论文

复数权网络模型及其在复矢空间中的动力学特征

邓贵仕

大连理工大学管理与经济学部, 大连 116023

E-mail: denggs@dlut.edu.cn

收稿日期: 2015-07-09; 接受日期: 2015-08-21; 网络出版日期: 2015-12-07

国家自然科学基金 (批准号: 71372083) 和国家科技支撑计划 (批准号: 2013BAH01B03) 资助项目

摘要 本文首先创建了复数权节点网络模型, 实数权网络模型是其一种特例. 根据节点测度的“发送作用 a ”和“接受作用 b ”确定节点的复数权 $a + ib$. 接着在复平面上构建了一种复矢空间, 并把现实网络映射到此空间的作用场中, 以此来确定节点在网络系统中的作用强度及其分类 (左强度、最小值和右强度). 最后给出了当节点测度或者拓扑结构变化时, 引发网络系统演化动力学的四个定律, 从而揭示出拓扑结构与动力学特性之间的契合原理与“纠缠效应”. 由此找到一种途径来解释自然界和人类社会的一些现实现象. 比如强者越强和合作共赢的机理等. 该方法适应于各类网络建模与分析, 包括规则网络、随机网络和小世界网络等, 具有独到的解释力.

关键词 复杂网络 复数权网络 复矢空间 节点强度 网络动力学

1 引言

在复杂网络的研究中, 当把自然界或者社会中的复杂系统用网络建模时, 虽然这是一种非常实用的建模方法, 但拓扑结构的复杂性不能多方位解释系统的复杂性, 其中关键的原因是网络建模是一类去量纲归一化的过程, 会遇到如下映射失真的瓶颈: (1) 节点上已经缺失或者改变了对对象的属性信息, 使得客观系统变化的非线性、随机性特征等不易解释清楚, 变化结果的混沌现象、涌现现象等不易表达准确. (2) 节点的连接度从图论视角是一个非常重要的特征指标, 但透过实际背景看它已经变为一个粗糙的度量, 含有实量项和虚量项的融合. 即使度值相等的节点, 可能实际上它们相差甚远就可以证明这一点. (3) 边上表达的属性也发生了变化. 由于边上承担着节点的“发送作用”与“接受作用”融合的作用关系, 可能改变了原系统的属性关系. 比如万有引力模型中两个物体间的作用关系是它们质量相乘产生了引力的现象. 再如, 在国际贸易中两个国家的作用关系是进口与出口的求和产生了贸易的影响力现象. 这些属性在网络模型中都归结为一个作用关系.

在此背景下, 本文首先把节点与边的实际属性通过变换赋予网络模型中, 以便改善模型的有效性. 文中先赋予节点一个新的测度, 把边隐含的发送作用和接受作用用“实量项”和“虚量项”的一个复数 $a + ib$ 表示为该节点的点权, 并通过节点的结构熵 (e) 揭示出它与什么样测度的节点相连. 复数点权将节点测度、拓扑结构和它们的演化过程建立了有机联系.

接着, 用三个参量 a , b , e 在复平面上构建一个复矢空间, 形成一个节点相互作用场, 每个节点都是一个发自原点的矢量. 矢量的模被定义为节点强度 I (importance, 也可以称为节点场强指数). 它是

引用格式: 邓贵仕. 复数权网络模型及其在复矢空间中的动力学特征. 中国科学: 信息科学, 2015, 45: 1668–1681, doi: 10.1360/N112015-00082

一个具有最小值的二次函数, 其最小值也被称为强度变化的“陷阱”, 意味着一些节点在“无察觉”中被排序到这一点上. 最小值左边区域和右边区域中的强度分别称为“左强度”和“右强度”.

最后, 分析节点自身和网络的动力学性质. 从节点的梯度变化可以看出, 若一个节点从左强度变为右强度时, 它必须经过最小值陷阱才能够向着最大值进取, 而处在右强度区的节点则可以直接向着最大值进取, 说明强者变强的机会大于弱者变强的机会, 通常称为“强者越强”, 这个内在规律不同于无标度网络以优先连接规则造成的“富者越富”现象.

1.1 基础性描述

在提出的复数权节点网络模型、复矢空间中的动力学分析、举例模拟测算等过程中, 需要作如下的基础性描述: 一个网络的性质由它的原始 3 个元素: 测度、连接度、链接结构 $\{m, d, s\}$ 决定的, 其他的要素都是由它们的演化或者衍生而来的.

(1) 节点的测度 m (measure). 它代表着节点的尺寸度量, 比如质量、体积、流量、活跃程度, 或者是它们的组合等等. 显然测度一般是多维的, 但它不能完全代表它在网络中的作用的大小. 测度的变化有自发式与反馈式 (见反馈属性描述).

(2) 节点的连接度 d (degree)^[1,2]. 它表示一个节点与多少个其他节点直接相连, 可以直观简单地说明节点的重要程度. 在其他的研究成果中^[3], 也可以把节点连接度 d 细分为“输入度 (in-degree)”和“输出度 (out-degree)”的二者之和.

(3) 连接与链接. 连接是两两节点之间的直接相连; 链接是多节点之间的串联并产生网络路径, 二者统称为联接. 要区分二者的原因是: 一个网络成长演化的原动力总是向着趋于全联接的方向发展, 由连接变为链接, 不论是物理网络还是社会网络, 链接属性是网络产生复杂性 (如纠缠效应) 的原因之一.

(4) 拓扑结构 s (structure). 它主要表示一个节点与什么测度节点直接相连, 将用节点结构熵 e 来量化描述.

(5) 场属性. 在一个网络系统中, 节点与他们之间的连接与链接共同形成一个作用场, 每个节点通过它的不同连接与链接方式产生出不同的场强, 可称为“强度”或者“重要度” I , 如同电场、磁场中每一点都具有不同的强度一样.

(6) 反馈属性. 节点测度的变化显然会直接影响到它的强度变化, 反过来强度的变化也会引起等价的测度变化, 形成了一个反馈的效果. 例如一个引力场中, 一个节点的强度增加会吸引其他节点而融为一体使之质量叠加. 这会打破原来的平衡.

那么, 这些属性如何描述? 需要建立一个什么样的网络模型等等, 下面将深入讨论.

1.2 关于节点重要度与节点权重研究的启示

巴拉巴西的《链接——网络新科学》^[4]一书的第 7, 8 章提示, 期望通过网络演化理论对我们周围复杂的相关联系的世界理解提升到一个新高度. 他认为: 尽管小世界网络^[2]、无标度网路^[5]的研究已经取得了丰富的成果, 但还需要更高层次的解释能力, 比如富者越富的世界里后来者如何生存问题, 会把我们将带到 20 世纪初产生的量子力学领域.

再如 Garlaschelli 等^[3]在研究世界贸易网 (WTW) 中网络拓扑与其动力学之间的关系, 使用国家间资产流为权值, 通过经验式的测算表明了贸易网对各国 GDP 增长的作用, 反过来分析 GDP 对贸易网演化的作用, 但二者如何产生的紧密耦合并不清楚. 所以作者认为这里存在着一个隐含的变量

图 1 (a) 节点与边权的表示; (b) 节点与边权的简略表示; (c) 图标中符号的注释

Figure 1 (a) Nodes and edge-weighted representation; (b) abbreviate of (a); (c) the symbols of (a)

(hidden variable) 支配着 GDP 与 WTW 之间的复杂关系. 这个隐含变量的存在提示我们, 网络的节点权重有可能更有利于分析网络拓朴性质, 只是需要找到一种分析的新途径.

Boccaletti 等^[1] 在报告中汇总了很多的研究成果. 关于加权网络模型介绍了生物网络的边权定义、社会网络的边权定义等等.

在一些文献中, 关于节点的重要程度给过很多的定义与定量方法^[6,7], 包括: 节点的凝聚度^[8]、节点的群聚度^[9]、节点的中心度^[10,11] 等等, 这些定义与计算结果对于认识一个网络系统具有非常重要的作用与帮助. Heitzig^[12] 等综述了各种实际网络的各种各样的加权方法来刻画网络的性质, 或者采用各种分解与变换的方法获得节点的点权^[13~15] 来刻画网络的特性. 然而, 这些理论与方法尚无法深刻地解释: (1) 一个节点自身的变化规律, 以及它受到拓朴结构影响下的演化规律; (2) 一个节点的变化对整个网络会产生什么样的影响; (3) 节点自身的变化规律、网络整体的演化规律如何解释或者揭示一些物理或社会实际现象等等. 本文试图回答这些问题.

2 复数权网络模型

2.1 边权

两个相连节点的边权是由它们各自的测度决定的. 从万有引力定律可知, 两个物体之间相互的引力为 $F = g(m_1 \times m_2)/r^2$. 如果 m_1 和 m_2 的质量不同时, 虽然它们之间的引力是同一个物理量, 但它们对于引力 F 的贡献份额却不同, 显然它们各自的份额只与它们的质量有关, 与距离和 g 无关. 如图 1 和式 (1) 所示, 它们的份额分别是

$$w_{1,2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, w_{2,1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, w_{1,2} + w_{2,1} = 1. \quad (1)$$

式 (1) 是引力关系 F 的一种去量纲归一化的变换, 把力的关系转换成抽象质量作用的比例关系.

由此, 它们的边权定义为 $\{w_{1,2}, w_{2,1}\}$, 如图 1 所示.

边权 $\{w_{1,2}, w_{2,1}\}$ 的物理意义很明显, 这个边权也可以表示为两个国家之间贸易额中的出口额和进口额比例 (m_1 和 m_2 分别是它们的出口额). 对于节点 m_1 来说, $w_{1,2}$ 是它的实量项, $w_{2,1}$ 是它的虚量项, 同样对于 m_2 来说, $w_{2,1}$ 是它的实量项, $w_{1,2}$ 是它的虚量项.

这样, 我们可以定义出由边权决定的点权.

2.2 复数点权

一个节点的点权是由它的边权决定的.

定义 1 定义复数 $a + ib$ 为节点的点权. a 代表它的实量项, b 代表它的虚量项. $a, b = 1, 2, \dots, n$.

State
Out-degree	a	5	4	3	2	1	0
In-degree	b	0	1	2	3	4	5
$a/(a+b)$		1	4/5	3/5	2/5	1/5	0

图 2 6 种不同有向图节点的出度、入度和出度概率

Figure 2 In-degree, out-degree and the probability of out-degree for the six kinds of nodes

表 1 3 个国家之间的贸易参数

Table 1 The trade parameters between the three countries

Node	Export	Import	Trade surplus	Trade deficit	Trade volume
1	100+250	100+300	—	50	750
2	100+200	100+150	50	—	550
3	150+300	200+250	0	0	900

那么, 节点 m_1 和 m_2 的点权可分别写成如下的式 (2) 表示形式:

$$w(m_1) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} + i \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad w(m_2) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} + i \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (2)$$

在复平面上, 显然这两个复数矢量的模是相等的, 说明它们之间的相互作用力 (比如引力或者贸易额) 是相等的. 但它们的方向是不同的, 说明了它们各自的作用份额是不同的.

复数点权还可以从节点的输入度和输出度的关系来理解, 节点度可分为出度 a 与入度 b 之和, $a/(a+b)$ 是出度发生的概率, 其节点权可以直接写成 $a+ib$ 的形式. 如图 2 所示.

定义 2 由复数权节点与加权边构成的网络称为复数权网络.

节点的复数权值 $a+ib$ 是所有两两相连获得的点权之和 $a = \sum_{j \in d} a_j$, 即所有边权的实量项之和, $b = \sum_{j \in d} b_j$, 即所有边权的虚量项之和. 其中 d 是节点的连接度. 节点度与节点的复数权之间具有如下的关系: (1) 当网络处于封闭状态时 $d = a + b$; (2) 当网络处于开放状态时 $d \neq (a + b)$. 所谓网络的封闭状态是假设一个有限个节点的网络社区给定一个封闭的边界, 没有一条边超越界限, 否则就是一个开放网络. 例如, 图 3 中的 1, 2, 3 代表三个国家互有贸易的模拟网络 (假设为封闭状态), 包括表 1 中的进出口贸易额、顺差与逆差数量, 按照式 (1) 可以计算出节点 1, 2, 3 的点权分别是 $w(1) = (1/2 + 5/11) + i(1/2 + 6/11) = 0.95 + i1.05$; $w(2) = (1/2 + 4/7) + i(1/2 + 3/7) = 1.07 + i0.93$; $w(3) = (6/11 + 3/7) + i(5/11 + 4/7) = 0.98 + i1.02$.

定义 3 复数权节点的结构熵 e 定义为节点连接度 d 与节点发送作用概率的乘积 $e = da/(a+b)$.

其中 $a/(a+b)$ 是节点发送作用实现的概率. 显然概率差别越大, 结构熵 e 差别越大, 会造成网络系统越不均衡. 节点的结构熵 e 间接地反映出它与什么测度的节点相连, 说明一个节点的连接度中实量项可能占有的比率. 与测度小的节点相连熵可能变大, 与测度大的节点相连其熵可能变小. 显然, 本文定义的复数权节点结构熵是反映结构问题, 不是表达能量问题或信息量问题.

2.3 复数矢量空间

定义 4 用 {权, 度, 熵} 中的 a, b, e 在复平面上构造的一个空间, 称为复数矢量空间.

图 3 三个国家 (1, 2, 3) 之间贸易的模拟网络

Figure 3 A simulation network of trade between the three countries

图 4 (网络版彩图) 一个复数矢量空间及其网络节点在这个复矢空间中的分布状态

Figure 4 (Color online) A space of complex number vector and the distribution of network nodes in the complex vector space

如图 4 所示, 让一个复数权网络的每个节点与空间中节点相对应. 空间中的一个节点可以表示为从原点到该点的一个矢量, 这些矢量没有大小之分. 这个复矢空间将映射出一个网络系统的“作用场”, 每个节点在其中都将表现出不同的动力学特性.

定义 5 复矢空间中矢量的模称为节点强度 I (importance).

一个节点在复矢空间中的作用强度, 是一个综合的度量, 也就是它的相对重要程度, 它的方向只是说明它的作用方向

$$I = \sqrt{a^2 + b^2 + e^2}. \quad (3)$$

从式 (3) 可见节点强度是一个标量, 相当于场强指数, 它是具有最小值的二次曲线. 与节点的度、节点的测度、节点的复数权的区别在于它能综合地揭示出一个节点 3 元素的协同体现, 也就是一个节点在它的网络系统中的重要程度, 或者说它的影响力有多大.

3 复矢空间中的网络动力学特征

3.1 节点强度测算与分类

由强度 $I = \sqrt{a^2 + b^2 + e^2}$ 可知, 如果使用封闭假设, 则 $b = d - a$, 结构熵变为 $e = a$, 那么节点强度按下式测算:

$$I = \sqrt{a^2 + (d - a)^2 + e^2}, \quad I = \sqrt{3a^2 - 2ad + d^2}. \quad (4)$$

显然, 节点强度是一个关于 a 的二次函数. 接着, 沿着 a 轴方向求出 I 的变化梯度和极值:

$$\frac{\partial I}{\partial a} = (3a^2 - 2ad + d^2)^{-\frac{1}{2}}(3a - d), \quad \frac{\partial^2 I}{\partial a^2} = 2d^2(3a^2 - 2ad + d^2)^{-\frac{1}{2}} > 0. \quad (5)$$

从式 (5) 可见二次曲线存在最小值, 并求得 V 形二次曲线的最小值: 当 $a = d/3$ 时, 最小值 $I_{\min} = \check{I} = \sqrt{2/3}d$. 强度最小值指的是沿着 a 轴方向强度变化的最小值, 大约为度 d 的 0.82 倍.

图 5 (网络版彩图) 单个节点强度变化的二次曲线
Figure 5 (Color online) The importance curve of a node change

图 6 (网络版彩图) 不同连接度节点强度变化的曲线簇
Figure 6 (Color online) The curve families of multiple node importance

节点强度的分类. 除了最小值 $\check{I}$ 以外, 定义在最小值的左域中取值为左强度 $\check{I}$, 最大值为 d ($a=0$), 该类节点是实量项小于二分之一虚量项; 在最小值的右域中取值为右强度 $\hat{I}$, 最大值为 $\sqrt{2}d$ ($b=0$), 该节点是实量项大于二分之一虚量项. 如图 5 所示. 所以节点的强度隐含着 3 种类型 $I: \{\check{I}, \check{I}, \hat{I}\}$. 3 种类型的判别方法是综合 $I_{\min} = \check{I} = \sqrt{2/3}d$ 和图 5 可知节点强度类型的判别因子:

当 $a < d/3$ 时节点称为左强度 (importance on left: I-on-L); 当 $a = d/3$ 时节点称为最小值 (minimum); 当 $a > d/3$ 时节点称为右强度 (importance on right: I-on-R).

对不同的节点度 d , 节点的强度分布在图 6 中的曲线簇上.

3.2 复数权网络的动力学性质

(1) 节点强度的变化. 在初始 $\{m, d, s\}$ 状态下, 网络节点的动力学特性将始于 3 种状态 $I: \{\check{I}, \check{I}, \hat{I}\}$ 中的之一, 从图 5 可见, 3 种初始强度都有向左或向右的两种变化取向, 但变化的效果却完全不同, 会出现以下的组合: 当它处于最小值时表明它向左和向右的变化机会相等, 但是处于左强度区的强度增长时, 它只能取得局部最大值, 而处于右强度区的生长时它可以达到全局最大值. 由此给出如下的演化定律.

定律 1 节点强度的演化轨迹符合于“对号曲线”形态. 由此, 它的演化取决于节点处于的初始强度区域和变化路径两个因素, 处于右强度的节点可以直接提高到全局最大值; 处于左强度区的节点可以直接提高到局部最大值, 如果要达到全局最大值, 必须事先下降到最小值, 绕过这个陷阱后才能有途径达到全局最大值. 显然处于不同情境的节点强度变化后果会截然不同.

(2) 网络演化的规律. 节点测度变化和节点间连接边的变化均会引起节点强度的变化.

定律 2 在网络的拓扑结构不变的状态下, 当一个右强度节点的测度 m 增大时, 随着它的强度 I 增大的同时, 导致与其相连的相同度的节点演化走向为: 测度比其小的左强度节点强度将跟随增大, 而测度比其大的右强度节点的强度将跟随减小.

定律 3 两节点间增加一条边时, 相应的节点强度有明显的增加, 其他节点强度不变.

(3) 节点的测度、复数权和强度的关系. 节点强度是其测度、连接度和结构熵的综合表示. 测度 m 是节点自身的属性, 当其强度增加时 (如连接度增加) 会产生反馈作用.

定律 4 由结构引起的强度增加时, 根据反馈属性将等价于节点测度的增加, 其测度增加量为 $\Delta m = m \frac{\Delta I}{I}$, 其中 m 是原本的测度, ΔI 是强度的增量. 例如贸易网络中, 增加一条边意味着增加了出口量从而提高了产品产量. 后续的 4.2 小节例证清楚地表明该定律的内涵.

以上定律在此省略具体的证明, 以后续的举例来说明.

此处要提示的是常规的实数权网络实际上是复数权网络的特例, 只是被默认为节点的测度 m 都是相同的. 显然, 对全联结网络每个节点的复数权均为 $d/2 + id/2$, 节点的强度均为 $\sqrt{3}d/2$, 都大于最小值 $(0.82d)$ 而属于右强度节点. 但此时已经失去了网络演化规律与网络动力学的分析能力.

4 复矢空间中网络演化的“纠缠效应”

4.1 网络纠缠效应产生的实际现象

一群节点在一种拓扑结构中纠缠作用着, 它们的拓扑结构与它们的动力学机理的非结构化与非线性特质, 使之在现实空间中不易于解释一些自然现象. 但在复矢空间中可以考察出网络的一种“非逻辑化”的演化形态. 借用量子纠缠现象来思考网络中的一些非直观的效应, 不妨称之为纠缠效应. 也就是说, 节点的强度不是一个直观的量, 具有一定的隐蔽性, 有时会不符合一般的逻辑思维观察.

例如对“强者越强”的考察: 一般认为节点强度大者为强者. 在这里, 我们定义强者是: 任何一个节点 j 的右强度 $\tilde{I}$ 大于等于另一个节点 k 的左强度 $\tilde{I}$ 时, 称节点 j 为强者, 节点 k 为弱者. 由于节点 j 趋于全局最大值的机会远大于节点 k 获得全局最大值的机会, 则强者越强. 因为节点 k 必须先降低强度到它的最小值 $\tilde{I}$ (绕过最小值陷阱) 后, 才能开始去往全局最大值的途径. 所以强者越强在这种前提下是可以解释的. 也是由纠缠效应产生的结果.

再如对“合作共赢”的考察: 一般来说合作共赢是符合逻辑的. 但从复数权网络动力学分析可见, 合作共赢也是具有特定的前提, 即左强度者与右强度者合作则必然的、自然地会产生合作共赢的现象. 如果在同一个强度区内的节点, 不管同在左强度区还是同在右强度区, 一个节点的测度增强, 会导致其他节点强度的下降, 因为在复矢空间中场强度是由节点的作用份额所分割的, 此时才体现出“我多你必少”的逻辑. 所以合作共赢在不同的条件与情境下会出现各种各样的现象.

4.2 各种纠缠效应产生的条件与情境

本节借助于小样本的统计手法举例, 通过网络节点测度与网络结构的变化, 映射出复矢空间中网络演化特征和网络动力学产生的纠缠效应: 强者越强和合作共赢的各种前提与各种情境.

在图 7 的 (a)~(d) 4 个网络中, (b)~(d) 分别是在 (a) 的初始条件上产生的变化, (b) 中的小测度 $2m$ 节点变为 $4m$; (c) 中一般测度的 $3m$ 节点变为 $5m$; (d) 中的 $2m$ 与 $4m$ 之间增加一条连接边, 它们的演化结果分别表示在表 2~5 中.

4.2.1 动力学分析

(1) 小测度节点变化的情况: 节点 $2m$ 的测度变化到 $4m$ 时 (如图 7(b)) 其强度增加, 而节点 $3m$ 和 $5m$ 的强度同时下降 (如表 3 所示); (2) 大测度节点变化的情况: 当节点 $3m$ 的测度变化为 $5m$ 时 (图 7 (c)) 其强度增强, 同时节点 $1m$ 和 $2m$ 强度随着增强, 而节点 $4m$ 和 $5m$ 的强度都下降了 (如表 4 所示); (3) 增加连接边的情况: 如图 7(d) 所示, 节点 $2m$ 和 $4m$ 增加一条边后, 只有二者的强度有所增加而不影响其他节点 (静态视角). 根据定律 4, 他们的测度等价增量分别是: $1.00m$, $2.25m$.

图 7 节点测度 m 或者拓扑结构 s 变化引起的网络演化形态. (a) 初始状态网络图; (b) $2m$ 节点变化图; (c) $3m$ 节点变化图; (d) 加一条边变化图

Figure 7 The variety of the changes caused by node measure or network topology. (a) The original network; (b) the network of node $2m$ is modified; (c) the network of node $3m$ is modified; (d) the network of adding an edge

表 2 图 7(a) 的初始网络参数和节点强度与分类

Table 2 The node importance and its classification in Figure 7(a)

	a	b	d	Category	I
$1m$	0.25	0.75	1	I-on-L	0.83
$2m$	0.68	1.32	2	Miniumm	1.63
$3m$	2.16	1.84	4	I-on-R	3.56
$4m$	1.01	0.99	2	I-on-R	1.74
$5m$	1.84	1.16	3	I-on-R	2.90

表 3 图 7(b) 中网络节点 ($2m$) 测度变化引起的网络演化结果

Table 3 The network evolution caused by node measure change in Figure 7(b)

	a	b	d	Category	I
$1m$	0.25	0.75	1	I-on-L	0.83
$2m-4m$	1.01	0.99	2	I-on-R	1.73 ↑
$3m$	1.98	2.02	4	I-on-R	3.45 ↓
$4m$	1.01	0.99	2	I-on-R	1.74
$5m$	1.69	1.31	3	I-on-R	2.73 ↓

表 4 图 7(c) 中网络节点 ($3m$) 测度变化引起的网络演化结果

Table 4 The network evolution caused by node measure change in Figure 7(c)

	a	b	d	Category	I
$1m$	0.17	0.83	1	I-on-L	0.87 ↑
$2m$	0.57	1.43	2	I-on-L	1.64 ↑
$3m-5m$	2.60	1.40	4	I-on-R	3.94 ↑
$4m$	0.89	1.11	2	I-on-R	1.68 ↓
$5m$	1.77	1.23	3	I-on-R	2.79 ↓

4.2.2 强者越强和合作共赢的各种前提与情境

节点直接相连视为二者的合作关系. 在已有的网络状态下, 不论节点的测度变化还是网络结构的变化, 都会在其动力的驱动下, 产生以下的统计学上的纠缠效应.

表 5 图 7(d) 中网络节点 ($2m$ and $4m$) 结构变化引起的网络演化结果

Table 5 The network evolution caused by the structure change in Figure 7(d)

	a	b	d	Category	I
1 m	0.25	0.75	1	I-on-L	0.83
2 m	1.01	1.99	2-3	I-on-R	2.45 ↑
3 m	2.16	1.84	4	I-on-R	3.56
4 m	1.68	1.32	2-3	I-on-R	2.72 ↑
5 m	1.84	1.16	3	I-on-R	2.90

表 6 3 个国家节点的复数权和在复矢空间中的强度

Table 6 The node weighted and their importance between 3 countries

Node	Volume of trade	a	b	d	e	I
1	750	0.95	1.05	2	0.95	1.71
2	550	1.07	0.93	2	1.07	1.78
3	900	0.98	1.02	2	0.98	1.72

(1) 合作独赢. 一个右强度节点的测度 m 增加时, 如果它不与比它测度小的左强度节点相连, 其结果只有它自己的强度增加, 而其他节点的强度都下降. 这种合作状态属于合作独赢的情境. 如表 3 所示, $2m$ 节点的测度从 $2m$ 增加为 $4m$ 后, 其强度从 1.63 增加到 1.73, 增幅为 6%. 而其他节点的强度无一增加, 都有不同幅度的下降.

(2) 合作共赢 — 越小越赢. 一个右强度节点与多个节点相连 (包括多个左强度节点) 时, 当他的强度增加时, 与其相连的所有右强度节点的强度均下降, 但与其相连的所有左强度节点的强度均上升, 且强度越小的节点上升幅度越大. 这种合作共赢属于合作共赢 — 越小越赢情境. 如表 4 所示, $3m$ 节点测度从 $3m$ 增加到 $5m$ 时, 其左强度节点 $1m$ 和 $2m$ 的强度分别增加了 5% 和 1%, 显然最小的 $1m$ 节点上升的幅度最大.

(3) 合作共赢 — 越大越赢. 当两个右强度节点之间增加一个连接边时, 他们各自的强度均有增加, 但强度越大的节点增加的幅度越大. 这种合作共赢情况属于合作共赢 — 越大越赢情境. 如图 7(d) 和表 5 所示, $2m$ 和 $4m$ 节点增加一个连接边后, 它们的连接度均增加为 3, 它们的强度分别增加了 50% 和 56%. 说明 $4m$ 节点增加的幅度大于 $2m$ 节点增加的幅度, 证明在二者的合作共赢中仍然存在着强者越强的现象.

分析可知, 左强度节点与右强度节点合作容易产生合作共赢, 同在一个强度区内的相连节点基本上属于零和博弈关系.

下面, 通过实际例子考察复数权网络在复矢空间中的一些动力学性质.

5 举例测算及其动力学特征说明

5.1 模拟国际贸易的复数权网络

如图 3 的 3 个互有贸易的国家 1、国家 2 和国家 3, 他们的贸易参数如表 1 所示, 3 个国家在复矢空间中的强度分别是 1.71, 1.78, 1.72 (见表 6), 反映出它们的贸易影响力.

动力学分析. 结合图 3、表 1 和表 6 的一系列参数, 可见 3 个节点强度的最小值是 1.63, a 分别大于 $d/3 = 0.67$, 由节点类型判别因子可知, 3 个节点恰都处于右强度区.

但从贸易额可见国家 3 最大, 国家 2 最小. 然而从强度来看正好与人们的直觉相反, 国家 2 最大, 国家 3 次之. 究其原因在这个三角贸易中, 国家 2 与单国贸易均出现顺差或者持平, 而国家 3 虽然总体持平, 但它与国家 2 的贸易出现逆差, 这个隐含的因素直接降低了他的强度, 即降低了贸易影响力.

该算例说明, 复数权网络模型的动力学分析能够挖掘出网络纠缠效应中非直观或者简单代数运算所不能获得的结果, 具有挖掘的敏感性 (在单维度测度的情况下).

5.2 以 GDP 为测度的欧元区国家经济结盟的纠缠效果

图 8 和 9¹⁾ 是欧元区 17 个国家以 2009 年和 2012 年的 GDP 为测度的复数权网络模型, 其中节点上的数字标识是以 GDP 的相对值来代表一个国家, 以 GDP 最小的马耳他为 1 个测度单位, 其他国家取其相对的比例值. 表 7 是它们复数节点权的相关参数和节点强度值 (2012 年). 本算例试图分析这样一个社会网络, 仅以 GDP 为测度的全联接网络在复矢空间中的动力学性质.

动力学分析. 由节点类型判别因子可知, 17 个国家的强度最小值条件均为 $a = 5.33$, 若 a 小于 5.33 则该国家处于左强度区, 否则处于右强度区. 从表 7 的强度排序可见, 马耳他、塞浦路斯、艾萨尼亚、卢森堡和斯洛文尼亚 5 国都是左强度, 其余的国家都是右强度. 从 2009 年到 2012 年, 总体上 GDP 是上升的, 但他们的空间强度差别是很大的, 比如, 法国、奥地利和德国分别上升了 35%、27% 和 25%. 相反的, 斯洛伐克、希腊和葡萄牙分别下降了 29%、18% 和 8%. 那么欧元区结盟机制到底表现出哪些结盟现象? 是否充分地体现出合作共赢要看具体分析.

(1) **结盟共赢是小国与大国共同乐见的结果.** 虽然小国是依赖与强国的互助与提携才有了不算小的影响力, 比如弱小的斯洛文尼亚的测度只有德国的 $1/60$, 强度却是德国的 $2/3$, 小国乐见. 从复矢空间观察, 一个群体在具有某种协调相关的机制时, 它的成员越多则各自的强度越大, 大国乐见.

(2) **结盟共赢的效果不易达到共享的目的.** 演化过程与结果难于预料, 最弱小的国家 (马耳他的 GDP 最少) 的强度并不是最小, 相反斯洛伐克的强度最小, 但它的 GDP 是马耳他的 10 倍, 可见强度最小值确实像个陷阱, 斯洛伐克在不知不觉中就走近了尴尬局面, 由此可见结盟共赢的结果不一定体现所有国家共享. 这是因为它们的强度处在同一条 $\sqrt{\quad}$ 型曲线上, 变化之中各个国家都可能被排挤到情愿或不情愿的位置上. 这就会出现一种状况, 即在结盟共赢的情景下, 其相对的利益不均衡可能令个别国家不满意.

5.3 模拟太阳系万有引力网络的奇异现象

本模拟只考虑太阳与其 9 个行星之间的万有引力模拟网络, 并且假设他们构成一个封闭的网络系统, 如图 10 所示. 利用复数权网络模型来考察它们在引力场中的特征与现象.

动力学分析. 由于连接度 d 相同, 所以所有星球节点的强度值同在一条曲线上 (如图 11 所示).

由节点类型判别因子可知, 冥王星、水星、火星和金星都处于左强度区, 并且金星的强度接近最小值. 其他星体都处于右强度区. 从表 8 的模拟结果可以看出在复矢空间中的奇异现象.

(1) **大与小的奇异.** 虽然节点的测度相差巨大, 甚至小到可以忽略不计的情形, 但它们的强度却相差很小. 说明在复矢空间中, 所有的节点不论大小完全纠缠成一个复杂的系统, 极小者不以其小而作用极小, 极大者不以其大而作用极大. 我们理解为太阳系不仅仅是简单的引力关系.

1) 图中 GDP 的原始数据来源于: <http://en.maweto.com/Economy of the European Union.htm>.

图 8 欧元区国家 2009 年 GDP 模拟网络
Figure 8 A GDP network of Euro-zone in 2009

图 9 欧元区国家 2012 年 GDP 模拟网络
Figure 9 A GDP network of Euro-zone in 2012

表 7 欧元区 17 个国家 2012 年 GDP 网络的参数与强度排序
Table 7 The importance rank for 17 countries of the Euro-zone in 2012

2012	a	b	d	e	I	Rank
1m Malta	1.20	14.80	16	1.20	14.90	7
2m Cyprus	2.19	13.81	16	2.19	14.15	9
3m Estonia	2.90	13.10	16	2.90	13.73	12
6m Luxembourg	4.32	11.68	16	4.32	13.18	16
5m Slovenia	3.93	12.07	16	3.93	13.29	15
28m Finland	8.16	7.84	16	8.16	13.95	10
24m Ireland	7.75	8.25	16	7.75	13.72	13
10m Slovakia	5.51	10.49	16	5.51	13.07	17
24m Portugal	7.75	8.25	16	7.75	13.72	13
45m Austria	9.42	6.58	16	9.42	14.86	8
28m Greece	8.16	7.84	16	8.16	13.95	10
55m Belgium	9.94	6.06	16	9.94	15.31	6
88m Holland	11.13	4.87	16	11.13	16.48	5
155m Spain	12.43	3.57	16	12.43	17.94	4
230m Italy	13.24	2.76	16	13.24	18.93	3
300m France	13.73	2.27	16	13.73	19.55	2
400m Germany	14.21	1.79	16	14.21	20.18	1

(2) 多与少的奇异. 一些节点的测度增多时, 比它测度大的节点强度都减少, 而另一些节点测度减少时, 比它测度大的节点强度增多. 说明在复矢空间中, 节点类型的变化会引起“多与少”于莫测的演化中. 比如如果把月亮与地球绑定为一体, 则天王、海王、土星和太阳的强度都减少. 我们同样理解为

图 10 太阳系的万有引力模拟网络
Figure 10 The network of the Solar gravitation

图 11 太阳系中 10 个星体的作用强度分布图
Figure 11 The importance distribution of ten stars

表 8 太阳系 10 个星体节点的复数权与节点强度
Table 8 The node weighted and the node importance for ten stars in the Solar

	Pluto	Mercury	Mars	Venus	Earth	Uranus	Neptune	Saturn	Jupiter	Sun
a	0.01	0.93	1.12	2.89	3.26	5.30	6.58	7.38	8.02	8.99
b	8.99	8.07	7.88	6.11	5.74	2.70	2.42	1.62	0.98	0.01
d	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
e	0.01	0.93	1.12	2.89	3.26	5.30	6.58	7.38	8.02	8.99
I	8.99	8.18	8.04	7.35	7.36	7.97	9.62	10.56	11.38	12.71

太阳系不仅仅是简单的引力关系.

6 结论与展望

复数权网络模型及其在复矢空间中的动力学分析方法具有如下的特点: (1) 建立了拓扑结构与网络动力学之间的量化关系, 把节点的测度 (尺寸) 与网络结构建立起有机联系. (2) 构建一个复矢空间, 把现实世界的网络映射到空间中, 形成一个网络节点相互作用场, 每个节点都在其中表现出它们的强度 (场强), 以及节点强度的变化特征. (3) 给出了四个定律揭示出节点自身和网络系统的演化规律. 从一种角度解释强者越强、合作共赢的可视化机理与前提条件. (4) 发现了网络的纠缠效应, 揭示出一些非直观和非逻辑的因果关系. 说明了一个复杂的系统中, 任何一个要素在纠缠效应下都具有不可忽视的作用等. (5) 本文的方法适应于各类网络建模与分析, 包括规则网络、随机网络、小世界网络等, 说明了复数权网络有利于表达网络系统的整体性态、有利于揭示网络个体、整体的演化规律.

本文提出的一套方法拓展了研究空间. 可以解决网络建模和现实中的其他问题, 比如强度较低的节点如何变强的策略? 强度最大的节点如何保持第一的位置? 这是一个复杂的系统优化问题, 也是一个有特色的难题. 另外, 还可以改进建模中边权归一造成的局限性.

很明显, 利用复数权网络模型及其在复矢空间中的动力学分析方法 (简称为复变网络法), 还可以作出很多统计分析、理论探讨和应用研究.

参考文献

- 1 Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, et al. Complex networks: structure and dynamics. *Phys Rep*, 2006, 424: 175–308
- 2 Watts D J, Strogats S H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 1998, 393: 440–442
- 3 Garlaschelli D, Matteo T D, Aste T, et al. Interplay between topology and dynamics in the world trade web. *Europ Phys J B*, 2007, 57: 159–164
- 4 Barabasi A L. *Linked: How Everything Is Connected to Everything Else and What It Means for Business, Science, and Everyday Life*. Cambridge: Penguin Group, 2003 [艾伯特 —— 拉丝洛 · 巴拉巴西, 徐彬. 链接 —— 网络新科学. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2007]
- 5 Albert R, Barabasi A L. Statistical mechanics of complex networks. *Rev Mod Phys*, 2002, 74: 47–97
- 6 Newman M E J. The structure and function of complex networks. *SIAM Rev*, 2003, 2: 167–256
- 7 Zhao S X, Rousseau R, Ye F Y. H-degree as a basic measure in weighted networks. *J Inform*, 2011, 5: 668–677
- 8 Tan Y J, Wu J, Deng H Z. Evaluation method for node importance based on node contraction in complex networks. *Syst Eng Theory Pract*, 2006, 11: 79–83 [谭跃进, 吴俊, 邓宏钟. 复杂网络中节点重要度评估的节点收缩方法. 系统工程理论与实践, 2006, 11: 79–83]
- 9 Duan W Q, Liu B Q, Ji J H. Topological structure evolution of world trade network. *Syst Eng Theory Pract*, 2008, 10: 71–81 [段文奇, 刘宝全, 季建华. 国际贸易网络拓扑结构的演化. 系统工程理论与实践, 2008, 10: 71–81]
- 10 Fu L D, Gao L, Ma X K. A centrality measure based on spectral optimization of modularity density. *Sci Sin Inform*, 2012, 42: 550–560 [付立东, 高琳, 马小科. 基于社团监测的复杂网络中心性方法. 中国科学: 信息科学, 2012, 42: 550–560]
- 11 Tore O, Filip A, John S. Node centrality in weighted networks: generalizing degree and shortest paths. *Soc Netw*, 2010, 32: 245–251
- 12 Heitzig J, Donges J F, Zou Y, et al. Node-weighted measures for complex networks with spatially embedded, or differently size nodes. *Europ Phys J B*, 2012, 85: 38
- 13 Wiedermann M, Donges J F, Heitzig J, et al. Node-weighted interacting network measures improve the representation of real-world complex systems. *Europhys Lett (EPL)*, 2013, 102: 28007
- 14 Heitzig J, Marwan N T, Zou Y, et al. Consistently weighted measures for complex network topologies. *Europ Phys J B*, 2010, 85: 1–16
- 15 Evans T S, Lambiotte R. Line graphs of weighted networks for overlapping communities. *Europ Phys J B*, 2010, 77: 265–272

Network model with a weighted complex number and its dynamics in a complex vector space

DENG GuiShi

Faculty of Management and Economics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China
E-mail: denggs@dlut.edu.cn

Abstract In this paper, we first create a network model using a complex number-weighted node, where the real number-weighted network model is its special case. According to the “send effect a ” and “receive effect b ” of node measures, the complex number weight can be determined as $a + ib$. Then, we build a complex vector space on the complex plane, and the real network can be mapped into the effect field of this space, where the effect importance (I) and classification of the node may be determined (Importance on Left, Minimum, Importance on Right). Finally, we present four theorems that trigger the evolutionary dynamics of network systems when the node measure or topological structure is changed, so that the conjunction principle and “entangled effect”

between the topological structure and kinetic characteristics are revealed. As a result, a new path is discovered to explain some real phenomena in nature or human society, such as the mechanism of the “stronger the strong” and “win-win” cooperation. The method may be applied to the analysis of various network models including regular networks, stochastic networks, and small-world networks, which may exhibit special explanatory capabilities.

Keywords complex network, complex number weighted networks (CNWN), complex vector space, node importance, network dynamics

DENG GuiShi was born in 1945. He received the Master's degree in Systems Engineering from the Dalian University of Technology, Dalian, in 1981. Currently, he is a Professor in the Faculty of Management and Economics, Dalian University of Technology. His research interests include decision theory and methods, complex systems analysis, theory and methods of mobile-commerce.