Fokker-Planck 算子和 Witten Laplacian 的谱分析

献给齐民友教授 90 华诞

李维喜

武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072

E-mail: wei-xi.li@whu.edu.cn

收稿日期: 2018-02-16; 接受日期: 2018-05-07; 网络出版日期: 2018-12-13

霍英东教育基金会 (批准号: 151001) 和国家自然科学基金 (批准号: 11422106) 资助项目

摘要 本文主要介绍如何应用经典以及最新发展的亚椭圆工具来分析来源于数学物理问题的一类算子的谱性质. 特别地, 本文将重点分析 Fokker-Planck 算子和 Witten Laplacian 这两个算子预解式紧性的判别法则以及两者之间的关系.

关键词 谱理论 亚椭圆技巧 Fokker-Planck Witten Laplacian 预解式 紧性判别法则

MSC (2010) 主题分类 35H10, 35H20, 47A10, 81Q10

1 引言

Fokker-Planck 算子是一个非自伴、退化椭圆算子, 其可以写为

$$P = y \cdot \partial_x - \partial_x V(x) \cdot \partial_y - \Delta_y + \frac{|y|^2}{4} - \frac{n}{2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (1.1)$$

其中 y 代表速度变元, x 代表空间变元. 而 Witten Laplacian 是椭圆、自伴的算子:

$$\Delta_V^{(0)} = -\Delta_x + |\partial_x V(x)|^2 - \Delta_x V(x). \quad (1.2)$$

Witten Laplacian 是一类特殊的 Schrödinger 算子 $-\Delta + \tilde{V}$, 其中

$$\tilde{V} = |\partial_x V(x)|^2 - \Delta_x V(x).$$

虽然这是两个截然不同的算子, 但是, Helffer 和 Nier^[1] 于 2005 年提出了一个猜想, 揭示了这两个算子的谱性质其实是紧密联系在一起的.

英文引用格式: Li W X. Spectral analysis for Fokker-Planck operator and Witten Laplacian (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 161–174, doi: 10.1360/N012018-00033

猜想 1.1 (Helffer-Nier 猜想) Fokker-Planck 算子的预解式是紧算子当且仅当 Witten Laplacian 的预解式是紧算子.

上述猜想的必要性部分已经由 Helffer 和 Nier 在文献 [1, 定理 1.1] 中证明:

定理 1.2 假设 $V \in C^\infty$. 若 Fokker-Planck 算子有紧的预解式, 则 Witten Laplacian 也有紧的预解式.

定理 1.2 充分性部分仍然是未知的, 到目前为止仅有部分结果, 最近的进展是 Li^[2] 对一类特殊的势能函数证明了充分性:

定理 1.3 假设 $V \in C^2$ 满足如下条件:

$$\forall |\alpha| = 2, \quad |\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle \partial_x V(x) \rangle^s, \quad s < \frac{4}{3},$$

其中 $\langle \cdot \rangle = (1 + |\cdot|^2)^{1/2}$. 如果 Witten Laplacian 有紧的预解式, 则 Fokker-Planck 算子也有紧的预解式.

本文将介绍关于 Fokker-Planck 算子和 Witten Laplacian 这两个算子的预解式紧性的判别法则, 揭示这两个算子谱理论的内在联系. 关于紧性的判别法则, 这里主要的方法和工具是亚椭圆分析. 亚椭圆分析是 Hörmander、Kohn、Stein 和 Trèves 等在研究退化椭圆方程时发展起来的一套理论, 目前已有大量的工作. 在这些工作中主要有两种不同的技巧, 一种技巧称为 “Kohn 方法” (参见文献 [3]), 该方法虽然不能得到最佳的亚椭圆估计, 但是在应用上有很大的灵活性; 另一种技巧由 Rothschild 和 Stein^[4] 建立, 进一步由 Nourrigat^[5-7] 及 Helffer 和 Nourrigat^[8] 推广发展, 由于其基于幂零李群, 故在灵活性应用方面与 Kohn 方法相比稍欠缺, 但是这里得到的正则性估计是最佳的. 除了上述两类经典方法, 我们还将介绍一类新的方法, 即所谓的乘子方法^[9], 是研究非自伴算子的一个非常有效的工具.

Fokker-Planck 算子和 Witten Laplacian 在统计物理、复分析与复几何以及偏微分方程等领域都有广泛的应用, 例如, 统计物理和动理学方程的解趋于稳态解的指数速率问题^[10-14], Witten 复形以及 Morse 不等式^[15-18], $\bar{\partial}$ -Neumann 问题的紧性研究^[19-24], Schrödinger 算子的谱分析以及半经典分析^[25-30], 全局 Weyl-Hörmander 拟微分运算以及非自伴算子的谱性质等.

2 Witten Laplacian 预解式紧性的判别法则

Witten Laplacian 首先由 Witten^[18] 引入:

$$\Delta_V(\cdot) = d_V \circ d_V^* + d_V^* \circ d_V,$$

其中 $d_V = e^{-V} \circ d \circ e^V$, V 为给定的势能函数. 当 Witten Laplacian 作用在函数 (即 0 形式) 上时, $\Delta_V^{(0)}$ 由表达式 (1.2) 给出. 统计物理以及随机过程的一个重要问题是, Witten Laplacian 对应的发展方程的解是否指数趋近于稳态解? 这个问题归结于 Witten Laplacian 在 L^2 空间中是否有紧的预解式.

2.1 经典的紧性判别法则

由于 Witten Laplacian 是特殊的 Schrödinger 算子, 所以可以利用关于 Schrödinger 算子经典的紧性判别法则, 即如果当 $|x| \rightarrow +\infty$ 时,

$$|\partial_x V(x)|^2 - \Delta_x V \rightarrow +\infty,$$

则 Witten Laplacian 有紧的预解式. 事实上, 上述无穷远处形态可以由下面较弱的条件代替:

$$t |\partial_x V(x)|^2 - \Delta_x V \rightarrow +\infty, \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

其中 $t \in (0, 2)$, 详细的讨论参见文献 [1, 25].

另一个经典的方法是比较原理. 作为 C_0^∞ 空间的二次型, 如果

$$\Delta_V^{(0)} \geq T \geq 0,$$

其中 T 是 L^2 中自伴算子并且具有紧的预解式, 则 Witten Laplacian $\Delta_V^{(0)}$ 也有紧的预解式. 一个典型的例子是

$$V_\varepsilon = x_1^2 x_2^2 + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2),$$

其中 $\varepsilon > 0$. 通过简单的计算, 我们有

$$\Delta_{V_\varepsilon}^{(0)} \geq |\partial_x \tilde{V}_\varepsilon|^2 - \Delta \tilde{V}_\varepsilon, \quad \tilde{V}_\varepsilon = \varepsilon(x_1^2 + x_2^2).$$

故 $\Delta_{V_\varepsilon}^{(0)}$ 有紧的预解式. 下一节将重新讨论这个例子.

2.2 幂零李群在紧性判别法则中的应用

幂零李群的思想首先由 Rothschild 和 Stein [4] 建立, Rothschild-Stein 提升定理主要用于研究 Hörmander 算子的局部最佳亚椭圆性质. Rothschild-Stein 的幂零李群思想可以概括为, 我们将向量场“提升”到定义在幂零李群上的左不变算子, 我们仅需分析这些左不变算子就可以得到 Hörmander 算子的局部最佳正则性. 在后来的工作中, Nourrigat [5-7] 及 Helffer 和 Nourrigat [8] 将幂零李群的技巧进一步推广到拟微分算子和拟微分算子组, 这里主要的想法是将拟微分算子“表示”为定义在 Euclid 空间中的具有多项式系数的微分算子, 通过分析 Euclid 空间中的微分算子来获得原始的拟微分算子的极大估计. 如果将 Nourrigat 和 Helffer 的思想应用到具体的 Witten Laplacian, 则可以把问题转化为势能函数是多项式的 Witten Laplacian 的研究, 下面将详细讨论这一点.

令 E_r 为阶数小于或等于 r 的多项式的集合.

定义 2.1 称 E_r 的一个子集 $\mathcal{L}$ 为正规集, 如果其满足如下的性质:

(i) 如果 $p \in \mathcal{L}$, $y \in \mathbb{R}^n$, 则

$$q(x) = p(x + y) - p(y)$$

仍属于 $\mathcal{L}$;

(ii) 如果 $p \in \mathcal{L}$, $\delta > 0$, 则 $q(x) = p(\delta x)$ 仍属于 $\mathcal{L}$;

(iii) $\mathcal{L}$ 是 E_r 的一个闭子集.

如果 $V \in E_k$, 则记 $\mathcal{L}_V$ 为由 V 生成的最小的正规集. 事实上, $\mathcal{L}_V$ 由 $V(\lambda_j x + y_n) - V(y_j)$ ($\lambda_j > 0$, $y_j \in \mathbb{R}^n$) 所有可能的极限构成. 下面的定理是 Helffer-Nourrigat 幂零李群理论在 Witten Laplacian 谱分析中的应用, 参见文献 [1, 7, 8].

定理 2.2 假设 $V \in E_k$ 满足如下条件:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} |\partial^\alpha V(x)|^{1/|\alpha|} = +\infty, \quad (2.1)$$

假设 $\mathcal{L}_V \cap E_{k-1}$ 中除了常值多项式以外, 其他所有的多项式均没有局部最小值, 则 Witten Laplacian $\Delta_V^{(0)}$ 有紧的预解式. 进一步, 存在一个常数 C 使得

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \|(\partial_x V)u\|_{L^2}^2 \leq C(\Delta_V^{(0)} u, u)_{L^2} + C\|u\|^2. \quad (2.2)$$

注 2.3 估计式 (2.2) 称为 (全局) 极大估计, 本文中所有关于 Witten Laplacian 预解式紧性的判别法则均依赖于这个估计. 事实上, 由极大估计 (2.2) 以及无穷远处的形态 (2.1), 我们立刻可以得到预解式的紧性.

另一方面, Helffer-Nourrigat 幂零李群理论也可应用于局部最佳正则性估计以及 Witten Laplacian 的半经典的分析. 令 $\mathcal{L}_{p,0}$ 为 E_r 的一个正规集, 称 $q \in \mathcal{L}_{p,0}$, 如果 $q \in E_r$, $q(0) = 0$, 并且存在 $y_j \in \mathbb{R}^n$, $y_j \rightarrow 0$, 以及正数数列 τ_j ($h_j > 0$), 满足 $\tau_j \rightarrow +\infty$, $h_j \rightarrow 0$, 使得

$$\forall 1 \leq |\alpha| \leq r, \quad \partial^\alpha q(0) = \lim_{j \rightarrow \infty} \tau_j h_j^{|\alpha|} \partial_x^\alpha p(y_j).$$

定理 2.4 (局部极大估计 [8]) 令 $p \in E_r$. 假设 $\mathcal{L}_{p,0} \cap E_{r-1}$ 中的元素除了常值多项式外在 $\mathbb{R}^n$ 中均没有局部最小值, 则存在一个常数 $C > 0$ 和 0 的一个开邻域 Ω , 使得如下估计:

$$\|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \tau^2 \|(\partial_x p)u\|_{L^2}^2 \leq C(\Delta_{\tau p}^{(0)} u, u)_{L^2} + C\|u\|_{L^2}^2$$

对所有的 $\tau > 0$ 和所有的 $u \in C_0^\infty(\Omega)$ 均成立.

如果引入半经典参数 $h > 0$, 用 V/h 和 hd 分别替换 V 和 h , 则得到半经典的 Witten Laplacian

$$\Delta_{V,h}^{(0)} = -h^2 \Delta_x + |\partial_x V|^2 - h \Delta_x V.$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, 半经典 Witten Laplacian 的谱性质研究也是非常有意义的课题, 相关工作可以参见文献 [15–17, 25, 28–30]. 如果引入另一个参数

$$\tau = h^{-1},$$

则半经典 Witten Laplacian 可以重写为

$$h^{-2} \Delta_{V,h}^{(0)} = -\Delta_x + \tau^2 |\partial_x V|^2 - \tau \Delta_x V = \Delta_{\tau V}^{(0)}.$$

$\Delta_{\tau V}^{(0)}$ 的局部极大估计事实上是与复向量场

$$P_j = \partial_{x_j} - i(\partial_{x_j} V(x))\partial_t, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = \sqrt{-1} \quad (2.3)$$

的微局部亚椭圆问题有关, 此时必须考虑极限 $\tau \rightarrow +\infty$.

通过局部极大估计式, 我们可以得到算子的局部最佳正则性, 但是对算子的谱分析而言, 局部估计式是不够的, 此时我们需要全局估计, 到目前为止, 全局估计仅局限于多项式势能函数 (见定理 2.2) 或者其他一些特殊的势能函数, 如齐次势能或者解析势能 (参见文献 [1]). Helffer-Nourrigat 关于极大估计的判别法则中, 主要的部分是验证由势能函数生成的正规集里面的元素是否有局部最小值, 这是一个比较抽象的结果, 找出由势能函数生成的正规集并不是一件容易的事情. 最近, Li [31] 基于 Hesse 矩阵的特征值估计, 对于一般的势能函数给出了一个新的判别法则. 与 Helffer-Nourrigat 的判别法则相比, 这个判别法则更直接一些, 因为这里的条件只涉及势能函数本身.

在叙述我们的结果之前, 我们先看关于全局极大估计式成立的一个平凡条件. 注意到

$$(\Delta_V^{(0)} u, u)_{L^2} = \|(\partial_x V)u\|_{L^2}^2 + \|(\partial_x V)u\|_{L^2}^2 - ((\Delta_V)u, u)_{L^2}.$$

因此, 如果 V 满足条件

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{j \in I_x} \lambda_j(x) < \sum_{j \notin I_x} (-\lambda_j(x)) + |\partial_x V(x)|^2 + C,$$

则极大估计显然成立, 其中 λ_j 代表 Hesse 矩阵 $(\partial_{x_i x_j} V)_{1 \leq i, j \leq n}$ 的特征值, I_x 定义为

$$I_x = \{1 \leq \ell \leq n; \lambda_\ell(x) > 0\}. \quad (2.4)$$

进一步, 如果 V 是一个 k 阶多项式, 则上述条件可以减弱为

$$\sum_{j \in I_x} \lambda_j(x) < \sum_{j \notin I_x} (-\lambda_j(x)) + |\partial_x V(x)|^2 + \varepsilon \tilde{f}(x)^2 + C,$$

其中 ε 是一个充分小的正数,

$$\tilde{f} = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} |\partial^\alpha V|^{\frac{1}{|\alpha|}}. \quad (2.5)$$

我们的主要假设可以表述如下:

假设 2.5 令 $k \geq 2$ 是一个给定的整数, I_x 和 $\tilde{f}$ 分别由 (2.4) 和 (2.5) 所定义. 给定 $V \in C^{k+1}$, 记 λ_ℓ 为 Hesse 矩阵 $(\partial_{x_i x_j} V)_{1 \leq i, j \leq n}$ 的特征值. 假设 V 满足如下所列条件:

(i) 存在一个常数 $C > 1$, 使得对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 均有

$$\sum_{j \in I_x} \lambda_j(x) \leq C \left(\mathcal{M}(x) + |\partial_x V(x)|^2 + \sum_{2 \leq |\alpha| \leq k} |\partial^\alpha V(x)|^{(2-\delta_1)/|\alpha|} + 1 \right); \quad (2.6)$$

其中 $0 < \delta_1 < 1$ 是一个任意小的正数, 函数 $\mathcal{M}$ 定义为

$$\mathcal{M}(x) = \sum_{j \notin I_x} (-\lambda_j(x));$$

(ii) 存在一个任意小的正数 $0 < \delta_2 < 1$, 使得

$$\forall |\alpha| = k+1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |\partial^\alpha V(x)| \leq C_\alpha (1 + \tilde{f}(x))^{k+1-\delta_2},$$

其中常数 C_α 仅依赖于 α .

(iii) 当 $|x| \rightarrow +\infty$ 时, $\tilde{f}(x) \rightarrow +\infty$.

定理 2.6 ^[31] 如果 V 满足假设 2.5 中所列的条件, 则可以找到两个常数 $C, \tau_0 > 0$, 使得

$$\forall \tau \geq \tau_0, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|\tilde{f}_\tau u\|_{L^2}^2 \leq C(\Delta_{\tau V}^{(0)} u, u)_{L^2} + C\|u\|_{L^2}^2, \quad (2.7)$$

其中 $\tilde{f}_\tau$ 定义为

$$\tilde{f}_\tau(x) = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \tau^{1/|\alpha|} |\partial^\alpha V(x)|^{1/|\alpha|}.$$

进一步, 对于任意一个 τ 满足条件 $0 < \tau < \tau_0$, 我们均能找到一个常数 C_τ (这里 C_τ 仅依赖于 τ 和估计式 (2.7) 中的常数 C), 使得

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|\tilde{f}_\tau u\|_{L^2}^2 \leq C_\tau (\Delta_{\tau V}^{(0)} u, u)_{L^2} + C\|u\|_{L^2}^2. \quad (2.8)$$

因此, 对任意 $\tau > 0$, Witten Laplacian $\Delta_{\tau V}^{(0)}$ 均有紧的预解式.

注 2.7 (i) 注意到 (2.6) 对于那些满足 $\Delta V \leq 0$ 的点显然是成立的, 所以只需对于那些满足 $\Delta V > 0$ 的点验证条件 (2.6).

(ii) 作为估计式 (2.7) 和 (2.8) 的一个推论, 我们可得到复向量场 (2.3) 在正方向的极大微局部亚椭圆性.

例 2.8 在 $\mathbb{R}^2$ 中考虑如下两个势能函数:

$$V_{\pm} = \pm x_1^2 x_2^2.$$

显然, V_- 满足假设 2.5 中所列的条件, 故 $\Delta_{V_-}^{(0)}$ 的预解式是紧算子. 另一方面, V_+ 不满足假设 2.5 中所列的条件 (i), 事实上, 不难证明 0 是 $\Delta_{V_+}^{(0)}$ 的一个本征谱 (参见文献 [1, 32]), 从而, $\Delta_{V_+}^{(0)}$ 的预解式不可能是紧算子.

当然我们也可以利用 Helffer-Nourrigat 的判别法则 (定理 2.2) 来分析上述 $V_{\pm}$. 事实上,

$$\mathcal{L}_{V_-} \cap E_3 \setminus \{0\} = \left\{ \frac{\gamma}{2} x_1^2 + \ell_1 x_1, \frac{\gamma}{2} x_2^2 + \ell_2 x_2; \gamma < 0, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

以及

$$\mathcal{L}_{V_+} \cap E_3 \setminus \{0\} = \left\{ \frac{\gamma}{2} x_1^2 + \ell_1 x_1, \frac{\gamma}{2} x_2^2 + \ell_2 x_2; \gamma > 0, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

详细计算推导参见文献 [1, 命题 10.19]. 显然, $\mathcal{L}_{V_-} \cap E_3$ 中所有非平凡的多项式均没有局部最小值, 而 $\mathcal{L}_{V_+} \cap E_3$ 的多项式均有局部最小值.

例 2.9 在 $\mathbb{R}^2$ 中考虑

$$V_{\delta}(x) = x_1^2 x_2^2 + \delta(x_1^2 + x_2^2),$$

其中 $\delta \neq 0$ 是一个给定的实数.

我们可以直接验证 (详细的计算参见文献 [31])

$$V_{\delta}(x) = x_1^2 x_2^2 + \delta(x_1^2 + x_2^2)$$

当 $\delta \neq 0$ 时满足假设 2.5 中所列的条件, 故当 $\delta \neq 0$ 时, $\Delta_{V_{\delta}}^{(0)}$ 满足极大全局估计 (2.2) 并且其预解式是紧算子.

另一方面, 我们也可以利用 Helffer-Nourrigat 的判别法则, 此时 $\mathcal{L}_{V_-} \cap E_3$ 中非平凡多项式可以为如下两种形式 (参见文献 [1, 命题 10.20]):

$$\frac{\gamma}{2} x_1^2 \pm \delta \sqrt{2\gamma} x_2 \quad \text{和} \quad \frac{\gamma}{2} x_2^2 \pm \delta \sqrt{2\gamma} x_1, \quad \gamma > 0.$$

从而, V_{δ} 满足定理 2.2 的条件, 故 $\Delta_{V_{\delta}}^{(0)}$ 满足极大全局估计, 并且其预解式是紧算子.

例 2.10 在 $\mathbb{R}^2$ 中考虑如下定义的势能函数 Φ_{δ} :

$$\Phi_{\delta} = (x_1^2 - x_2^2)^2 + \delta x_2^2.$$

利用 Helffer-Nourrigat 的判别法则 (参见文献 [1, 命题 10.21]), 通过计算知, 当 $\delta \neq 0$ 时, $\mathcal{L}_{\Phi_{\delta}} \cap E_3$ 是由仿射多项式构成, 故每一个非平凡仿射多项式均没有局部最小值. 从而, $\Phi_{\delta}, \delta \neq 0$, 满足定理 2.2 的条件, 故 $\Delta_{\Phi_{\delta}}^{(0)}, \delta \neq 0$, 满足极大全局估计, 并且其预解式是紧算子. 另一方面, 不难验证

$$0 \in \sigma_{\text{ess}}(\Delta_{\Phi_0}^{(0)}),$$

故 $\Delta_{\Phi_0}^{(0)}$ 的预解式不可能是紧算子.

同样, 我们也可以利用定理 2.6. 当 $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ 时, Φ_{δ} 确实满足假设 2.5 中所列的条件, 故此时 $\Delta_{\Phi_{\delta}}^{(0)}$ 有紧的预解式. 但是 Φ_{-1} 并不满足假设 2.5 中的条件 (i), 例如, 考虑

$$x_1 = 0, \quad x_2 \rightarrow -\infty.$$

故尽管 $\delta = -1$ 时对应的 Witten Laplacian 有紧的预解式, 但是定理 2.6 并不能应用于这一情形. 所以, 一个自然的问题是, 如何改进假设 2.5 中的条件 (i), 使得定理 2.6 能应用到更广泛的势能函数.

最后需要指出的是, Witten Laplacian 的谱性质与势能函数的符号是密切相关的, 这可以从上述所列的判别法则和例子中看出, 例如例 2.8 中两个符号相反的势能函数.

3 Fokker-Planck 算子预解式的紧性判别法则

本节将介绍关于 Fokker-Planck 算子预解式紧性的判别法则, 这里主要的工具是全局拟微分运算. 经典的拟微分算子 (参见文献 [9, 33] 以及所列参考文献) 是分析退化椭圆方程局部正则性的一个重要工具, 这是一个局部性质, 所以主要涉及局部的象征运算. 当分析谱性质时, 我们需要的是全局象征运算. 我们将在下面的小节中分别介绍在 Fokker-Planck 方程谱性质的研究中所发展出来的全局亚椭圆技巧.

3.1 Kohn 方法

Kohn 方法是研究退化椭圆方程局部正则性的一个非常有效的方法. 考虑如下 Hörmander 算子:

$$H = -X_0 - \sum_{j=1}^k X_j^2, \quad (3.1)$$

其中 X_j ($0 \leq j \leq k$) 为实的向量场, 其定义在 $\mathbb{R}^d$ 中的一个有界开集 Ω 上. 为了叙述 Kohn 方法的主要想法, 先给出一个定义. 对每一个 $\delta \in (0, 1]$, 记 $\mathcal{P}_\delta$ 为满足下面估计式的所有零阶拟微分算子 T 的集合:

$$\forall u \in C_0^\infty(\Omega), \quad \|Tu\|_{H^\delta} \leq C(\|Pu\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}).$$

Kohn 方法中最主要的观察是 $\mathcal{P}_\delta$ 满足下面所列的性质:

- (A) 如果 $T \in \mathcal{P}_\delta$, $\delta \in (0, 1]$, 则 T 的自伴算子 T^* 也属于 $\mathcal{P}_\delta$.
- (B) 如果令 ζ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的对偶元, 令 Λ 为象征为 $(1 + |\zeta|^2)^{1/2}$ 的一阶拟微分算子, 则有

$$X_0 \Lambda^{-1} \in \mathcal{P}_{1/2},$$

并且 $X_j \Lambda^{-1} \in \mathcal{P}_1$, $1 \leq j \leq k$.

- (C) 如果 $T \in \mathcal{P}_\delta$, $\delta \in (0, 1]$, 则交换子 $[X_0, T] \in \mathcal{P}_{\delta/4}$, $[X_j, T] \in \mathcal{P}_{\delta/2}$, $1 \leq j \leq k$.

作为 Kohn 方法的应用, 我们研究 Kolmogorov 算子

$$H = -X_0 - X_1^2 = y\partial_x - \partial_y^2, \quad X_0 = -y\partial_x, \quad X_1 = \partial_y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.2)$$

的局部正则性.

例 3.1 (Kolmogorov 算子的亚椭圆性) 令 Ω 为一个给定有界开集, 则存在一个仅依赖于 Ω 的常数 C 使得

$$\forall u \in C_0^\infty(\Omega), \quad \|u\|_{H^{1/4}} \leq C(\|Hu\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}),$$

其中 H 为由 (3.2) 所定义的 Kolmogorov 算子.

事实上, 由上面 $\mathcal{P}_\delta$ 所满足的性质 (A)–(C) 可知, $X_0\Lambda^{-1} \in \mathcal{P}_{1/2}$, $X_1\Lambda^{-1} \in \mathcal{P}_1$, 进而, $[X_j, X_0\Lambda^{-1}] \in \mathcal{P}_{1/4}$, 即

$$\forall u \in C_0^\infty(\Omega), \quad \|[X_j, X_0\Lambda^{-1}]u\|_{H^{1/4}} + \|X_1\Lambda^{-1}u\|_{H^1} \leq C(\|Hu\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}).$$

又因为 $[X_j, X_0\Lambda^{-1}] = \partial_x\Lambda^{-1}$, 以及

$$\|u\|_{H^{1/4}} \leq C\|\partial_x\Lambda^{-1}u\|_{H^{1/4}} + C\|X_1\Lambda^{-1}u\|_{H^{1/4}} + C\|u\|_{L^2},$$

故得到 Kolmogorov 算子的 $H^{1/4}$ - 亚椭圆性.

当然, 上面的讨论同样适合 Fokker-Planck 算子, 因为我们在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的有界开集 Ω 上作估计, 此时, Fokker-Planck 算子的主要部分就是 Kolmogorov 算子. 为了研究 Fokker-Planck 算子的谱性质, 我们需要在全空间 $\mathbb{R}^{2n}$ 中作估计, 所以, 上述局部化的讨论是不够的. 事实上, 在上述性质 (A)–(C) 的证明中, 主要是在象征类

$$S\left(\langle\zeta\rangle^m, |dz|^2 + \frac{|d\zeta|^2}{\langle\zeta\rangle^2}\right) \quad (3.3)$$

中作拟微分运算, 其中 $z \in \mathbb{R}^d$, ζ 为 z 的对偶元. 我们的问题是, 如何在全空间中构造合适的象征类. 类似于 (3.3) 中的象征类, 在全空间中定义

$$S\left(\Phi^m, |dx|^2 + |dy|^2 + \frac{|d\xi|^2 + |d\eta|^2}{\Phi^2}\right), \quad (3.4)$$

其中

$$\Phi(x, y; \xi, \eta) = (1 + |\partial_x V(x)|^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)^{1/2},$$

(ξ, η) 为 (x, y) 的对偶元. 当然为了保证上面的定义是合适的, 我们需要验证

$$|dx|^2 + |dy|^2 + \frac{|d\xi|^2 + |d\eta|^2}{\Phi^2} \quad (3.5)$$

是所谓的 Hörmander 度量.

命题 3.2 ^[1, 14] 假设 V 满足如下条件: 存在两个常数 $C, M \geq 1$ 使得

(i) 对任意的 $|\alpha| \geq 1$ 和任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle \partial_x V(x) \rangle \leq C \langle x \rangle^M;$$

(ii) 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle \partial_x V(x) \rangle$ 满足下面两个下界估计之一: $\langle \partial_x V(x) \rangle \geq C^{-1} \langle x \rangle^{1/M}$, 或者存在 $\rho_0 > 0$ 使得 $\langle \partial_x V(x) \rangle \geq C^{-1} (\partial_x \langle \partial_x V(x) \rangle) \langle x \rangle^{\rho_0}$,

则由 (3.5) 所定义的度量是一个 Hörmander 度量.

因此, 由 (3.4) 所定义的象征类是有意义的, 这样, 我们可以利用 Kohn 方法, 在象征类 (3.4) 中作拟微分运算, 可以得到与上面 (A)–(C) 类似的性质.

定理 3.3 ^[1, 14] 令 P 为由 (1.1) 所给的 Fokker-Planck 算子. 如果 V 满足命题 3.2 中所列条件, 则存在一个常数 C 使得

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \quad \|\tilde{\Lambda}^{1/4}u\|_{L^2} \leq C(\|Pu\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}),$$

其中 $\tilde{\Lambda}$ 代表以 $\Phi(x, y; \xi, \eta)$ 为象征的拟微分算子. 因此, 如果 Witten Laplacian 有紧的预解式或者

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |\partial_x V(x)| = +\infty,$$

则 Fokker-Planck 算子有紧的预解式.

3.2 极大估计: 幂零李群技巧和局部化技巧

Kohn 方法并不能得到最佳正则性. 为了获得最佳正则性或者极大估计, 一个经典的方法是利用由 Rothschild 和 Stein^[4] 所建立的幂零李群技巧. 注意到这两个经典方法都是处理局部正则性, 如果分析 Fokker-Planck 算子的谱性质, 我们需要全局的估计.

定理 3.4 (Helffer-Nier 的极大估计, 参见文献 [1, 定理 9.1]) 假设 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |\partial_x V(x)| = +\infty$, 并且对任意的 $|\alpha| = 2$, 有

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle \partial_x V(x) \rangle^s, \quad s < \frac{2}{3}, \quad (3.6)$$

其中 $\langle \cdot \rangle = (1 + |\cdot|^2)^{1/2}$, 则存在一个常数 C 使得

$$\| |\partial_x V|^{2/3} u \|_{L^2} \leq C \| Pu \|_{L^2} + C \| u \|_{L^2}.$$

因此, Fokker-Planck 算子有紧的预解式.

上述的定理利用了幂零思想, 详细的证明参见文献 [1] 中第九章的讨论, Li^[2] 受 Helffer 和 Nier 关于上述定理的证明的启发, 利用局部化方法, 改进了上述极大估计的结果, 但是这里没有用到抽象的幂零技巧.

定理 3.5^[2] 假设对任意的 $|\alpha| = 2$, 有

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle \partial_x V(x) \rangle^s, \quad s < \frac{4}{3},$$

则存在一个常数 C 使得

$$\| |D_x|^{\sigma(s)} u \|_{L^2} + \| |\partial_x V|^{2/3} u \|_{L^2} \leq C \| Pu \|_{L^2} + C \| u \|_{L^2},$$

其中函数 σ 定义如下: 如果 $s \leq 2/3$, 则 $\sigma(s) = 2/3$; 如果 $2/3 < s \leq 10/9$, 则 $\sigma(s) = 4/3 - s$; 如果 $10/9 < s \leq 4/3$, 则 $\sigma(s) = 2/3 - s/2$. 作为推论, 如果 V 满足下面两个条件的其中一个:

- (i) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |\partial_x V(x)| = +\infty$;
- (ii) Witten Laplacian $\Delta_V^{(0)}$ 有紧的预解式,

则 Fokker-Planck 算子有紧的预解式.

在上面所列的判别法则中 (定理 3.3–3.5), 关于 V 的假设条件并没有反映出 V 的微局部性质, 例如, V 的符号对 Fokker-Planck 算子谱性质的影响并不是清楚的, 这是与 Witten Laplacian 的判别法则不同的地方. 自然地, 我们希望基于 V 的微局部性质 (例如, 由例 2.8 所定义的两个符号相反的势能函数 $V_\pm$), 改进上面的判别法则. 我们将在下一小节具体讨论这个问题.

3.3 乘子方法

乘子方法是受 Lerner^[34] 的工作所启发, 这个方法是研究非自伴算子的亚椭圆性的一个非常有效的方法. 假设非自伴算子可以写为

$$P = P_1 + P_2,$$

其中 P_1 是 L^2 中反自伴算子, P_2 是 L^2 中自伴算子. 所谓乘子方法, 即寻找合适的算子 $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ 称为乘子, 粗略来讲, 我们需要其满足下面三个条件:

- (i) $\mathcal{M}$ 是 L^2 中有界自伴算子;
- (ii) 由交换子 $[\mathcal{M}, P_1]$ 可以推导出椭圆估计;

(iii) $|(\mathcal{M}, P_2)_{L^2}|$ 有很好的上界估计.

乘子方法兼顾上面提到的 Kohn 和 Rothschild-Stein 这两种方法的优点: 既能得到最佳估计, 也有灵活的应用; 但是方法的难点在于如何构造合适的乘子. 到目前为止, 我们已经借助乘子方法来研究空间非齐次的动理学方程的内在的亚椭圆性, 并且得到了最佳的全局亚椭圆估计, 详细的讨论可以参见文献 [35–38].

例 3.6 (Kolmogorov 算子的最佳亚椭圆性: 乘子方法) 令 H 为由 (3.2) 给出的 Kolmogorov 算子, Ω 为一个给定有界开集, 则存在一个仅依赖于 Ω 的常数 C 使得

$$\forall u \in C_0^\infty(\Omega), \quad \| |D_x|^{2/3} u \|_{L^2} + \| |D_y|^2 u \|_{L^2} \leq C(\|Hu\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}).$$

在例 3.1 中, 我们利用 Kohn 方法得到 Kolmogorov 算子的亚椭圆性, 那里的亚椭圆指标 $1/4$ 不是最佳的. 在这个例子中, 我们将展示如何利用乘子方法来获得最佳亚椭圆估计指标 $2/3$. 首先, 通过计算, 有

$$[y \cdot \partial_x, -\partial_y^2] = 2\partial_x \partial_y, \quad [y\partial_x, [y\partial_x, -\partial_y^2]] = -2\partial_x^2.$$

注意到两阶交换子生成了 x 的耗散项, 自然地, 我们的乘子应该与一阶交换子 $2\partial_x \partial_y$ 类似. 但是 $2\partial_x \partial_y$ 并不是有界算子, 所以需要适当的调整. 为此, 我们利用 y 的椭圆性, 将问题转化为频率 ξ 比 η 大的情形, 因为 ξ 比 η 小的情形是平凡的. 这里 ξ 为 x 的对偶元, η 为 y 的对偶元. 基于此, 我们可以选取

$$a(\xi, \eta) = \frac{\xi\eta}{\langle \xi \rangle^{4/3}} \chi\left(\frac{\langle \eta \rangle}{\langle \xi \rangle^{1/3}}\right),$$

其中 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$ 满足在区间 $[-1, 1]$ 上 $\chi = 1$, 并且 $\text{supp} \chi \subset [-2, 2]$. 显然, a 是一个有界函数, 从而, 象征 a 的 Weyl 量子化算子 a^w 是 L^2 中有界、自伴的算子. 进一步, 通过直接的计算, 有

$$-\partial_y^2 + [y\partial_x, a^w] \simeq -\partial_y^2 + (-\partial_x^2)^{1/3} + \text{余项}.$$

故 a^w 就是 Kolmogorov 算子的一个很好乘子. 剩下的部分就是通过仔细的计算得到局部极大估计.

当然, 乘子方法也可以用于全局估计, 例如, 在文献 [36] 中, 通过乘子方法可以得到全局加权亚椭圆估计.

在前面部分给出的关于 Fokker-Planck 算子预解式紧性的判别法则, 有一个不足之处在于, 这些判别法则没有反映出势能 V 的符号对 Fokker-Planck 算子谱的影响. 简单的例子是 $V_\pm = \pm x_1^2 x_2^2$, 通过例 2.8 中的分析可知, Witten Laplacian $\Delta_{V_-}^{(0)}$ 与 $\Delta_{V_+}^{(0)}$ 的谱性质是截然不同的. 如果 Helffer-Nier 猜想成立, 则 Fokker-Planck 算子也应该有类似的现象. Li [39] 最近利用乘子方法, 得到一个新的判别法则, 这个判别法则显示 Fokker-Planck 算子的谱性质是依赖于 V 的符号的. 这里引入的乘子 $\mathcal{M}$ 为一个 $C^1(\mathbb{R}^{2n})$ 函数:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x, y) &= \frac{2\partial_x V(x) \cdot y}{\rho(x, y)} \frac{y^2}{1 + y^2}, \\ \rho(x, y) &= (1 + |y|^8 + |\partial_x V(x) \cdot y|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

通过该乘子可以得到一些好的加权估计 (参见文献 [39, 引理 2.1]):

性质 3.7 假设 $V(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$, 则对所有的 $\sigma \in (0, 1)$, 均可以找到一个仅依赖于 σ 的常数 $C_\sigma > 0$, 使得对任意的 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, 均有

$$\sigma \left\langle \frac{(1 + |y|^8)(\partial_x V(x))^2}{\rho^3} \frac{y^2}{1 + y^2} u, u \right\rangle_{L^2} + \left\langle \frac{\rho}{\langle y \rangle^4} u, u \right\rangle_{L^2}$$

$$- \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left\langle \frac{(1 + |y|^8)(\partial_{x_i x_j} V) y_i y_j}{\rho^3} \frac{y^2}{1 + y^2} u, u \right\rangle_{L^2} \\ \leq C_\sigma (\|Pu\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2).$$

在上述估计式中, 注意到左边两项是正项, 第三项的正负依赖于 Hesse 矩阵 $(\partial_{x_i x_j} V)$ 性质, 特别地, 如果 Hesse 矩阵是半负定的, 则第三项是一个非负数, 这样可以通过前两项得到加权估计. 一般地, 我们有下面的定理:

定理 3.8 令 I_x 由 (2.4) 所定义. 假设存在一个常数 C 使得

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{j \in I_x} \lambda_j(x) \leq C \langle \partial_x V(x) \rangle^{4/3}. \quad (3.7)$$

(i) 如果

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |\partial_x V(x)| = +\infty,$$

则 Fokker-Planck 算子的预解式是紧算子, 并且有如下加权估计: 对任意的 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, 有

$$\| |\partial_x V(x)|^{1/16} u \|_{L^2} \leq C_* (\|Pu\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}),$$

其中 C_* 为仅依赖于 C 的常数.

(ii) 如果存在一个常数 $\alpha \geq 0$, 使得

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (\alpha |\partial_x V(x)|^2 - \Delta_x V(x)) = +\infty,$$

则 Fokker-Planck 算子的预解式是紧算子, 并且有如下加权估计: 对任意的 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, 有

$$\| \alpha |\partial_x V(x)|^2 - \Delta_x V(x) \|^{1/80} u \|_{L^2} \leq \tilde{C} (\|Pu\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}),$$

其中 $\tilde{C}$ 为一个常数.

很显然, $V_- = -x_1^2 x_2^2$ 满足上述定理的假设条件 (3.7), 但是 $V_+ = x_1^2 x_2^2$ 不满足. 注意假设条件 (3.7) 的指标 $4/3$ 并不是最佳的, 事实上, 考虑矩阵 $(a_{ij}^\tau(x))_{1 \leq i, j \leq n}$, 其中

$$a_{ij}^\tau = \tau \langle \partial_x V \rangle^{\frac{4}{3}} (\partial_{x_i} V)(\partial_{x_j} V) - \partial_{x_i x_j} V + \tau \delta_{ij},$$

δ_{ij} 是 Kronecker Delta 函数. 如果上述矩阵是正定的并且满足

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(|\partial_x V(x)| + \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}^\tau(x)| \right) = +\infty,$$

则 Fokker-Planck 算子有紧的预解式. 因此, 当 $n = 1$ 时, 如果存在常数 $\tau \geq 0$ 使得

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \tau |\partial_x V(x)|^{14/5} - \Delta_x V(x) = +\infty,$$

则 Fokker-Planck 算子有紧的预解式. 详细的讨论可以参见文献 [39, 定理 1.3 和推论 1.4].

最后需要指出,

$$V_\delta(x) = x_1^2 x_2^2 + \delta(x_1^2 + x_2^2)$$

并不满足上述定理的假设条件 (3.7), 但是由例 2.9 中的讨论知, 当 $\delta \neq 0$ 时 Witten Laplacian $\Delta_{V_\delta}^{(0)}$ 的预解式是紧算子, 一个很自然的问题 (基于 Helffer-Nier 猜想) 是, 如何对 Fokker-Planck 算子建立更一般的判别法则, 使得其适用于势能函数

$$V_\delta(x) = x_1^2 x_2^2 + \delta(x_1^2 + x_2^2), \quad \delta \neq 0.$$

这个问题在目前还是未知的.

4 附注以及问题

到目前为止, Helffer-Nier 猜想仍然是未知的, 如何对尽可能一般的势能函数证明这个猜想是一个非常有意义的问题, 这在谱分析以及数学物理中有重要的应用. 为了验证这个猜想, 很自然地希望所有关于 Witten Laplacian 的紧性判别法则同样也适合于 Fokker-Planck 算子, 例如, 在定理 2.2 和 2.6 中所列的假设条件下, Fokker-Planck 算子是否有紧的预解式? 到目前为止仍然是不清楚的.

第 2 节基于 Helffer-Nourrigat 幂零李群的思想得到关于 Witten Laplacian 预解式紧性的判别法则, 如何将这个思想应用到 Fokker-Planck 算子上, 这将是非常有意思的问题, 这不仅有助于我们理解势能函数 V 的符号对 Fokker-Planck 算子的影响, 而且对研究一般非自伴算子的谱性质提供了有意义的借鉴和参考. 目前, Nier 教授正在从事这方面的研究.

无论是 Witten Laplacian 还是 Fokker-Planck 算子, 目前已知的判别法则并不是最佳的, 我们在上面已经列举了几个反例. 所以, 我们需要改进已有的判别法则, 使得其适用于更广泛的势能函数.

这里主要讨论的是谱间距的问题, 这与相应 Cauchy 问题的解指数趋于稳态解有关. 另一个相关的问题是, 如果 0 是共振点, 那么 Fokker-Planck 算子的谱理论和 Cauchy 问题的解长时间的形态如何? 这涉及 Fokker-Planck 算子的散射理论, 与上面的条件不同, 此时, 一般要求势能函数以及 $\partial_x V$ 在无穷远处 (多项式) 衰减到 0, 这种情况下, Cauchy 问题的解在长时间是多项式趋于稳态解的, 有关工作可以参见文献 [40–42].

致谢 感谢齐民友先生在作者求学期间的鼓励与教导. 感谢审稿人宝贵的修改意见.

参考文献

- 1 Helffer B, Nier F. Hypocoelliptic Estimates and Spectral Theory for Fokker-Planck Operators and Witten Laplacians. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1862. Berlin: Springer-Verlag, 2005
- 2 Li W X. Global hypoellipticity and compactness of resolvent for Fokker-Planck operator. Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (5), 2012, 11: 789–815
- 3 Kohn J J. Lectures on degenerate elliptic problems. In: Pseudodifferential Operator with Applications. Berlin: Springer, 1978, 89–151
- 4 Rothschild L P, Stein E M. Hypocoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Math, 1977, 137: 248–315
- 5 Nourrigat J. Systèmes sous-elliptiques, II. Invent Math, 1991, 104: 377–400
- 6 Nourrigat J. Subelliptic systems. Comm Partial Differential Equations, 1990, 15: 341–405
- 7 Nourrigat J. Subelliptic Estimates for Systems of Pseudo-Differential Operators. Recife: University of Recife, 1982
- 8 Helffer B, Nourrigat J. Hypocoellipticité Maximale Pour des Opérateurs Polynômes de Champs de Vecteurs. Progress in Mathematics, vol. 58. Boston: Birkhäuser, 1985
- 9 Lerner N. Metrics on the Phase Space and Non-Selfadjoint Pseudo-Differential Operators. Basel: Birkhäuser, 2010
- 10 Desvillettes L, Villani C. On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems: The linear Fokker-Planck equation. Comm Pure Appl Math, 2001, 54: 1–42
- 11 Hérau F, Thomann L. On global existence and trend to the equilibrium for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system with exterior confining potential. J Funct Anal, 2016, 271: 1301–1340

- 12 Hérau F. Short and long time behavior of the Fokker-Planck equation in a confining potential and applications. *J Funct Anal*, 2007, 244: 95–118
- 13 Hérau F. Hypocoercivity and exponential time decay for the linear inhomogeneous relaxation Boltzmann equation. *Asymptot Anal*, 2006, 46: 349–359
- 14 Hérau F, Nier F. Isotropic hypoellipticity and trend to equilibrium for the Fokker-Planck equation with a high-degree potential. *Arch Ration Mech Anal*, 2004, 171: 151–218
- 15 Helffer B, Nier F. Quantitative Analysis of Metastability in Reversible Diffusion Processes via a Witten Complex Approach: The Case with Boundary. Rennes: Mémoires de la Société Mathématique de France, 2006
- 16 Helffer B, Nier F. Quantitative analysis of metastability in reversible diffusion processes via a Witten complex approach. *Mat Contemp*, 2004, 26: 41–85
- 17 Le Peutrec D, Nier F, Viterbo C. Precise Arrhenius law for p -forms: The Witten Laplacian and Morse-Barannikov complex. *Ann Henri Poincaré*, 2013, 14: 567–610
- 18 Witten E. Supersymmetry and Morse theory. *J Differential Geom*, 1982, 17: 661–692
- 19 Christ M, Fu S. Compactness in the $\bar{\partial}$ -Neumann problem, magnetic Schrödinger operators, and the Aharonov-Bohm effect. *Adv Math*, 2005, 197: 1–40
- 20 Fu S, Straube E J. Semi-classical analysis of Schrödinger operators and compactness in the $\bar{\partial}$ -Neumann problem. *J Math Anal Appl*, 2002, 271: 267–282. Erratum: *J Math Anal Appl*, 2003, 280: 195–196
- 21 Fu S, Straube E J. Compactness in the $\bar{\partial}$ -Neumann problem. In: *Complex Analysis and Geometry* (Columbus, OH, 1999). Ohio State University Mathematical Research Institute Publications, vol. 9. Berlin: De Gruyter, 2001, 141–160
- 22 Haslinger F. The $\bar{\partial}$ -Neumann Problem and Schrödinger Operators. *De Gruyter Expositions in Mathematics*, 59. Berlin: De Gruyter, 2014
- 23 Haslinger F, Helffer B. Compactness of the solution operator to $\bar{\partial}$ in weighted L^2 -spaces. *J Funct Anal*, 2007, 243: 679–697
- 24 Straube E J. Lectures on the $\mathcal{L}^2$ -Sobolev Theory of the $\bar{\partial}$ -Neumann Problem. *ESI Lectures in Mathematics and Physics*. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2010
- 25 Helffer B. Semiclassical Analysis, Witten Laplacians, and Statistical Mechanics. *Series in Partial Differential Equations and Applications*, 1. River Edge: World Scientific, 2002
- 26 Helffer B, Mohamed A. Caractérisation du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 1988, 38: 95–112
- 27 Helffer B, Nourrigat J. On the domain of a magnetic Schrödinger operator with complex electric potential. *ArXiv:1709.08542*, 2017
- 28 Le Peutrec D. Small eigenvalues of the Neumann realization of the semiclassical Witten Laplacian. *Ann Fac Sci Toulouse Math* (6), 2010, 19: 735–809
- 29 Matte O, Møller J S. On the spectrum of semi-classical Witten-Laplacians and Schrödinger operators in large dimension. *J Funct Anal*, 2005, 220: 243–264
- 30 Michel L. About small eigenvalues of Witten Laplacian. *ArXiv:1702.01837*, 2017
- 31 Li W X. Compactness of the resolvent for the Witten Laplacian. *Ann Henri Poincaré*, 2018, 19: 1259–1282
- 32 Nier F. Hypocoercivity for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians. In: *Lectures on the Analysis of Nonlinear Partial Differential Equations: Part 1. Morningside Lectures in Mathematics Volume I*. Somerville: International Press, 2012, 31–84
- 33 Hörmander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators, I–III*. Berlin: Springer-Verlag, 1985
- 34 Lerner N. Semi-classical estimates for non-selfadjoint operators. *Asian J Math*, 2007, 11: 217–250
- 35 Alexandre R, Hérau F, Li W X. Global hypoelliptic and symbolic estimates for the linearized Boltzmann operator without angular cutoff. *ArXiv:1212.4632v4*, 2018
- 36 Hérau F, Li W X. Global hypoelliptic estimates for Landau-type operators with external potential. *Kyoto J Math*, 2013, 53: 533–565
- 37 Hérau F, Pravda-Starov K. Anisotropic hypoelliptic estimates for Landau-type operators. *J Math Pures Appl* (9), 2011, 95: 513–552
- 38 Li W X. Global hypoelliptic estimates for fractional order kinetic equation. *Math Nachr*, 2014, 287: 610–637
- 39 Li W X. Compactness criteria for the resolvent of the Fokker-Planck operator. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci* (5), 2018, 18: 119–143
- 40 Novak R, Wang X P. On the Kramers-Fokker-Planck equation with decreasing potentials in dimension one. *J Spectr Theory*, 2018, in press
- 41 Wang X P. Large-time asymptotics of solutions to the Kramers-Fokker-Planck equation with a short-range potential. *Comm Math Phys*, 2015, 336: 1435–1471

- 42 Li T, Zhang Z. Large time behaviour for the Fokker-Planck equation with general potential. *Sci China Math*, 2018, 61: 137–150

Spectral analysis for Fokker-Planck operator and Witten Laplacian

Weixi Li

Abstract In this survey paper we review the classical hypoelliptic techniques and their global counterparts developed recently for the spectral analysis of the operators in mathematical physics. In particular we focus on the compactness criteria for Fokker-Planck operator and Witten Laplacian and the close relationship between the two operators.

Keywords spectral theory, hypoelliptic techniques, Fokker-Planck, Witten Laplacian, resolvent, compactness criteria

MSC(2010) 35H10, 35H20, 47A10, 81Q10

doi: 10.1360/N012018-00033