alpha(p) \cap I \neq \emptyset, \omega(p) \cap I \neq \emptyset\}, \quad (3.3)$$

那么 I^* 和 $D(I)$ 都是不变子集, I^* 称作 I 的对偶不变集, $D(I)$ 称作 I 的影响区域. 如果 I 是闭的不变子集, 则 $I \cap I^* = \emptyset$ 且 $I \subset D(I)$. 如果 I 是一个吸引子, 则 $I = D(I)$ 且 I^* 是对偶的排斥子. 如果 $A \subset X$, 记

$$F(A) = \text{Cl}\{p \in X \mid \exists q \in A, \exists n \in \mathbb{N}, \text{使得 } f^n(q) = p \text{ 成立, 或者 } f^n(q) = p \text{ 成立}\}. \quad (3.4)$$

定理 3.1 ^[14] 设 $A, B \in \beta$, 如果 f 在 A 和 B 上是 E 链传递的, 并且

$$d(F(A), F(B)) = 0,$$

则 f 在 $A \cup B$ 是 E 链传递的.

定理 3.2 如果存在 X 中的闭不变子集 I , 使得 f 在 I 和 I^* 上都是链传递的, 且

$$X \setminus (D(I) \cup I^*) \neq \emptyset,$$

则 f 在 X 上是 Lipschitz 各态历经的.

证明 当 I 为空集时显然成立.

下面假设 I 不为空集. 记 $B = X \setminus (D(I) \cup I^*)$, 对于任意两点 $p, q \in B$, 有

$$(\alpha(p) \cup \omega(p)) \cap I \neq \emptyset \quad (3.5)$$

和

$$(\alpha(q) \cup \omega(q)) \cap I \neq \emptyset. \quad (3.6)$$

因此存在两点 $p_1, q_1 \in I$ 和 $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$d(f^{n_1}(p), p_1) < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{或者} \quad d(f^{n_1}(p_1), p) < \frac{\epsilon}{4}, \quad (3.7)$$

$$d(f^{n_2}(q), q_1) < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{或者} \quad d(f^{n_2}(q_1), q) < \frac{\epsilon}{4}. \quad (3.8)$$

不失一般性, 假设

$$d(f^{n_1}(p), p_1) < \frac{\epsilon}{4} \quad (3.9)$$

和

$$d(f^{n_2}(q), q_1) < \frac{\epsilon}{4}. \quad (3.10)$$

因为 I 是 E 链传递的, 所以存在集合

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset X \quad (3.11)$$

和集合

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n, \gamma_n, \gamma_{n+1}\} \subset \mathbb{N} \quad (3.12)$$

使得

$$\sum_{k=1}^n d(f^{\gamma_k}(x_{k-1}), f^{\bar{\gamma}_k}(x_k)) < \frac{\epsilon}{4}, \quad (3.13)$$

并且

$$f^{\gamma_0}(x_0) = p_1 \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_0}(p_1) = x_0 \quad (3.14)$$

有一个成立, 同时

$$f^{\gamma_{n+1}}(x_n) = q_1 \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_{n+1}}(q_1) = x_n \quad (3.15)$$

有一个成立. 不失一般性, 假设

$$f^{\gamma_0}(x_0) = p_1 \quad \text{和} \quad f^{\gamma_{n+1}}(x_n) = q_1, \quad (3.16)$$

此时取新的集合

$$\{p, x_0, x_1, \dots, x_n, q\} \subset X \quad (3.17)$$

和集合

$$\{0, n_1, \gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n, \gamma_n, \gamma_{n+1}, n_2, 0\} \subset \mathbb{N}. \quad (3.18)$$

由此得到 $E(p, \epsilon)$ 轨道连接 p 和 q , 所以, 对于 B 中任意两点 p 和 q , 可以找到一条 $E(p, \epsilon)$ 轨道连接这两点, 故是 E 链传递的.

从上面证明可知 $d(F(I), F(B)) = 0$, 又因为 I 和 B 都是 E 链传递的, 通过定理 3.1 知, $I \cup B$ 是 E 链传递的.

令 $r \in B$, 则

$$\alpha(r) \cap I = \emptyset \quad \text{和} \quad \omega(r) \cap I = \emptyset \quad (3.19)$$

有且只有一个成立. 不妨设 $\alpha(r) \cap I = \emptyset$, 则由 α 极限集的性质可知, $\alpha(r) \subset I^*$. 因为 X 是紧的, 所以 $\alpha(r) \neq \emptyset$. 又因 I 是闭的不变集, 故 $I \subset D(I)$. 因此,

$$d(F(B \cup I), F(I^*)) = 0. \quad (3.20)$$

因为 I^* 和 $I \cup B$ 都是 E 链传递的, 所以, $I^* \cup I \cup B$ 是 E 链传递的. 又由 $D(I)$ 的定义可知, $I^* \cup D(I) \cup B$ 是 E 链传递的, 因此, X 是 E 链传递的. 故 f 是 Lipschitz 各态历经的. $\square$

假设 I 是 X 的一个不变子集. 记

$$D_1(I) = \{p \in X \mid \alpha(p) \subset I, \omega(p) \cap I = \emptyset\} \cup \{p \in X \mid \omega(p) \subset I, \alpha(p) \cap I = \emptyset\}. \quad (3.21)$$

定理 3.3 如果存在 X 的一个闭不变子集 I 使得

(i) $I, I^* \in \beta, \mu(I \cup I^*) = 1$, 并且 f 在 I 和 I^* 上关于测度 μ 是几乎 E 链传递的;

(ii) 存在一个点 $q_0 \in D_1(I)$, 使得 $\alpha(q_0), \omega(q_0) \in \beta, \mu(\alpha(q_0)) > 0, \mu(\omega(q_0)) > 0$,

则 f 在 X 上关于测度 μ 是广义各态历经的.

证明 当 I 为空集时显然成立, 下面假定 I 不是空集. 因为存在一个点 $q_0 \in D_1(I)$, 而且

$$D_1(I) = \{p \in X \mid \alpha(p) \subset I, \omega(p) \cap I = \emptyset\} \cup \{p \in X \mid \omega(p) \subset I, \alpha(p) \cap I = \emptyset\}, \quad (3.22)$$

不失一般性, 我们假定

$$\alpha(q_0) \subset I, \quad \omega(q_0) \cap I = \emptyset. \quad (3.23)$$

记集合

$$A = \{p \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ 使得 } f^n(p) = q_0 \text{ 或者 } f^n(q_0) = p\}. \quad (3.24)$$

根据定义知, A 是 E 链传递的. 因为 X 是紧距离空间, I 是 X 的一个闭不变子集, 并且 $\omega(p) \cap I = \emptyset$, 因此 $A \cap I = \emptyset$. 因为 $\alpha(q_0) \subset I$, 所以 $A \cap I^* = \emptyset$. 因为 $\mu(I \cup I^*) = 1$, 所以 $\mu(A) = 0$.

因为 I 和 I^* 是关于不变测度 μ 的几乎 E 链传递的, 因此存在集合 $A_1 \subset I$, $A_2 \subset I^*$ 使得

$$\mu(A_1) = 0, \quad \mu(A_2) = 0,$$

并且 f 在 $I \setminus A_1$ 和 $I^* \setminus A_2$ 都是 E 链传递的. 因为

$$\mu(q_0) > 0, \quad d(F(A), F(I \setminus A_1)) = 0,$$

因此, f 在 $A \cup (I \setminus A_1)$ 上是 E 链传递的.

因为 $\omega(q_0) \cap I = \emptyset$, 根据极限集的性质知, $\omega(q_0) \in I^*$, 又因为 $\mu(\omega(q_0)) > 0$, 所以,

$$d(F(A \cup (I \setminus A_1)), F(I^* \setminus A_2)) = 0. \quad (3.25)$$

故 f 在 $A \cup (I \setminus A_1) \cup (I^* \setminus A_2)$ 上是 E 链传递的. 因为 $\mu(I \cup I^*) = 1$, 所以

$$\mu(A \cup (I \setminus A_1) \cup (I^* \setminus A_2)) = 1.$$

因此 f 在 X 上是关于测度 μ 几乎 E 链传递的. 根据定理 2.9 知, f 在 X 上是关于测度 μ 的一般各态历经, 定理得证. $\square$

4 Ω - 扩张集

本节引进 Ω - 扩张集, 并且讨论 Ω - 扩张集和广义各态历经以及 Lipschitz 各态历经之间的关系. 假设 A 是 X 的一个子集. 记

$$A_1 = \text{Cl}\{p \in X \mid (\alpha(p) \cup \omega(p)) \cap F(A) \neq \emptyset\}, \quad (4.1)$$

$$A_i = \text{Cl}\{p \in X \mid (\alpha(p) \cup \omega(p)) \cap F(A) \neq \emptyset\}, \quad i = 2, 3, \dots, \quad (4.2)$$

那么

$$A \subset F(A) \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots, \quad (4.3)$$

记

$$\Omega(A) = \text{Cl}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

$\Omega(A)$ 称作 A 的 Ω - 扩张集. 从定义有 $A \subset \Omega(A)$, 且 $\Omega(A)$ 是 X 的一个闭不变子集.

定理 4.1 如果 f 在 A 上是 E 链传递集, 则 f 在 $\Omega(A)$ 上也是 E 链传递的.

证明 任取两点 $p, q \in \Omega(A)$, 对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $n, l, r \in \mathbb{N}$,

$$p', q' \in \bigcup_{k=1}^n A_k,$$

使得

$$d(p, p') < \frac{\epsilon}{8}, \quad d(q, q') < \frac{\epsilon}{8},$$

同时 $p' \in A_l$, $q' \in A_r$, 则存在 $l \geq 0$, $p_0 \in A$, $p_1 \in A_1, \dots, p_l = p' \in A_l$ 使得点列 $\{p_m\}$ 中任何两点 p_m 和 p_{m+1} 之间存在集合

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset X$$

和集合

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \dots, \gamma_n, \bar{\gamma}_n, \gamma_{n+1}\} \subset \mathbb{N}$$

使得

$$\sum_{k=1}^n d(f^{\gamma_k}(x_{k-1}), f^{\bar{\gamma}_k}(x_k)) < \frac{\epsilon}{2^{m+4}},$$

并且

$$f^{\gamma_0}(x_0) = p_m \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_0}(p_m) = x_0$$

有一个成立, 同时

$$f^{\gamma_{n+1}}(x_n) = p_{m+1} \quad \text{或者} \quad f^{\gamma_{n+1}}(p_{m+1}) = x_n$$

有一个成立. 同理存在 $l \geq 0$, $q_0 \in A$, $q_1 \in A_1, \dots, q_r = q' \in A_r$ 使得点列 $\{q_m\}$ 中任何两点 q_m 和 q_{m+1} 之间存在集合

$$\{y_0, y_1, \dots, y_j\} \subset X$$

和集合

$$\{\beta_0, \beta_1, \bar{\beta}_1, \beta_2, \bar{\beta}_2, \dots, \beta_j, \bar{\beta}_j, \beta_{j+1}\} \subset \mathbb{N}$$

使得

$$\sum_{k=1}^j d(f^{\beta_k}(y_{k-1}), f^{\bar{\beta}_k}(y_k)) < \frac{\epsilon}{2^{m+4}},$$

并且

$$f^{\beta_0}(y_0) = q_m \quad \text{或者} \quad f^{\beta_0}(q_m) = y_0$$

有一个成立, 同时

$$f^{\beta_{j+1}}(y_j) = q_{m+1} \quad \text{或者} \quad f^{\beta_{j+1}}(q_{m+1}) = y_j$$

有一个成立.

把这样的轨道连接起来再加上两头的 p, p' 和 q, q' 的轨道, 就得到了一个 $E(p, \epsilon)$ 轨道连接 p 和 q . 因此 $\Omega(A)$ 也是 E 链传递集, 定理得证. $\square$

定理 4.2 假设 $A \subset X$, 如果 f 在 A 上是 E 链传递的, 并且 $\Omega(A) = X$, 则 f 在 X 上是 Lipschitz 传递的.

证明 从 $\Omega(A) = X$ 知 A 不是空集. 由于 A 是 E 链传递的, 从定理 4.1 知 $\Omega(A)$ 也是 E 链传递的. 因为 $\Omega(A) = X$, 所以, f 在 X 上是 E 链传递的. 通过定理 2.6 知, f 在 X 上是 Lipschitz 各态历经的. 故定理得证. $\square$

定理 4.3 假设 $A \subset X$, f 在 A 上是 E 链传递的, $\Omega(A) \in \beta$ 并且 $\mu(\Omega(A)) = 1$, 则 f 在集合 X 上是关于测度 μ 广义各态历经的.

证明 因为 $\mu(\Omega(A)) = 1$, 所以 $A \neq \emptyset$. 我们记 $D = X \setminus \Omega(A)$. 因此 $D \in \beta$ 并且 $\mu(D) = 0$. 因为 A 是 E 链传递的, 根据定理 4.1 知, f 在 $\Omega(A)$ 上也是 E 链传递的, 又因为 $\mu(D) = 0$, 所以, f 在 X 上关于测度 μ 是几乎 E 链传递的. 根据定理 2.9 知, f 关于测度 μ 是广义各态历经的, 故定理得证. $\square$

5 例子

本节给出例子说明各态历经、Lipschitz 各态历经和广义各态历经之间的关系.

例 5.1 若 X 是一个二维环面:

$$X = T^2 = \frac{R^2}{Z^2} = \{[x, y] \mid [x, y] = [\bar{x}, \bar{y}], x - \bar{x} \in Z, y - \bar{y} \in Z, 0 \leq \bar{x} < 1, 0 \leq \bar{y} < 1\},$$

则 X 同胚于 $S^1 \times S^1$, 任何 X 中的两点之间的距离取 $S^1 \times S^1$ 相应点的距离. 若

$$f([x, y]) = \begin{cases} [x, 3y], & 0 \leq x \leq 0.2, \\ [1.25x - 0.05, 3y], & 0.2 < x \leq 0.6, \\ [0.75x + 0.25, 3y], & 0.6 < x < 1, \end{cases} \quad (5.1)$$

则 f 是一个 X 上的微分同胚. 记 X 中的 Borel σ 代数 β , 令 $X_0 = \{[x, y] \mid x = 0\}$, 则 X_0 是 X 的一个紧不变子集, 我们取它上面的 Lebesgue 测度为 μ_1 , 因此存在一个不变测度 μ . 令

$$\mu(V) = \mu_1(V \cap X_0), \quad \text{对于任意的 } V \in \beta.$$

由文献 [15] 知, f 关于测度 μ 是各态历经的, 因为 X 不是 E 链传递的, 所以, f 在 X 上不是 Lipschitz 各态历经的.

例 5.2 若 X 是一个一维球面:

$$X = \frac{R}{Z} = \{(\rho, \theta) \mid \rho = 1, \theta \in [0, 2\pi)\},$$

$$d((\rho, \theta_1), (\rho, \theta_2)) = |\theta_1 - \theta_2|, \quad \forall (\rho, \theta_1), (\rho, \theta_2) \in X,$$

X 上的微分同胚是

$$f(\rho, \theta) = (\rho, 3\theta),$$

则在单位圆周上存在一个 3 周期轨道 $\{p_0, p_1, p_2\}$ 和一个 2 周期轨道 $\{q_0, q_1\}$. 因为 f 在单位圆周上是拓扑传递的, 因此也是 E 链传递的, 故是 Lipschitz 各态历经的, 取不变测度为

$$\mu = \frac{1}{5}(\delta_{p_0} + \delta_{p_1} + \delta_{p_2} + \delta_{q_0} + \delta_{q_1}).$$

因为周期轨道是不变子集, 所以上面的是不变概率测度, 我们取不变子集为 $\{p_0, p_1, p_2\}$, 则 $\mu\{p_0, p_1, p_2\} = \frac{3}{5}$, 因此, f 关于不变测度 μ 不是各态历经的.

例 5.3 令

$$f([x, y]) = \begin{cases} [x, 3y], & 0 \leq x \leq 0.2, \\ [1.25x - 0.05, 3y], & 0.2 < x \leq 0.6, \\ [0.75x + 0.25, 3y], & 0.6 < x < 1. \end{cases} \quad (5.2)$$

X 中的 Broel σ 代数 β , 令 $X_0 = \{[x, y] \mid x = 0\}$, $X_1 = \{[x, y] \mid x = 0.2\}$, 取 X_0 上面的 Lebesgue 测度为 μ_0 , X_1 上面的 Lebesgue 测度为 μ_1 , 令 $\mu = \frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_1$, 则

$$\mu(V) = \frac{1}{2}\mu_0(V \cap X_0) + \frac{1}{2}\mu_1(V \cap X_1), \quad \forall V \in \beta.$$

取不变子集 X_0 , 则 $\mu(X_0) = \frac{1}{2}$, 因此, f 关于测度 μ 不是各态历经的.

任取两点 p 和 q , 它们的 x 坐标分别是 0.1 和 0.11, 则这两点的轨道分别在 $X_2 = \{[x, y] \mid x = 0.1\}$ 和 $X_3 = \{[x, y] \mid x = 0.11\}$ 内变化, 它们附近的点也是在各自的圆周中变化, 因此没有 E 链连接它们, 故 f 不是 E 链传递的, 所以, f 在 X 上不是 Lipschitz 各态历经的.

但是我们取集合

$$X_4 = \{[x, y] \mid x = 0, 0.2 \leq x < 1\},$$

则任何两点之间有 E 链连接, 依次是 E 链传递的, 所以 f 在 X_4 中是 Lipschitz 各态历经的, 又因为 X_4 是不变子集, 且 $\mu(X_4) = 1$, 因此, f 在 X 中是关于测度 μ 的广义各态历经.

6 推广的结论

实际研究中会有很多不连续的模型, 对于不连续情形形成的半群的各态历经和 Lipschitz 各态历经的性质, 有很多实用价值, 其中大部分连续性的结果可以推广到不连续的情形, 但是有些连续情形特有的性质会消失.

f 限制在 A 上是 Lipschitz 各态历经的, 当且仅当 f 在 A 上是 E 链传递的. 这个定理当 f 是连续情形是成立的, 当 f 是不连续情形是否也是成立的? 文中涉及 E 链条件的情形是否都可以推广到不连续的情形?

参考文献

- 1 Birkhoff G D. Proof of the ergodic theorem. Proc Natl Acad Sci USA, 1931, 17: 656–660
- 2 von Neumann J. Proof of the quasi-ergodic hypothesis. Proc Natl Acad Sci USA, 1932, 18: 70–82
- 3 Kolmogorov A N. On dynamical systems with an integral invariant on the torus. Dokl Akad Nauk SSSR, 1953, 93: 763–766
- 4 Ornstein D S, Weiss B. Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups. J Anal Math, 1987, 48: 1–141
- 5 Walters P. An Introduction to Ergodic Theory. New York: Springer-Verlag, 1982
- 6 Arnold V I, Avez A. Ergodic Problems of Classical Mechanics. New York: Benjamin, 1968
- 7 Chen G R, Zheng Z H. An equivalent relationship in discrete dynamical systems. Comput Math Appl, 2005, 49: 1433–1437
- 8 Conley C. Isolated Invariant Set and the Morse Index. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 38. Providence: Amer Math Soc, 1978
- 9 Wang H F, Yu S X. Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations. Guangzhou: Guangdong Higher Education Publishing House, 1996
- 10 Yu S X. On dynamical systems with an integral invariant on the torus. J Differential Equations, 1984, 53: 277–287
- 11 Zheng Z H. Chain transitivity and Lipschitz ergodicity. Nonlinear Anal, 1998, 34: 733–744
- 12 Zheng Z H. Necessary and sufficient conditions for Lipschitz ergodicity and generalized ergodicity. Sci China Math, 2013, 56: 777–787
- 13 Easton R. Chain transitivity and the domain of influence of an invariant set. In: Lecture Notes in Mathematics, vol. 668. New York: Springer, 1978, 95–102
- 14 Zheng Z H. Generalized ergodicity. Sci China Ser A, 2001, 44: 1098–1106

The Lipschitz ergodicity and generalized ergodicity of semigroups

XIA Xu, ZHENG ZuoHuan & ZHOU Zhe

Abstract In this paper, the semigroup is defined by the continuous transformation on the compact metric space. We use the chain recurrence to study the Lipschitz ergodicity and generalized ergodicity. Some criterions for a system to be Lipschitz ergodic or generalized ergodic are given. At last, we illustrate the relationship between ergodicity, generalized ergodicity and Lipschitz ergodicity.

Keywords Lipschitz ergodicity, generalized ergodicity, dual invariant set, continuation region, Ω -expansive set

MSC(2010) 37A20, 37E45, 37H05, 47E05, 81Q10

doi: 10.1360/N012016-00090