一类具有共形径向向量场的 Finsler 度量

李影, 莫小欢*

北京大学数学科学学院, 北京 100871

E-mail: lyhy@pku.edu.cn, moxh@pku.edu.cn

收稿日期: 2016-07-01; 接受日期: 2016-09-18; 网络出版日期: 2016-11-23; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11071005) 资助项目

摘要 设 F 是定义在 $\mathbb{R}$ 中的开集 $\mathcal{U}$ 上的 Finsler 度量. 通过得到 $\mathcal{U}$ 上的径向向量场是关于 F 的共形向量场的充要条件, 本文完全确定了具有共形径向场的球对称度量, 证明了这类 Finsler 度量的切空间, 正如 Berwald 度量的切空间, 作为 Minkowski 空间是等距的.

关键词 Finsler 度量 共形向量场 球对称 单色 径向向量场

MSC (2010) 主题分类 58E20, 53B40

1 引言

Finsler 流形 M 上的共形向量场是由 M 上的局部单参数共形变换群诱导的向量场 (见第 2 节的定义). 许多重要的向量场都是共形向量场, 如 Killing 向量场、相似向量场和保圆向量场^[1]. 设 $\varphi = \varphi(y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的强凸域 $\mathcal{U}$ 上的 Minkowski 度量. 此时, 径向向量场 $V_x := x$ 是 $F(x, y) := \varphi(y)$ 的共形向量场, 其伸缩系数为常数 $c \equiv \frac{1}{2}$ (参见文献 [2]).

近年来, 对 Finsler 流形上的共形向量场的研究得到广泛关注 (参见文献 [1, 3–8]). Shen 和 Xia^[5] 完全确定了局部射影平坦 Randers 流形上的共形向量场. Joharinad 和 Bidabad^[1] 证明了 Finsler 空间中的任意保圆向量场, 即保持测地圆不变的向量场, 是共形的. Huang 和 Mo^[6] 证明了具有迷向 S -曲率的 Randers 流形上的任意共形向量场一定是相似的, 并且迷向 S 曲率的条件不能去掉. Huang 和 Mo^[7] 具体构造了广义 Poincaré 度量上的一个非平凡的共形向量场, 并建立了共形航海问题中的旗曲率的关系. 最近, Shen 和 Yuan^[8] 得到了 $\mathbb{R}^n$ 上球对称度量的共形向量场具体的表达式.

我们知道, $\mathbb{R}^n$ 中开集 $\mathcal{U}$ 上的 Finsler 度量 F 被称为是球对称的, 如果 F 满足

$$F(Ax, Ay) = F(x, y) \quad (1.1)$$

对任意 $x \in \mathcal{U}$, $y \in T_x \mathcal{U}$ 和 $A \in O(n)$ 成立. 球对称度量可以定义在开球 $\mathbb{B}^n(\nu)$ 和圆环甚至整个 $\mathbb{R}^n$ 上. 这种度量是由 Rutz^[9] 首次研究的, Huang 和 Mo^[10] 的另一种表达方式 $F = |y|\phi(|x|, \frac{\langle x, y \rangle}{|y|})$. 许多经

英文引用格式: Li Y, Mo X H. A class of Finsler metrics with conformal radical fields (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 605–610, doi: 10.1360/SCM-2016-0431

典的具有很好曲率性质的 Finsler 度量都是球对称度量. 例如, 如下单位球 $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ 上的 Funk 度量 Θ 就是具有常曲率 $-\frac{1}{4}$ 的球对称度量:

$$\Theta = \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2)}}{1 - |x|^2} + \frac{\langle x, y \rangle}{1 - |x|^2},$$

其中 $y \in T_x \mathbb{B}^n \approx \mathbb{R}^n$. Θ 是由 Minkowski 度量 $\Phi(x, y) = |y|$ 和径向向量场 $V_x := x$ 经过航海问题得到的.

自然的问题是, 寻找 $\mathcal{U}$ 上的所有以径向向量场为共形向量场的球对称度量, 并研究这类 Finsler 度量的几何性质.

设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集 $\mathcal{U}$ 上的 Finsler 度量. 本文得到了 $\mathcal{U}$ 上的径向向量场是关于 F 的共形向量场的充要条件 (见下面的命题 3.1). 这样就完全确定了 $\mathcal{U}$ 上径向场是共形场的球对称度量. 此外, 我们证明了这类 Finsler 空间必然是单色的. 具体地, 我们得到了如下结果:

定理 1.1 设 $F = |y|\phi(|x|, \frac{\langle x, y \rangle}{|y|})$ 是 $\mathbb{B}^n(\nu)$ 上的球对称 Finsler 度量, $V_x := x$ 是 $\mathbb{B}^n(\nu)$ 上的径向向量场, 那么 V 是 F 的具有伸缩系数 $c(x)$ 的共形向量场的充要条件是

$$\phi(r, s) = e^{\rho(r)} h\left(\frac{s}{r}\right), \quad (1.2)$$

其中 $c = c(|x|)$,

$$\rho(r) = \int \frac{2c(r) - 1}{r} dr, \quad (1.3)$$

并且 h 是任意正的可微函数. 此时, $F(x, y) = |y|e^{\rho(|x|)} h(\frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|})$ 是单色的.

F 是流形 M 上的 Finsler 度量, 如果对于 M 上的每一点 x , 都存在一个邻域 U 以及 U 上的一个局部标架场 $\{e_i\}$, 使得 $F(y^i e_i) = F(y^1, \dots, y^n)$ 是 y^i 的函数, 单色 Finsler 空间具有同一种“颜色”. 关于单色 Finsler 度量的一些其他有意思的结果可以参见文献 [11–13]. 第 4 和 5 节探讨了具有共形径向场的球对称度量的一些其他性质; 证明了在每个球上, 这类 Finsler 度量的射影平坦方程是 Gegenbauer-型常微分方程 (见下面的定理 5.1); 还给出了具有共形径向场的球对称度量与通过 (F, V) 生成的新 Finsler 度量 $\tilde{F}$ 的旗曲率之间的关系, 这里 V 是径向场 (见下面的推论 4.2 和 4.3). 除此之外, 我们还举了几个例子.

2 基本知识

本节将给出一些基本的概念和引理. Finsler 流形 (M, F) 上的向量场 V 被称为是具有共形因子 $c(x)$ 的共形向量场, 如果其上的单参数变换群 ϕ_t 满足

$$F(\phi_t(x), \phi_{t*}(y)) = e^{2\sigma_t(x)} F(x, y), \quad \forall x \in M, \quad y \in T_x M,$$

其中 $c(x) = [\frac{d\sigma_t(x)}{dt}]_{t=0}$ (参见文献 [5, 6]). 特别地, 如果 c 为常数, 则称 V 为相似向量场. 如果 $c = 0$, 则称 V 为 Killing 向量场 (参见文献 [2, 6]). 分别记 $|\cdot|$ 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为标准 Euclid 范数和 $\mathbb{R}^n$ 上的内积.

例 2.1 [6] 设 a 是 $\mathbb{R}^n$ 中的模长小于 1 的常向量. $F = \alpha + \beta$ 定义为

$$F(x, y) = e^{|x|^2} (|y| + \langle a, y \rangle),$$

那么 F 是 Randers 度量. 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的向量场 W 为

$$W_x = -xQ - b, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 Q 是反对称矩阵, 且满足

$$Qa^T = 0;$$

$b \in \mathbb{R}^n$ 是常向量, 那么 W 是关于 F 的共形向量场, 伸缩系数为 $-\langle b, x \rangle$. 进一步, W 是相似向量场当且仅当 $b = 0$.

$\mathbb{B}^n(\nu) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| < \nu\}$ 上的 Finsler 度量 F 被称为球对称的, 如果它对任意 $x \in \mathbb{B}^n(\nu)$, $y \in T_x \mathbb{B}^n(\nu)$ 且 $A \in O(n)$ 满足 (1.1). Huang 和 Mo^[10] 证明了如下结果:

引理 2.2 $\mathbb{B}^n(\nu)$ 上的一个 Finsler 度量 F 是球对称的当且仅当存在一个函数 $\phi: [0, \nu) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $F(x, y) = |y|\phi(|x|, \frac{\langle x, y \rangle}{|y|})$, 其中 $(x, y) \in \mathcal{T}\mathbb{B}^n(\nu) := T\mathbb{B}^n(\nu) \setminus \{0\}$.

如果 F 是单色的, 则称 Finsler 空间 (M, F) 是单色的 (在文献 [1] 中也称为 Minkowski 空间上的模型). 例如, 具有左不变 Finsler 度量的 Lie 群就是单色 Finsler 空间.

引理 2.3^[11] 如果 F 是单色 Finsler 度量, 则它的任意共形变换 $e^{\rho(x)}F$ 仍然是单色的.

例 2.4^[11] 假设 $F = \alpha\phi(\beta/\alpha)$ 是流形 M 上的 (α, β) -度量, 其中 α 是 Riemann 度量, β 是 1-形式. 如果 β 关于 α 的模长是一个非零常数, 那么 F 是单色的.

3 $\mathbb{R}^n$ 中区域上的 Finsler 流形

本节将给出 $\mathbb{R}^n$ 中开集 $\mathcal{U}$ 上的径向向量场是关于 F 的共形向量场的充要条件.

命题 3.1 设 $F = F(x, y)$ 是开集 $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ 上的 Finsler 度量, $V_x := x$ 是 $\mathcal{U}$ 上的径向向量场, 则 V 是 F 的具有伸缩系数 $c(x)$ 的共形向量场当且仅当

$$V(F) = [2c(x) - 1]F. \quad (3.1)$$

证明 考虑到 V 是 F 的具有伸缩系数 $c(x)$ 的共形向量场当且仅当

$$X_V(F) = 2c(x)F, \quad (3.2)$$

其中 X_V 是 V 到 $T\mathcal{U}$ 上的完整提升 (参见文献 [6]). 在自然标架之下, 对于 $V = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 我们有 (参见文献 [2, 14])

$$X_V = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}. \quad (3.3)$$

考虑到 V 是径向场, 我们有

$$X_V = V + y^i \frac{\partial}{\partial y^i}. \quad (3.4)$$

由于 F 具有一阶正齐次性, 结合 (3.4), 我们得到

$$X_V(F) = V(F) + y^i \frac{\partial F}{\partial y^i} = F + V(F). \quad (3.5)$$

这样命题 3.1 立即就可由 (3.2) 和 (3.5) 得到. $\square$

推论 3.2^[2] 设 $F = F(y)$ 是区域 $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ 上的 Minkowski 度量, $V_x := x$ 是 $\mathcal{U}$ 上的径向向量场, 则 V 是 F 的具有常伸缩系数 $c(x) \equiv \frac{1}{2}$ 的共形向量场.

4 球对称 Finsler 度量

定理 1.1 的证明 首先介绍如下一些记号:

$$r := |x|, \quad s := \frac{\langle x, y \rangle}{|y|}. \quad (4.1)$$

我们有 $r_{x^i} = \frac{x^i}{r}$, $s_{x^i} = \frac{y^i}{|y|}$. 因此,

$$F_{x^i} = |y| \left(\phi_r \frac{\partial r}{\partial x^i} + \phi_s \frac{\partial s}{\partial x^i} \right) = |y| \left(\phi_r \frac{x^i}{r} + \phi_s \frac{y^i}{|y|} \right).$$

结合 (4.1), 我们有 $V(F) = x^i \frac{\partial F}{\partial x^i} = |y|(r\phi_r + s\phi_s)$. 将上式代入 (3.1), 我们得到 V 是 F 的具有伸缩系数 $c(x)$ 的共形向量场当且仅当 $\phi = \phi(r, s)$ 满足

$$r\phi_r + s\phi_s = (2c - 1)\phi.$$

这等价于

$$r\psi_r + s\psi_s = 2c(x) - 1, \quad (4.2)$$

其中 $\psi = \log \phi$. 由此可知, 标量函数 c 只与 $|x|$ 有关. 令

$$\sigma(|x|) := 2c(|x|) - 1.$$

代入 (4.2) 得

$$r\psi_r + s\psi_s = \sigma(r). \quad (4.3)$$

拟线性偏微分方程 (4.3) 的特征方程为

$$\frac{dr}{r} = \frac{ds}{s} = \frac{d\psi}{\sigma}. \quad (4.4)$$

由于 $\frac{s}{r} = c_1$, $\psi - \int \frac{\sigma}{r} dr = c_2$ 是方程 (4.4) 的独立的首次积分, 因而, 方程 (4.3) 的解为

$$\psi(r, s) = g\left(\frac{s}{r}\right) + \int \frac{\sigma}{r} dr, \quad (4.5)$$

其中 g 是任意连续可微函数. 这就得到了 (1.2), 其中 $\rho = \int \frac{\sigma}{r} dr$, $h = e^g$. 令

$$F_1(x, y) := |y|h\left(\frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|}\right),$$

则 F_1 是 (α, β) -度量, 其中 $\alpha = |y|$, $\beta = \frac{\langle x, y \rangle}{|x|}$. 此时, β 关于 α 的模长 $b := \|\beta\|_\alpha$ 为 $b = \sqrt{\delta_{ij} \frac{x^i x^j}{|x|^2}} = 1$. 因此, F_1 是单色的. 注意到 F 是 F_1 的共形变换, 由引理 2.3 知, F 也是单色的. $\square$

文献 [9, 定理 1] 告诉我们, Finsler 空间中的每一个保圆向量场是共形的. 在定理 1.1 的基础上, 我们有如下推论:

推论 4.1 设 $F = |y|\phi(|x|, \frac{\langle x, y \rangle}{|y|})$ 是 $\mathbb{B}^n(\nu) \subset \mathbb{R}^n$ 上的球对称 Finsler 度量. 如果 $\mathcal{U}$ 上的径向场 V 是保圆的, 那么 $F(x, y) = |y|e^{\rho(|x|)}h(\frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|})$ 是单色的, 其中 h 是任意正的可微函数.

在 Finsler 几何中, 旗曲率是非常重要的一个量, 因为它是 Riemann 情形中截面曲率的推广. 结合定理 1.1 以及 Huang 和 Mo [7] 的共形航海问题中旗曲率的关系, 我们有如下推论:

推论 4.2 设 $F = |y|e^{\rho(|x|)}f(\frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|})$ 是 $\mathbb{B}^n(\nu) \subset \mathbb{R}^n$ 上的球对称 Finsler 度量, 其 Cartan 张量为 A , $V_x := x$ 是 $\mathbb{B}^n(\nu)$ 上的径向向量场, 满足 $F(x, V_x) < 1$. $\tilde{F} = \tilde{F}(x, y)$ 为由

$$F\left(x, \frac{y}{\tilde{F}(x, y)} + V_x\right) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{B}^n(\nu), \quad y \in T_x \mathbb{B}^n(\nu) \quad (4.6)$$

确定的 $\mathcal{U}$ 上的 Finsler 度量. 那么 $\tilde{F}$ 与 F 的旗曲率满足如下关系:

$$K_{\tilde{F}}(y, y \wedge u) - \left[3 \frac{y^i c_{xi}}{\tilde{F}(x, y)} - c^2 + 2V(c) \right] = K_F(\tilde{y}, \tilde{y} \wedge u) - 2 \frac{A_{(x, [\tilde{y}])(u, \nabla c, u)}}{h_{(x, [\tilde{y}])}(u, u)},$$

其中 $\tilde{y} = y + F(x, \tilde{y})V$, h 是 F 的角度量, 且 $c(x) = c(|x|) = \frac{|x|\rho'(|x|)+1}{2}$ 与函数 f 无关.

当 $\rho(r) = \sigma \log r$ 时 (其中 σ 是常数), 我们有如下推论:

推论 4.3 设 $F = |y||x|^\sigma f(\frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|})$ 是 $\mathbb{B}^n(\nu) \subset \mathbb{R}^n$ 上的球对称 Finsler 度量, 其中 σ 是常数, 且 $V_x := x$ 是 $\mathbb{B}^n(\nu)$ 满足 $F(x, V_x) < 1$ 的径向向量场. 令 $\tilde{F} = \tilde{F}(x, y)$ 为 (4.6) 所定义的 $\mathbb{B}^n(\nu)$ 上的 Finsler 度量, 则 $\tilde{F}$ 与 F 的旗曲率有如下关系:

$$K_{\tilde{F}}(y, y \wedge u) = K_F(\tilde{y}, \tilde{y} \wedge u) - \frac{(1 + \sigma)^2}{4},$$

其中 $\tilde{y} = y + F(x, \tilde{y})V$.

让我们考虑一个特殊的情形: 当 $f \equiv 1$, $\sigma = 0$ 时,

$$F(x, y) = |y|.$$

那么 F 具有 0 旗曲率, 且导出度量为 $\tilde{F}$, 即所谓单位球上的 Funk 度量, 也具有常旗曲率

$$K_{\tilde{F}} = K_F - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}.$$

5 射影平坦 Finsler 度量

Hilbert 第四问题的光滑情形是刻画 $\mathbb{R}^n$ 中开集上的射影平坦 Finsler 度量. 对于具有共形径向场的球对称度量, 我们有如下定理:

定理 5.1 设 $F = |y|e^{\rho(|x|)}h(\frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|})$ 是 $\mathbb{B}^n(\nu) \subset \mathbb{R}^n$ 上的球对称 Finsler 度量, 那么 F 是射影平坦的当且仅当 $h = h(\lambda)$ 满足

$$(\lambda^2 - 1)h'' - (2c - 1)\lambda h' + (2c - 1)h = 0, \quad (5.1)$$

其中 $c = c(r)$ 径向场关于 F 的伸缩系数.

证明 利用 (1.2), 我们有

$$\begin{aligned} \phi_r &= \rho' \phi - \frac{s}{r^2} e^\rho h', \quad \phi_s = \frac{1}{r} e^\rho h', \\ \phi_{rs} &= \frac{1}{r} e^\rho \left(\rho' h' - \frac{\lambda}{r} h'' - \frac{1}{r} h' \right), \quad \phi_{ss} = \frac{1}{r^2} e^\rho h'', \end{aligned}$$

其中 r 和 s 的定义在 (4.1) 中给出. 由此可知,

$$s\phi_{rs} + r\phi_{ss} - \phi_r = -\frac{1}{r} e^\rho [(\lambda^2 - 1)h' - r\rho'\lambda h' + r\rho'h]. \quad (5.2)$$

由文献 [10, 定理 1.1] 可知, $F(x, y) = |y|\phi(|x|, \frac{\langle x, y \rangle}{|y|})$ 是射影平坦的当且仅当

$$s\phi_{rs} + r\phi_{ss} - \phi_r = 0.$$

结合 (5.2), 我们知道 $F = |y|e^{\rho(|x|)}h(\frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|})$ 是射影平坦的当且仅当

$$(\lambda^2 - 1)h'' - r\rho'\lambda h' + r\rho'h = 0. \quad (5.3)$$

由 (1.3) 可以得到 $r\rho'(r) = 2c(r) - 1$, 其中 $c = c(r)$ 是径向场关于 F 的伸缩系数. 将其代入 (5.3), 可得 (5.1). $\square$

注意 (5.1) 是球上的 Gegenbauer- 型常微分方程 (参见文献 [15]).

例 5.2 对任意正的可微函数 h , 径向场 $V_x := x$ 是单色 Finsler 度量 $F(x, y) = |y|h(\frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|})$ 的共形向量场, 且常具有伸缩系数 $c(x) \equiv \frac{1}{2}$. 更进一步, $F(x, y) = \epsilon|y| + \delta\frac{\langle x, y \rangle}{|x|}$ 是射影平坦的, 其中 ϵ 和 δ 是满足 $\epsilon + \delta\lambda > 0$ 的常数.

参考文献

- 1 Joharinad P, Bidabad B. Conformal vector fields on Finsler spaces. *Differential Geom Appl*, 2013, 31: 33–40
- 2 Mo X, Huang L. On curvature decreasing property of a class of navigation problems. *Publ Math Debrecen*, 2007, 71: 141–163
- 3 Matveev V S, Rademacher H B, Troyanov M, et al. Finsler conformal Lichnerowicz-Obata conjecture. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 2009, 59: 937–949
- 4 Matveev V S, Troyanov M. The Binet-Legendre metric in Finsler geometry. *Geom Topol*, 2012, 16: 2135–2170
- 5 Shen Z, Xia Q. Conformal vector fields on a locally projectively flat Randers manifold. *Publ Math Debrecen*, 2014, 84: 463–474
- 6 Huang L, Mo X. On conformal fields of a Randers metric with isotropic S -curvature. *Illinois J Math*, 2013, 57: 685–696
- 7 Huang L, Mo X. On the flag curvature of a class of Finsler metrics produced by the navigation problem. *Pacific J Math*, 2015, 277: 149–168
- 8 Shen Z, Yuan M. Conformal vector fields on some Finsler manifolds. *Sci China Math*, 2016, 59: 107–114
- 9 Rutz S F. Symmetry in Finsler spaces. *Contemp Math*, 1996, 196: 289–300
- 10 Huang L, Mo X. Projectively flat Finsler metrics with orthogonal invariance. *Ann Polon Math*, 2013, 107: 259–270
- 11 Huang L. On the fundamental equations of homogeneous Finsler spaces. *Differential Geom Appl*, 2015, 40: 187–208
- 12 Huang L. Einstein Finsler metrics on S^3 with nonconstant flag curvature. *Houston J Math*, 2011, 37: 1071–1086
- 13 Deng S, Hou Z. Naturally reductive homogeneous Finsler spaces. *Manuscripta Math*, 2010, 131: 215–229
- 14 Mo X. On some Finsler metrics of constant (or scalar) flag curvature. *Houston J Math*, 2012, 38: 41–54
- 15 Huang L, Mo X. A new class of projectively flat Finsler metrics in terms of hypergeometric functions. *Publ Math Debrecen*, 2012, 81: 421–434

A class of Finsler metrics with conformal radical fields

LI Ying & MO XiaoHuan

Abstract Let F be a Finsler metric on an open subset $\mathcal{U}$ in $\mathbb{R}^n$. By finding a necessary and sufficient condition equivalent to the radical field on $\mathcal{U}$ being conformal with respect to F we completely determine spherically symmetric Finsler metrics on $\mathcal{U}$ whose radical field is conformal. We show that for these Finsler metrics, their tangent spaces are linearly isometric to each other as in the Berwald case.

Keywords Finsler metric, conformal vector field, spherically symmetric, single colored, radical field

MSC(2010) 58E20, 53B40

doi: 10.1360/SCM-2016-0431