基于区间有限元的结构广义可靠度分析

吕大刚^{1,2*}, 宋彦^{1,2}, 辛瑞娇^{1,2}

1. 哈尔滨工业大学结构工程灾变与控制教育部重点实验室, 哈尔滨 150090;

2. 哈尔滨工业大学土木工程学院, 哈尔滨 150090

*联系人, E-mail: ludagang@hit.edu.cn

收稿日期: 2017-02-26; 接受日期: 2017-05-18; 网络出版日期: 2017-08-21

国家自然科学基金(编号: 51678209, 51378162)资助

摘要 相对于只考虑随机性的狭义(或经典)结构可靠度理论, 进一步考虑随机性、模糊性、未确知性的结构可靠度理论称为“结构广义可靠度”, 最早由王光远院士于20世纪80年代提出. 本文介绍了作者所在团队近年来在结构广义可靠度理论方面所取得的一些成果. 首先介绍了区间数学和区间有限元的基本概念, 然后以区间有限元为工具, 重点研究了3种类型不确定性情况下结构广义可靠度分析方法: 第一种情况同时考虑基本变量的随机性与未确知性, 未确知性以区间变量形式体现在随机变量的参数中; 第二种情况为随机性与模糊性处于分离状态, 即基本变量是随机的, 而失效准则是模糊的; 第三种情况为随机性与模糊性处于耦合状态, 模糊性以模糊数形式体现在随机变量的参数中. 采用区间蒙特卡罗模拟(IntMCS)技术和区间一次可靠度方法(IntFORM), 提出并发展了上述3种情况下结构广义可靠度的分析方法. 以一个平面桁架结构为例, 展示了上述方法的适用性和有效性.

关键词 广义可靠度, 区间分析, 一次可靠度方法, 蒙特卡罗模拟法, 平面桁架

PACS: 02.20.Bb, 02.50.Cw, 02.50.Ng, 02.70.Dh, 02.70.Uu

事物的不确定性是自然界和人类社会中存在的一种客观现象. 根据不确定性产生的原因, 可以将不确定性分为随机性、模糊性和未确知性三类.

随机性是一种本质上的不确定性, 是事件发生的条件不够充分, 使得在条件与结果之间不能出现必然的因果关系, 事件发生之前不能预知事物的发生结果. 模糊性是人们认识中关于对象类属边界和性态的不确定性, 是主客体之间活动中存在的属性. 事物的发展都为循序渐进, 由量变到质变的过程, 存在中间过

渡的现象, 模糊性因此产生. 未确知性的来源包含模型不确定性和统计不确定性. 模型不确定性是因实际结构性能和在一定程度上简化的数学计算模型之间的差异而产生的. 统计不确定性是未确知性的另外一个重要来源. 描述一个随机现象的概率分布通常是根

据样本观察数据统计分析得到的, 如果样本数量有限, 那么统计不确定性将会非常明显.

现有的可靠性理论所考虑到的不确定性大多仅为随机性, 对系统响应的限制采用一个明确的界限来划

引用格式: 吕大刚, 宋彦, 辛瑞娇. 基于区间有限元的结构广义可靠度分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 014607
Lv D G, Song Y, Xin R J. Generalized reliability analysis of structures based on interval finite element (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2018, 48: 014607, doi: 10.1360/SSPMA2017-00053

分. 目前, 人们已逐步认识到系统外部干扰和内部参数不仅具有随机性, 而且常常具有模糊性. 对系统响应的限制不应用一个明确的界限来确定, 系统响应从允许到不允许应该有一个中间过渡^[1]. 1986年, 王光远院士与其学生王文泉提出了模糊可靠性问题^[2]. 1988年, 王光远、王文泉以及欧进萍^[3]首次提出了广义可靠度的概念. 王光远院士于1990年首次提出“未确知性”理论^[4]并在专著《工程软设计理论》中系统论述了结构的“广义可靠度”理论^[5]. 之后, 王光远等人^[6-9]继续研究并发展了工程结构广义可靠度理论及其计算方法.

对系统同时包含随机性和模糊性的情况, 若仍使用常规可靠性方法计算, 则得到的计算结果可能会与实际完全不一致. 1991年, Cai等人^[10]基于双态假设和可能性假设, 建立了系统的模糊可靠度. 同时期国内黄洪钟^[11]详细讨论了清晰功能拓展到模糊功能时可靠指标的计算方法, 将模糊数学应用于可靠性设计中, 从而拓展了常规可靠性的研究范围, 为模糊可靠性的研究提供了有益的途径. 本文针对结构的基本变量既含模糊性又含随机性的情况, 采用模糊数学和截集水平法^[12], 将模糊数的隶属函数转化为等效概率密度函数进行可靠度分析.

对于未确知性, 不确定性凸集理论^[13]是一种较好的处理方法. 该理论用适当的凸集来界定参数变差的范围, 并在凸集内分析结构极限状态函数不确定性的“最差情况”. 现有的凸集理论中应用较为广泛的为区间模型和椭球模型. 区间模型在形貌上的表现是高维长方体, 该模型以区间数学作为坚实的理论基础, 但不能描述不确定变量间的相关性. 椭球模型在形貌上的表现是高维椭球, 该模型理论基础相对薄弱, 但可以刻画不确定变量间的相关性^[14,15]. 本文针对随机变量间不包含相关性的情况, 选取区间模型考虑参数的未确知性.

针对3种不确定性同时存在的情况, 现有的分析方法较少. 本文考虑多种不确定性同时存在的情况, 重点研究3类不确定性情况下的结构广义可靠度分析方法; 此外, 在保证结构精度的同时, 改进了传统的一次可靠度方法, 大大提高了计算效率.

1 区间数学与区间有限元

为了在结构可靠度分析过程中考虑未确知性, 本

文采用区间分析的方法. 本节介绍区间数学和区间有限元的基本概念.

1.1 区间数学

对于给定的数对 $\underline{x}, \bar{x} \in R$, 若满足条件:

$$\underline{x} \leq \bar{x}, \quad (1)$$

则闭有界数集合

$$X^I = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in R | \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\} \quad (2)$$

称为有界闭区间, 每个区间数均由上、下两个端点组成, 其中区间 X^I 的下端点为 $\underline{x}$, 区间 X^I 的上端点为 $\bar{x}$.

为了较好地反映区间数的几何特征, 更方便地研究区间数的性质和特点, 采用公式(2)定义以下几个基本量:

$$(\text{中点}) m(X^I) = \text{mid}X^I = (\underline{x} + \bar{x}) / 2, \quad (3)$$

$$(\text{宽度}) W(X^I) = \bar{x} - \underline{x}, \quad (4)$$

$$(\text{绝对值}) |X^I| = \max(|\underline{x}|, |\bar{x}|). \quad (5)$$

在运用区间理论进行可靠度分析时, 需要运用区间函数的概念. 设 $f: R^n \rightarrow R$, 若存在区间值映射 $F: I(R^n) \rightarrow I(R)$, 对任意 $x_i \in X_i^I (i = 1, 2, \dots, n)$, 成立 $F([x_1, x_1], \dots, [x_n, x_n]) = f(x_1, \dots, x_n)$,

则称 F 为函数 f 的区间扩展. 函数的区间扩展是函数的定义域和值域由实数向区间数的推广, 区间值函数的自变量和因变量都是区间变量.

在研究实函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与其区间扩展 $F(X_1^I, X_2^I, \dots, X_n^I)$ 之间的关系时, 需要引入下面的重要概念. 设 $F: I(R^n) \rightarrow I(R)$, $X^I, Y^I \in I(R^n)$ 且满足 $X^I \subseteq Y^I$, 如果成立

$$F(X^I) \subseteq F(Y^I), \quad (7)$$

则称区间值映射 F 具有包含单调性. 因为有理区间函数都是由四则运算组合而成, 所以容易由区间数四则运算的包含单调性证明有理区间函数同样具有包含单调性. 如果区间值函数 F 是点函数 f 的具有包含单调性的区间扩展, 则可以得到如下关系:

$$\begin{aligned} & \{f(x_1, \dots, x_n) \mid \forall x_i \in X_i^I, i = 1, 2, \dots, n\} \\ & \subseteq F(X_1^I, \dots, X_n^I). \end{aligned} \quad (8)$$

1.2 区间有限元

有限元方法是一种已发展成熟并被广泛使用的数值分析方法. 对 n 阶自由度线性结构进行静力学分析, 其位移响应的有限元方程为

$$\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (9)$$

其中, $\mathbf{K} \in R^{n \times n}$ 为刚度矩阵; $\mathbf{X} \in R^n$ 为位移列向量; $\mathbf{F} \in R^n$ 为外荷载列向量. 由此可见, 有限元方法计算的是确定性问题, 即材料特征、几何特性、荷载都是确定性变量, 计算得到的结构响应也是确定性变量. 然而在大多数情况下, 结构参数的确切值是无法得知的, 只知其在一定区间内变化, 这种不确定性的情况在实际工程中更为普遍.

假设不确定系统中关于结构物理参数、几何尺寸和外荷载共有 m 个独立的不确定参量 $h_i (i=1, 2, \dots, m)$, 各参量均在如下区间内变化

$$h_i^I = h_i^c + h_i^r \delta_i, \quad (10)$$

其中, h_i^c 为区间数 h_i^I 的中点; h_i^r 为区间数 h_i^I 的半径; δ_i 为标准化区间变量.

这时可以从结构参数的变化范围得到结构响应的变化范围, 将区间分析与有限元分析相结合的方法称为区间有限元方法.

当 h_i 在各自区间内取值, 刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 和荷载矩阵 $\mathbf{F}$ 中元素具有相应的变化范围, 则静力区间线性方程组可以表示为

$$\mathbf{K}^I \mathbf{X} = \mathbf{F}^I, \quad (11)$$

此时方程(11)的精确解是非常复杂的, 可以定义集合

$$\mathbf{X}(\mathbf{h}^I) = \{\mathbf{h} : \mathbf{K}(\mathbf{h})\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{h}), \mathbf{h} \in \mathbf{h}^I\}, \quad (12)$$

集合 $\mathbf{X}(\mathbf{h}^I)$ 在应用时太过于复杂, 通常只可以找到包含集合 $\mathbf{X}(\mathbf{h}^I)$ 的最小区间 $\mathbf{X}^I(\mathbf{h}^I)$,

$$\mathbf{X}^I(\mathbf{h}^I) = \text{hull } \mathbf{X}(\mathbf{h}^I), \quad (13)$$

称 $\mathbf{X}^I(\mathbf{h}^I)$ 是区间解.

区间有限元的求解方法通常有端点组合法、矩阵摄动法、级数展开法以及敏度分析法. 由于本文所计算的模型都是线弹性结构, 并只局限于结构的静力分析, 因此利用端点组合法就可以得到想要的精确解. 该方法中若 m 个输入变量均为区间变量:

$$h_i = [h_i^{(1)}, h_i^{(2)}] = [h_i, \bar{h}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (14)$$

则对各输入变量的两个端点值进行组合得到的所有可能输出响应为

$$f_r = f(h_1^{(i)}, h_2^{(j)}, \dots, h_m^{(k)}), i = 1, 2; \\ j = 1, 2; \dots; k = 1, 2; r = 1, 2, \dots, 2^m, \quad (15)$$

最终可得到输出响应的区间扩展为

$$f = [f, \bar{f}] = \left[\min_{r=1, 2, \dots, 2^m} (f_r), \max_{r=1, 2, \dots, 2^m} (f_r) \right]. \quad (16)$$

2 未确知性与随机性融合的结构广义可靠度分析

通过区间分析, 可以在考虑变量随机性的同时考虑未确知性. 本节针对随机性与未确知性融合的情况, 即概率模型参数为区间变量, 介绍采用区间MCS和改进的区间FORM的基本原理和计算方法.

2.1 概率模型参数未确知性的区间表征

为实现区间分析, 首先介绍p-box的概念: 假设 $\bar{F}$ 和 $\underline{F}$ 是定义在实数上的非减函数, 其值域为 $[0, 1]$, 并且对于所有的 $x \in R$, $\underline{F}(x) \leq \bar{F}(x)$, 则对于定义在实数上其值域为 $[0, 1]$ 且满足 $\underline{F}(x) \leq F(x) \leq \bar{F}(x)$ 的这类非减函数 F , 用 $[\underline{F}, \bar{F}]$ 代表 F 的集合. 当函数 $\bar{F}$ 和 $\underline{F}$ 用来描述某一不完全确定的分布函数的边界, 把 $[\underline{F}, \bar{F}]$, 即由 $\underline{F}$ 和 $\bar{F}$ 这一对函数来指定边界的集合, 称为这个分布的“probability-box”或者“p-box”. 也就是说, 若某一随机变量 X 的分布函数 F 不是完全已知的, 已知分布函数 F 是在 $[\underline{F}, \bar{F}]$ 这个p-box里的, 则对任意的 x , $\underline{F}(x)$ 是 $F(x) = P(X \leq x)$ 的下界, $\bar{F}(x)$ 是 $F(x) = P(X \leq x)$ 的上界. 根据随机变量 X 的 P , 可以利用下面的两个公式计算得到它的分布函数的上下两个边界:

$$\bar{F}_x(x) = 1 - \underline{P}(X > x), \quad (17)$$

$$\underline{F}_x(x) = \underline{P}(X \leq x). \quad (18)$$

图1为一个由左右边界组成的p-box. 由图可见, 分布函数的上边界 $\bar{F}$ 对应的是 α 分位数(即 x_α)的下边界, 分布函数的下边界 $\underline{F}$ 对应的是 α 分位数(即 x_α)的上边

图1 一个由左右两个边界组成的p-box
Figure 1 A p-box consist of two frontiers.

界^[16].

2.2 基于区间MCS的结构广义可靠度分析

蒙特卡罗模拟法(Monte Carlo Simulation, MCS)是一种以概率统计理论为指导的一类非常重要的数值计算方法. 本文将其拓展到随机变量 X 的分布函数为概率箱时的情况, 此时随机变量 X 的概率模型的分布参数 $\theta \in \Theta$, 即只能确定该概率模型的分布参数 θ 在区间 Θ 内. 当 θ 在区间 Θ 内变化时, 第 j 个样本值 $\mathbf{x}_j^t$ 是区间向量, 极限状态函数变为 $g(\mathbf{x}_j^t)$. 如果 $g(\mathbf{x}_j^t)$ 的最大值和最小值可以确定:

$$\min(g(\mathbf{x}_j^t)) \leq g(\mathbf{x}_j^t) \leq \max(g(\mathbf{x}_j^t)), \quad (19)$$

则

$$I[\max(g(\mathbf{x}_j^t)) \leq 0] \leq I[g(\mathbf{x}_j^t) \leq 0] \leq I[\min(g(\mathbf{x}_j^t)) \leq 0]. \quad (20)$$

将公式(14)代入MCS失效概率计算公式

$$p_f \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I[g(\mathbf{x}_j) \leq 0], \quad (21)$$

得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I[\max(g(\mathbf{x}_j^t)) \leq 0] &\leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I[g(\mathbf{x}_j^t) \leq 0], \\ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I[g(\mathbf{x}_j^t) \leq 0] &\leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I[\min(g(\mathbf{x}_j^t)) \leq 0]. \end{aligned} \quad (22)$$

根据公式(22)可以得到失效概率的区间估计^[17]

$$p_f \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I[\max(g(\mathbf{x}_j^t)) \leq 0], \quad (23)$$

$$\bar{p}_f \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I[\min(g(\mathbf{x}_j^t)) \leq 0]. \quad (24)$$

在实现区间MCS时, 首先需要在各个随机变量的p-box中随机抽样得到区间向量. 反变换法是产生随机数经常使用的方法, 本文将反变换法拓展到从p-box中进行随机抽样. 假设一个概率箱 $F(x)$ 的边界为 $\bar{F}(x)$ 和 $F(x)$, 如果 $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ 是标准均匀分布的一系列的随机数, 则每一个 u_i 都对应可以产生两个随机变量 X 的随机数

$$x_i = \bar{F}^{-1}(u_i), \quad (25)$$

$$\bar{x}_i = F^{-1}(u_i). \quad (26)$$

这一对 x_i 和 $\bar{x}_i$ 组成了一个区间 $[x_i, \bar{x}_i]$, 这个区间包含了由这个 u_i 反变换得到的对应于这个分布函数集合的所有可能的模拟数.

2.3 基于区间FORM的结构广义可靠度分析

通常区间MCS需要的计算量很大, 实际工程应用中有一定的困难, 因此本文将区间分析与一次可靠度方法结合, 在保证精度的同时降低计算成本.

区间分析与可靠度方法相结合的原理如下^[18]:

设结构极限状态函数为 $Z=R-S$, 其中 R 和 S 为独立的随机变量, 且服从正态分布, 则结构可靠指标为

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}, \quad (27)$$

式中, μ_R, μ_S 分别为强度 R 和应力 S 的平均值; σ_R, σ_S 分别为强度 R 和应力 S 的标准差.

假设强度 R 和应力 S 的平均值和标准差分别在如下区间内变化:

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_R \leq \mu_R \leq \bar{\mu}_R, \quad \underline{\mu}_S \leq \mu_S \leq \bar{\mu}_S, \\ \underline{\sigma}_R \leq \sigma_R \leq \bar{\sigma}_R, \quad \underline{\sigma}_S \leq \sigma_S \leq \bar{\sigma}_S. \end{aligned} \quad (28)$$

根据公式(27), 并由平均值 μ_R 和 μ_S 的上限和下限值 $\bar{\mu}_R, \bar{\mu}_S$ 和 $\underline{\mu}_R, \underline{\mu}_S$ 以及标准差 σ_R 和 σ_S 的上限和下限值 $\bar{\sigma}_R, \bar{\sigma}_S$ 和 $\underline{\sigma}_R, \underline{\sigma}_S$, 可以得到结构可靠指标的集合为

$$\Gamma = \left\{ \beta : \beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}, \underline{\mu}_R \leq \mu_R \leq \bar{\mu}_R, \underline{\mu}_S \leq \mu_S \leq \bar{\mu}_S, \underline{\sigma}_R \leq \sigma_R \leq \bar{\sigma}_R, \underline{\sigma}_S \leq \sigma_S \leq \bar{\sigma}_S \right\}, \quad (29)$$

该集合可能非常复杂, 实际上寻找这个集合元素中的

最大值和最小值更有实际意义, 即寻找下面的结构可靠指标区间:

$$\beta^I = [\beta_{\min}, \beta_{\max}]. \quad (30)$$

显然, 最大值和最小值可以表示为

$$\beta_{\max} = \frac{(\mu_Z)_{\max}}{(\sigma_Z)_{\min}}, \quad \beta_{\min} = \frac{(\mu_Z)_{\min}}{(\sigma_Z)_{\max}}. \quad (31)$$

由于

$$(\mu_Z)_{\max} = (\mu_R)_{\max} - (\mu_S)_{\min} = \bar{\mu}_R - \underline{\mu}_S, \quad (32)$$

$$(\mu_Z)_{\min} = (\mu_R)_{\min} - (\mu_S)_{\max} = \underline{\mu}_R - \bar{\mu}_S, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_Z)_{\max} &= \sqrt{(\sigma_R)_{\max}^2 + (\sigma_S)_{\max}^2} \\ &= \sqrt{(\bar{\sigma}_R)^2 + (\bar{\sigma}_S)^2}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_Z)_{\min} &= \sqrt{(\sigma_R)_{\min}^2 + (\sigma_S)_{\min}^2} \\ &= \sqrt{(\underline{\sigma}_R)^2 + (\underline{\sigma}_S)^2}, \end{aligned} \quad (35)$$

因此结构可靠指标的最大值和最小值分别为

$$\beta_{\max} = \frac{(\mu_Z)_{\max}}{(\sigma_Z)_{\min}} = \frac{\bar{\mu}_R - \underline{\mu}_S}{\sqrt{(\underline{\sigma}_R)^2 + (\underline{\sigma}_S)^2}}, \quad (36)$$

$$\beta_{\min} = \frac{(\mu_Z)_{\min}}{(\sigma_Z)_{\max}} = \frac{\underline{\mu}_R - \bar{\mu}_S}{\sqrt{(\bar{\sigma}_R)^2 + (\bar{\sigma}_S)^2}}. \quad (37)$$

上述计算中, 仅取了 R 和 S 作为基本随机变量, 且服从正态分布, 极限状态函数为最简单的一种函数形式. 显然该方法远不能满足实际工程应用的需要, 因而需要将其拓展到复杂的极限状态函数甚至是隐式的极限状态函数和非正态随机变量的情形中.

由区间分析的原理, 很容易发现要将区间分析与FORM结合, 对随机变量的均值和标准差的区间端点应用组合法就可以很好地解决这个问题.

设结构的极限状态函数为 $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ 为影响结构功能的随机变量向量, 且 n 个随机变量之间相互独立, 随机变量 X_i 的均值和标准差在如下区间范围内变化:

$$\mu_{Xi}^I = \mu_i^c + \mu_i^r \delta_{\mu i}, \quad (38)$$

$$\sigma_{Xi}^I = \sigma_i^c + \sigma_i^r \delta_{\sigma i}. \quad (39)$$

因为结构的极限状态函数值随着各随机变量的

均值和标准差取值的变化而变化, 因此, 同一个极限状态函数的可靠度计算问题, 可靠指标就可以看成各随机变量均值和标准差的函数 $\beta = \psi(\mu_{X_1}, \sigma_{X_1}, \dots, \mu_{X_n}, \sigma_{X_n})$, 则可以对随机变量的均值和标准差的区间端点应用组合法, 来寻求结构可靠指标的下限和上限分别为

$$\begin{aligned} \underline{\beta} = \beta_{\min} &= \min\{\psi(\delta_{\mu 1}, \delta_{\sigma 1}, \dots, \delta_{\mu n}, \delta_{\sigma n}) : \\ &\delta_{\mu 1}, \delta_{\sigma 1}, \dots, \delta_{\mu n}, \delta_{\sigma n} \in \{-1, 1\}\}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta} = \beta_{\max} &= \max\{\psi(\delta_{\mu 1}, \delta_{\sigma 1}, \dots, \delta_{\mu n}, \delta_{\sigma n}) : \\ &\delta_{\mu 1}, \delta_{\sigma 1}, \dots, \delta_{\mu n}, \delta_{\sigma n} \in \{-1, 1\}\}. \end{aligned} \quad (41)$$

3 未确知性与随机性和模糊性耦合的结构广义可靠度分析

本节在之前随机性与未确知性融合的基础上, 考虑失效准则具有模糊性的情况. 为考虑模糊性, 首先介绍模糊集合和模糊事件概率.

3.1 模糊集合

普通集合的定义: 设论域为 U , A 是论域 U 中的普通子集, 集 A 可表达为下面的映射

$$U \rightarrow \{0, 1\}, u \rightarrow \lambda_A(u) = \begin{cases} 1, & u \in A, \\ 0, & u \notin A, \end{cases} \quad (42)$$

式中, $\lambda_A(u)$ 为 A 的特征函数.

模糊集合的定义: 设从论域 U 到闭区间 $[0, 1]$ 的一个映射

$$U \rightarrow [0, 1], u \rightarrow \mu_A(u) \in [0, 1], \quad (43)$$

称 A 为 U 上的一个模糊(Fuzzy)集, μ_A 称为模糊集 A 的隶属函数或 u 对 A 的隶属度. 模糊集可用模糊符号“ $\sim$ ”强调说明. 当隶属函数仅取0或1时, 模糊集合 A 退化为普通集合 A , 可见, 模糊集合是更普遍的情况, 普通集合是模糊集合的特殊情况. 模糊集合的提出和模糊数学的建立, 使得原本无法用数学手段处理的模糊现象可以用数学手段加以描述和分析, 从而扩大了数学的应用范围.

3.2 模糊事件概率

由于普通集合是模糊集合的特殊情况, 而普通事

件 A 的普通概率可表示为

$$P(A) = \int_A dP, \quad (44)$$

又可改写为

$$P(A) = \int_U C_A(x) dP = E(C_A), \quad (45)$$

这里 $C_A(x)$ 为事件 A 的特征函数, 可由下式得到

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases} \quad (46)$$

由此可见普通事件的概率是其特征函数的数学期望. 将其推广至模糊事件, 则模糊集合 $\tilde{A}$ 的概率可表示为

$$P(A) = \int_U \mu_{\tilde{A}}(x) dP = E(\mu_{\tilde{A}}(x)). \quad (47)$$

模糊随机事件是模糊事件的特殊情况, 可以定义模糊随机事件的概率如下:

设模糊随机事件 $\tilde{A}$ 的概率为 $\Pr(\tilde{A})$, 如基本事件空间 Ω 为离散集, $\tilde{A} = \{(x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i)) \mid x_i \in \Omega\}$, 其概率分布列为 $p_i = \Pr(X = x_i)$, 则

$$\Pr(\tilde{A}) = \sum_{i=1} \mu_{\tilde{A}}(x_i) p_i. \quad (48)$$

若基本事件空间 Ω 为实数集, $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in \Omega\}$, 其概率密度函数为 $f(x)$, 则

$$\Pr(\tilde{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{A}}(x) f(x) dx. \quad (49)$$

由式(47)和(48)知, 模糊随机事件的概率为其隶属函数的数学期望.

3.3 考虑失效准则模糊性的结构广义可靠度分析

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 是影响结构功能的 n 个基本随机变量, 结构极限状态函数为 $Z = g(X_1, \dots, X_n)$, 常规可靠性基于二态假设理论, 结构状态分为以下3种: (1) $g(X_1, \dots, X_n) > 0$ 结构处于安全状态; (2) $g(X_1, \dots, X_n) < 0$ 结构处于失效状态; (3) $g(X_1, \dots, X_n) = 0$ 结构处于临界状态.

二态假设是常规可靠性的理论基础之一, 其本质思想是将结构的工作状态划分为完全正常工作状态或完全故障状态. 但该假设既不符合人们的思维形式, 也不符合客观事物的发展规律, 因而在模糊可靠度的

探索中, 提出将二态假设修改为模糊状态假设. 模糊状态假设的本质思想是在完全正常工作状态和完全故障状态之间有个中间过渡状态, 模糊状态假设更加符合人们的思维形式也更加符合客观事物的发展规律.

设结构的状态包含模糊极限状态, 结构的失效是模糊事件 $\tilde{E}$, 极限状态函数 Z 对 $\tilde{E}$ 的隶属度 $\mu_{\tilde{E}}(z)$ 可用来刻画结构失效这一模糊事件, 即

$$\mu_{\tilde{E}}(z) = \begin{cases} 1, & \text{结构处于失效状态,} \\ \in (0, 1), & \text{结构处于模糊极限状态,} \\ 0, & \text{结构处于安全状态.} \end{cases} \quad (50)$$

在安全准则为随机模糊的情况下, 可以得到结构的模糊可靠度为

$$\Psi = P[\tilde{E}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{\tilde{E}}(E(x)) f_x(x) dx = E_R[\mu_{\tilde{E}}(x)]. \quad (51)$$

结合前面的区间可靠度理论, 可得到基于区间MCS及区间FORM的结构随机模糊可靠度分析方法, 具体计算流程如图2和3所示.

4 随机性与模糊性融合及耦合的结构广义可靠度分析

本节考虑概率模型参数为模糊变量的情况, 建立随机性与模糊性融合及耦合的结构广义可靠度分析模型. 为考虑概率模型中参数的模糊性, 本文采用 λ 截集法. 设 $\tilde{A}$ 为论域 U 中的模糊集, $0 < \lambda \leq 1$, 集

$$\tilde{A}_\lambda = \{u \mid u_{\tilde{A}} \geq \lambda\} \quad (52)$$

称为 $\tilde{A}$ 的 λ 截集, λ 称为阈值或置信水平. 特别地, 集 $\tilde{A}'_\lambda = \{u \mid u_{\tilde{A}} > \lambda\}$ 称为 $\tilde{A}$ 的 λ 强截集.

λ 截集 $\tilde{A}_\lambda$ 为普通集合, 它是论域中所有隶属度大于或等于 λ 的元素组成的, 即 λ 水平截集法将模糊事件变为普通事件, 把求解模糊事件的概率转换为求解普通事件的概率.

实际工程中, 虽然缺少足够的将概率模型的分布参数精确描述出来, 但根据已有随机试验数据和专家经验, 将概率模型的分布参数描述为模糊数是合理的. 假设随机变量的均值和标准差可用L-R型随机变量描述, 根据模糊数学的 λ 水平截集分解定理, 随机变量 X_i 的模糊均值 $\tilde{\mu}_{X_i}$ 和模糊标准差 $\tilde{\sigma}_{X_i}$ 可以分别表示为

图2 区间MCS流程图

Figure 2 Flow chart of interval MCS.

图3 区间FORM流程图

Figure 3 Flow chart of interval FORM.

$$\tilde{\mu}_{Xi} = \mu_i^c(\lambda) + \mu_i^r(\lambda)\delta_{\mu_i}, \quad (53)$$

$$\tilde{\sigma}_{Xi} = \sigma_i^c(\lambda) + \sigma_i^r(\lambda)\delta_{\sigma_i}, \quad (54)$$

其中, $\lambda \in [0, 1]$ 为单位区间变量; $\delta_{\mu_i} \in [-1, 1]$ 及 $\delta_{\sigma_i} \in$

$[-1, 1]$ 为标准化区间变量.

概率模型含模糊分布参数的可靠度分析思路是利用模糊数的分解定理将模糊均值和模糊标准差转换为一系列水平截集下的区间. 根据各个截集水平下随机变量的均值区间和标准差区间, 来计算结构可靠度区间. 这样可得到各截集水平下的失效概率区间, 从而得到结构失效概率的可能性分布, 具体如下.

选取某一截集水平 λ_1 , 在该截集水平下, 随机变量 X_i 的均值和标准差可以表示为区间形式:

$$\mu_{Xi}^l(\lambda_1) = [\mu_{Xi}^c(\lambda_1), \bar{\mu}_{Xi}(\lambda_1)], \quad (55)$$

$$\sigma_{Xi}^l(\lambda_1) = [\sigma_{Xi}^c(\lambda_1), \bar{\sigma}_{Xi}(\lambda_1)], \quad (56)$$

其中, 各区间的上下端点可以由下面公式计算得到

$$\mu_{Xi}^l(\lambda_1) = \mu_i^c(\lambda_1) + \mu_i^r(\lambda_1) \cdot (-1), \quad (57)$$

$$\bar{\mu}_{Xi}(\lambda_1) = \mu_i^c(\lambda_1) + \mu_i^r(\lambda_1) \cdot 1, \quad (58)$$

$$\sigma_{Xi}^l(\lambda_1) = \sigma_i^c(\lambda_1) + \sigma_i^r(\lambda_1) \cdot (-1), \quad (59)$$

$$\bar{\sigma}_{Xi}(\lambda_1) = \sigma_i^c(\lambda_1) + \sigma_i^r(\lambda_1) \cdot 1. \quad (60)$$

用该截集水平下随机变量的均值区间和标准差区间, 来计算该截集水平下结构可靠度区间, 从而可得到概率模型参数为模糊变量情况下的区间MCS和区间FORM方法, 流程图如图4和5所示.

5 桁架结构算例分析

图6是一个具有8个节点和13个单元的桁架结构, 各杆的横截面积均为 12 cm^2 , 基本变量取弹性模量 E 和荷载 P .

5.1 未确知性与随机性融合

取 E 服从正态分布, 即 $E \sim N([207, 212], 2.08) \text{ GPa}$, P 服从对数正态分布, 即 $P \sim \text{LN}([7.41, 7.46], 0.12) \text{ kN}$, 假设各随机变量之间相互独立. 最大变形控制取节点5的竖向位移 Δ , $\Delta = -0.055 \text{ m}$ 为准许最大竖向位移, 求其可靠度.

计算结果如下:

(1) 采用OpenFEM得到的计算结果, 如表1所示.

(2) 采用ANSYS得到的计算结果, 如表2所示.

图4 区间MCS流程图

Figure 4 Flow chart of interval MCS.

将计算结果进行比较可以看出: 两种方法的计算结构是很相近的, 而在计算效率上, 区间FORM方法比区间MCS方法高很多.

5.2 未知性与随机性和模糊性耦合

E 服从正态分布, 即 $E \sim N([207, 212], 2.08)$ GPa, P 服从对数正态分布, 即 $P \sim LN([7.41, 7.46], 0.12)$ kN, 假设各随机变量之间是相互独立的. 最大变形控制取节点5的竖向位移 Δ , 将结构失效看作模糊随机事件, 其隶属函数 $\mu(\Delta)$ 取作降半梯形, 即

$$\mu(\Delta) = \begin{cases} 0, & \Delta \geq -0.054, \\ \frac{\Delta + 0.054}{-0.057 - (-0.054)}, & -0.057 < \Delta < -0.054, \\ 1, & \Delta \leq -0.057, \end{cases} \quad (61)$$

求其可靠度.

计算结果如下:

- (1) 采用OpenFEM得到的计算结果, 如表3所示.
- (2) 采用ANSYS得到的计算结果, 如表4所示.

图5 区间FORM流程图

Figure 5 Flow chart of interval FORM.

图6 13杆平面桁架结构

Figure 6 Plane truss structure.

表 1 平面桁架结构的失效概率(OpenFEM)

Table 1 Failure probability of plane truss (OpenFEM)

	模拟次数	失效概率	计算时间
MCS	5000	$[8.00 \times 10^{-4}, 5.80 \times 10^{-3}]$	20 min
	50000	$[1.04 \times 10^{-3}, 7.02 \times 10^{-3}]$	3 h 14 min
	500000	$[9.67 \times 10^{-4}, 6.54 \times 10^{-3}]$	35 h 27 min
FORM	20	$[9.609 \times 10^{-4}, 6.420 \times 10^{-3}]$	5 s

表 2 平面桁架结构的失效概率(ANSYS)

Table 2 Failure probability of plane truss (ANSYS)

	模拟次数	失效概率	计算时间
MCS	5000	$[4.00 \times 10^{-4}, 4.20 \times 10^{-3}]$	7 h 19 min
	50000	$[9.06 \times 10^{-4}, 7.07 \times 10^{-3}]$	80 h
FORM	10	$[9.609 \times 10^{-4}, 6.420 \times 10^{-3}]$	57 s

表 3 平面桁架结构的失效概率(OpenFEM)

Table 3 Failure probability of plane truss (OpenFEM)

	模拟次数	失效概率	计算时间
MCS	500	$[5.757 \times 10^{-4}, 4.298 \times 10^{-3}]$	19 min 59 s
	50000	$[8.134 \times 10^{-4}, 5.304 \times 10^{-3}]$	3 h 20 min
	500000	$[8.724 \times 10^{-4}, 5.768 \times 10^{-3}]$	33 h 24min
FORM	30	$[8.710 \times 10^{-4}, 5.783 \times 10^{-3}]$	7 s

表 4 平面桁架结构的失效概率(ANSYS)

Table 4 Failure probability of plane truss (ANSYS)

	模拟次数	失效概率	计算时间
MCS	5000	$[5.324 \times 10^{-4}, 4.798 \times 10^{-3}]$	7 h 1 min
	50000	$[8.451 \times 10^{-4}, 5.296 \times 10^{-3}]$	70 h 5 min
FORM	50	$[8.652 \times 10^{-4}, 5.777 \times 10^{-3}]$	4 min

比较计算结果可以看出区间FORM的计算效率更高, 两种方法结果较为接近.

5.3 随机性与模糊性融合及耦合

E 服从正态分布, 即 $E \sim N((209, 2, 3)_{LR}, 2.08)$ GPa, 荷载 P 服从对数正态分布, 即 $P \sim LN((7.43, 0.02, 0.03)_{LR}, 0.12)$ kN, 假设各随机变量之间相互独立. 最大变形控制取节点5的竖向位移 Δ , 不考虑状态变量模糊性时, $\Delta = -0.055$ m为准许最大竖向位移; 考虑状态变量模

糊性时, 即将结构失效看作模糊随机事件, 其隶属函数 $\mu(\Delta)$ 取作降半梯形, 如式(61), 求其可靠度.

(1) 采用OpenFEM平台, 只考虑随机变量模糊性不考虑失效准则模糊性的结果, 用区间MCS方法计算, 共进行3万次模拟, 用时22 h. 用区间FORM方法计算, 共进行模拟20次, 用时50 s. 两种方法的结果如图7所示.

(2) 采用OpenFEM平台, 同时考虑随机变量和失效准则模糊性的结果, 用区间MCS方法计算, 模拟1万次,

用时7 h. 用区间FORM方法计算, 共进行30次模拟, 用时73 s. 不同方法计算出的模糊可靠指标如图8所示.

(3) 采用ANSYS软件, 只考虑随机变量模糊性不考虑失效准则模糊性的结果, 用区间MCS方法, 模拟1万次, 用时150 h. 用区间FORM方法, 进行模拟8次, 用时7 min. 结果绘于图9中.

(4) 采用ANSYS软件, 同时考虑随机变量和失效准则模糊性的结果, 用区间MCS方法模拟1万次, 用时150 h. 用区间FORM方法, 模拟14次, 用时12 min. 不同方法的结果如图10所示.

通过对比可知: OpenFEM计算效率比ANSYS更好一些, 区间FORM计算效率比区间MCS高很多.

6 结论

本文深入研究了综合随机性、模糊性和未确知性的结构广义可靠度有限元分析方法. 为了全面考虑结

图7 (网络版彩图)平面桁架结构的模糊可靠指数
Figure 7 (Color online) Fuzzy reliability indices of plane truss.

图8 (网络版彩图)平面桁架结构的模糊可靠指数
Figure 8 (Color online) Fuzzy reliability indices of plane truss.

图9 (网络版彩图)平面桁架结构的模糊可靠指数
Figure 9 (Color online) Fuzzy reliability indices of plane truss.

图10 (网络版彩图)平面桁架结构的模糊可靠指数
Figure 10 (Color online) Fuzzy reliability indices of plane truss.

构可靠性分析中的各种不确定性, 建立了3种情况下的结构广义可靠性分析模型, 提出了改进的区间MCS、区间FORM以及模糊FORM方法, 综合采用MATLAB, OpenFEM和ANSYS平台, 实现了结构的区间模糊随机有限元可靠度分析, 主要得出以下结论.

(1) 常规可靠性理论只考虑随机不确定性, 本文建立的3种广义可靠性分析模型能更好地考虑可靠性分析中的随机性、模糊性和未确知性共存的情况.

(2) 将传统随机可靠性分析理论中的一次可靠度方法(FORM)进行了修改和拓广, 可以考虑概率模型含区间分布参数和模糊分布参数以及基于模糊随机变量的结构广义可靠度分析情形, 并实现了在有限元分析基础之上的广义可靠度分析. 算例分析表明: 本文提出的区间FORM和模糊FORM方法以及基于区间FORM和模糊FORM的有限元可靠度分析方法效率非常高, 可以用于大型复杂结构的广义可靠度分析.

(3) 基于区间MCS的有限元广义可靠度分析计算结果与基于区间FORM和模糊FORM的有限元广义可靠度分析计算结果非常接近, 但是前者的计算效率很低, 建议将区间FORM和模糊FORM作为实际复杂工程结构广义可靠度分析的计算方法, 而将区间MCS方

法作为验证性方法.

(4) 不考虑失效准则模糊性的可靠性分析计算结果相对于考虑失效准则模糊性的可靠性分析计算结果保守, 而考虑失效准则的模糊性能更好地反映实际的工程需要.

参考文献

- Wang G Y, Wang W Q. Fuzzy optimum design of structures (in Chinese). *J Comput Mech*, 1984, 1: 291–300 [王光远, 王文泉. 结构模糊优化设计. 计算力学学报, 1984, 1: 291–300]
- Wang G Y, Wang W Q. Fuzzy reliability analysis of aseismic structures (in Chinese). *Acta Mech Sin*, 1986, 18: 448–455 [王光远, 王文泉. 抗震结构的模糊可靠性分析. 力学学报, 1986, 18: 448–455]
- Wang G Y, Wang W Q, Ou J P. Generalized reliability of system (in Chinese). *Syst Eng Theor Pract*, 1988, 8: 6–13 [王光远, 王文泉, 欧进萍. 系统的广义可靠度. 系统工程理论与实践, 1988, 8: 6–13]
- Wang G Y. Unascertained information and its mathematical treatment (in Chinese). *J Harbin Univ Civil Eng Architect*, 1990, 4: 1–9 [王光远. 未确知信息及其数学处理. 哈尔滨建筑大学学报, 1990, 4: 1–9]
- Wang G Y. Software Design of Engineering. Beijing: Science Press, 1992. 239–264 [王光远. 工程软件设计. 北京: 科学出版社, 1992. 239–264]
- Wang G Y, Liu Y B. Practical calculation method for fuzzy random reliability of structures (in Chinese). *Earthq Eng Eng Vibrat*, 1995, 15: 38–46 [王光远, 刘玉彬. 结构模糊随机可靠度的实用计算方法. 地震工程与工程振动, 1995, 15: 38–46]
- Zhang A L, Zhao G F, Wang G Y. Practical method for the fuzzy dynamic reliability assessment of existing structures (in Chinese). *J Basic Sci Eng*, 1998, 6: 83–90 [张爱林, 赵国藩, 王光远. 现役结构模糊动态可靠度评估实用方法. 应用基础与工程科学学报, 1998, 6: 83–90]
- Wang G Y, Zhang P. Reliability analysis for engineering systems with intermediate state (in Chinese). *China Civil Eng J*, 2001, 34: 13–17 [王光远, 张鹏. 具有中介状态的工程系统的可靠性分析. 土木工程学报, 2001, 34: 13–17]
- Liu Y B, Wang G Y. Generalized Reliability Theory of Engineering Structures. Beijing: Science Press, 2005 [刘玉彬, 王光远. 工程结构广义可靠性理论. 北京: 科学出版社, 2005]
- Cai K Y, Wen C Y, Zhang M L. Fuzzy variables as a basis for a theory of fuzzy reliability in the possibility context. *Fuzzy Sets Syst*, 1991, 42: 145–172
- Huang H Z. Research on the method of reliability analysis in the presence of fuzziness attached to the operating time (in Chinese). *Chin J Mech Eng*, 1993, 29: 1–8 [黄洪钟. 关于模糊可靠性若干基本问题的讨论——将清晰工作时间拓广到模糊工作时间. 机械工程学报, 1993, 29: 1–8]
- Guo S X, Lu Z Z. Procedure for computing the fuzzy probability of failure of mechanical structures when parameters of probabilistic models are fuzzy (in Chinese). *J Mech Strength*, 2003, 25: 527–529 [郭书详, 吕震宙. 概率模型含模糊分布参数时的模糊失效概率计算方法. 机械强度, 2003, 25: 527–529]
- Ben-Haim Y, Elishakoff I. Convex of Uncertainty in Applied Mechanics. Amsterdam: Elsevier, 1990
- Jiang C, Ni B Y, Han X, et al. Non-probabilistic convex model process: A new method of time-variant uncertainty analysis and its application to structural dynamic reliability problems. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 2014, 268: 656–676
- Bi R G. Non-probabilistic Uncertainty Convex Model and Reliability Analysis Method Incorporating Correlation (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Changsha: Hunan University, 2015 [毕仁贵. 考虑相关性的不确定凸集模型与非概率可靠性分析方法. 博士学位论文. 长沙: 湖南大学, 2015]
- Ferson S, Kreinovich V, Ginzburg L, et al. Constructing probability boxes and Dempster-Shafer structures. Reprot, Sandia National Laboratories, Sand2002-4015, 2003
- Zhang H, Mullen R L, Muhanna R L. Interval Monte Carlo methods for structural reliability. *Struct Saf*, 2010, 32: 183–190
- Qiu Z, Yang D, Elishakoff I. Probabilistic interval reliability of structural systems. *Int J Solids Struct*, 2008, 45: 2850–2860

Generalized reliability analysis of structures based on interval finite element

LV DaGang^{1,2*}, SONG Yan^{1,2} & XIN RuiJiao^{1,2}

¹ Key Laboratory of Structures Dynamic Behavior and Control of China
Ministry of Education, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, China;

² School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, China

Relative to the special structure reliability theory only considering randomness, the advanced theory is called generalized reliability which considers randomness, fuzziness and unascertainty at the same time. This theory was first proposed by Wang GuangYuan academician in 1980s. In this thesis, some research results of the team of authors are introduced. Fuzziness is considered by the fuzzy mathematics and unascertainty is reckoned with the interval mathematics. First, some basic conceptions of interval math and interval finite element are introduced. Then generalized reliability analysis methods of three kinds of uncertainty conditions are discussed with the tool of interval finite element. In the first condition, both randomness and unascertainty are considered and the parameters of the random variables are interval variables. The second condition is that randomness and fuzziness are separated. The basic variables are random and the failure criterion is fuzzy. Randomness and fuzziness are coupling in the third condition. The parameters of the random variables are fuzzy numbers to reflect fuzziness. Finally, authors propose and develop the generalized reliability analysis methods of this three cases using the interval Monte Carlo Simulation (IntMCS) and the interval First Order Reliability Method (IntFORM). By means of a plane truss example, the applicability and effectiveness of these methods are shown. After a series of research, some conclusions can be summarized. The IntFORM proposed in this thesis has enough computational accuracy and more computational efficiency than IntMCS. Therefore, this method can be used in the reliability analysis of large-scale structures.

generalized reliability, interval analysis, FORM, MCS, plane truss

PACS: 02.20.Bb, 02.50.Cw, 02.50.Ng, 02.70.Dh, 02.70.Uu

doi: [10.1360/SSPMA2017-00053](https://doi.org/10.1360/SSPMA2017-00053)