论 文

基于共形几何代数的 3D 医学图像配准

曹文明^①, 刘辉^①, 徐晨^{①*}, 冯纪强^①, 冯浩^②^① 深圳大学信息工程学院现代通信与信息处理市重点实验室, 深圳 518060^② 杭州电子科技大学自动化学院, 杭州 310018

* 通信作者. E-mail: xuchen@szu.edu.cn

收稿日期: 2012–10–16; 接受日期: 2012–11–16

国家自然科学基金 (批准号: 61070087) 和深圳市基础研究基金 (批准号: JC201105800030534011A, JC201005800305280570A) 资助项目

摘要 随着医学图像处理技术的发展, 3D/3D 配准益受重视, 尤其是在外科手术导航等医学应用中. 学者们提出了各种 3D/3D 配准方法, 但大多方法是采用传统代数方法进行配准, 配准精度和效率都存在问题. 本文利用非经典数学——共形几何代数重建了 3D 医学图像的位置关系约束问题, 分析了医学图像的共形几何变换, 构造了新的 3D 医学图像配准相似测度, 基于此提出了新的 3D 医学图像配准算法, 用于 CT 和 MR 图像的 3D 配准. 新算法中, 以骨骼轮廓作为配准的基础点集, 在骨骼轮廓的基础上采用共形几何代数构造共形几何体, 接着采用新的 3D 医学图像配准相似测度进行三维数据的直接配准. 实验表明新算法实现了三维数据的直接对齐, 能较好地定位组织器官的三维位置, 可以直观地体现配准结果.

关键词 共形几何代数 共形几何体 医学图像 配准 相似测度

1 引言

从数据维度上, 医学图像的配准可以分为 2D/2D, 2D/3D 和 3D/3D 三种. 3D/3D 配准, 配准数据为立体数据, 几何变换类型更多、更复杂, 其优化寻参数难度增加, 更容易陷入局部最优, 而且整个配准过程的空间复杂度和时间复杂度要远高于 2D/2D 配准. 在神经外科手术导航等医学应用中, 医学图像处理技术非常关键, 但也面临着很多问题, 尤其在 3D/3D 型配准方面. 从相关文献中, 可以发现很多解决问题的方法值得我们学习借鉴. 如 2001 年, Hsu 等^[1]首次提出了一种基于分层特征提取的全自动多模态医学图像 3D 配准方法. 李文龙等^[2]用非均匀化 B 样条变形体代替一般三次 B 样条变形体来描述成像组织的非线性运动, 提出了基于自由形变的 3D 非线性医学图像配准. Harmouche 等^[3]通过计算椎间变形, 建立了一种铰链模型用于脊柱的 MR 和 X 光的三维配准. Sharman 等^[4]提出了一种基于小波变换的自动配准刚体图像方法使用小波变换获得多模图像特征点然后进行图像配准. Babaie-Zadeh 等^[5]用基于最大互信息和梯度信息的方法对非刚性图像进行配准, 提高了配准的准确性等. 在神经外科手术中, 一旦病人进入手术室, 就需要将病人的头部和 3D 头部模型配准, 一般通过在病人头部使用一些基准点 (标识) 作为参照点进行配准. 在手术中头部打开时, 头部液体流失会引起头部内部结构的非线性形变, 使得配准更加复杂. 一般的配准方法大多是假设是已知配准点之间的

引用格式: 曹文明, 刘辉, 徐晨, 等. 基于共形几何代数的 3D 医学图像配准. 中国科学: 信息科学, 2013, 43: 254–274, doi: 10.1360/112012-592

对应关系来分析如何变形,或是已经知道如何变形,仅仅需要获取配准点的对应关系. Chui 等^[6]提出了一种健壮的点配准方法,用于 2D-3D 之间的点集对应和形变,但难以描述配准的几何体位置. 本文针对存在的问题提出了一种新的 3D 图像配准算法,根据参照图和活动图中关键像素构造的多个几何体之间的位置约束关系,在共形几何代数 (conformal geometric algebra, CGA) 框架下,用 5-D 空间的 ICP 算法进行配准.

结构具体安排如下: 第 2 节阐述了几何代数的基本定义,介绍了不同几何代数空间的几何体的表示,尤其是用于配准的 CGA 的点、线、面的表示. 第 3 节首先分析了医学图像在 CGA 中的几种典型的共形位置关系及其约束问题,在此基础上构造了基于共形约束的新的配准相似测度,接着分析了 CGA 中的医学图像几何变换问题,并提出了 3 种 3D 医学图像配准算法. 最后通过医学图像配准实验与分析验证了新算法实现了 3D 医学图像的直接对齐.

2 3D/3D 配准图像共形位置

设 $e_1, \dots, e_{p+q}$ 是向量空间 V 的一组正交基,关于 $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$ 规范正交,即 $Q(e_i) = \pm 1$ 或 0,而且当 $i \neq j$ 时 $Q(e_i e_j) = 0$. 在反对称张量空间 $\Lambda(V)$, 记为 $G^{p,q}$

定义 1 Clifford 积:

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} Q(e_i e_j), & i = j, \\ e_i \wedge e_j, & i \neq j. \end{cases} \quad (1)$$

基矢量 e_j 和多重矢量 $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ 的积如下

$$e_j \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m} = \begin{cases} (-1)^{k-1} Q(e_j e_{i_k}) e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_m}, & j = i_k, \\ e_j \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}, & j \neq i_k, k = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (2)$$

定义 2 假设 $E_l = e_{i+1} \wedge e_{i+2} \wedge \dots \wedge e_{i+r} \in \langle G^{p,q} \rangle_r$, $E_m = e_{j+1} \wedge e_{j+2} \wedge \dots \wedge e_{j+s} \in \langle G^{p,q} \rangle_s$, 那么 E_l, E_m 的内积 $(\cdot)$ 定义如下:

$$\begin{aligned} E_l \cdot E_m &= (e_{i+1} \wedge e_{i+2} \wedge \dots \wedge e_{i+r}) \cdot (e_{j+1} \wedge e_{j+2} \wedge \dots \wedge e_{j+s}) \\ &= \begin{cases} ((e_{i+1} \wedge e_{i+2} \wedge \dots \wedge e_{i+r}) \cdot e_{j+1}) \cdot (e_{j+2} \wedge \dots \wedge e_{j+s}), & r \geq s, \\ (e_{i+1} \wedge e_{i+2} \wedge \dots \wedge e_{i+r-1}) \cdot (e_{i+r} \cdot (e_{j+1} \wedge e_{j+2} \wedge \dots \wedge e_{j+s})), & r < s, \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$(e_{i+1} \wedge e_{i+2} \wedge \dots \wedge e_{i+r}) \cdot e_{j+1} = \sum_{k=1}^r (-1)^{r-k} e_{i+1} \wedge \dots \wedge e_{i+k-1} \wedge (e_{i+k} \cdot e_{j+1}) \wedge e_{i+k} \wedge \dots \wedge e_{i+r}, \quad (4)$$

$$e_{i+r} \cdot (e_{j+1} \wedge e_{j+2} \wedge \dots \wedge e_{j+s}) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k-1} e_{j+1} \wedge \dots \wedge e_{k-1} \wedge (e_{i+r} \cdot e_k) \wedge e_{k+1} \wedge \dots \wedge e_{j+s} \quad (5)$$

和 G^n 情形类似, $G^{p,q}$ 中任意两片积 A 和 B (阶分别为 r 和 s) 的内积和外积可以分别写为如下形式^[7]:

$$A \cdot B = \begin{cases} \langle AB \rangle_{|r-s|}, & r \neq 0 \text{ 且 } s \neq 0, \\ 0, & r = 0 \text{ 或 } s = 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$A \wedge B = \begin{cases} \langle AB \rangle_{r+s}, & r+s \leq p+q, \\ 0, & r+s > p+q. \end{cases} \quad (7)$$

$G^{p,q}$ 中最高阶片积为 $p+q=n$, 该片积称为伪标量. 为了方便后文的叙述, 现在约定一些表示符号. 在本文中主要涉及的几何体, 有点、线、面、球, 考虑 EGA 空间 G^3 (欧氏空间)、PGA 空间 $G^{3,1}$ (射影空间) 和 CGA 空间 $G^{4,1}$ (共形空间), 约定以下空间几何体记号, G^3 中的点、线、面分别用小写字母 x, l 和 p 表示, $G^{3,1}$ 中用 X_P, L_P, P_P 表示点、线、面, $G^{4,1}$ 中则用 X, L, P 分别表示, 并且用 C, S, PP 表示环、球和点对, 不同的几何体用数字下标区分, 三空间的伪标量分别用 I_E, I_P, I_C 表示.

定义 3 假设有 $G^{p,q}$ 中任意两片积 A 和 B , 那么 A 和 B 几何积可以写为如下形式:

$$AB = \frac{1}{2}(AB + BA) + \frac{1}{2}(AB - BA). \quad (8)$$

我们定义 A 和 B 的交换算子 $\bar{\times}$ 运算和反交换算子 $\underline{\times}$ 运算分别为

$$A\bar{\times}B = \frac{1}{2}(AB + BA), \quad (9)$$

$$A\underline{\times}B = \frac{1}{2}(AB - BA). \quad (10)$$

2.1 EGA 中点线面的表示

假设有一个欧氏空间 $\mathbb{R}^3$, 其一组规范正交基为 $\{e_1, e_2, e_3\}$, 其导出的几何代数空间为 G^3 , G^3 的一组规范基为 $\{1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{23}, e_{31}, e_{123} = I_E\}$.

$\mathbb{R}^3$ 中一个点 x 的位置信息在 G^3 中用 3 个基矢量的线性组合表示:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3. \quad (11)$$

式 (11) 中 $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

直线 l 表示为 1- 矢量 r 和 2- 矢量 m 的组合

$$l = r + m. \quad (12)$$

式 (12) 中 r 表示直线方向, $m = x \wedge r$ 表示矩, 为 l 上的一点 x 和其方向 r 的外积. 当 $x \in l$ 时, 可以用 $y \wedge r - m = 0$ 来表示.

平面 p 表示为原点到平面的单位 2- 矢量 n 和伪标量 I_E 的组合

$$p = n + I_E d. \quad (13)$$

式 (13) 中 d 表示从原点到平面的 Hesse 距离. 当 $x \in p$ 时, 可以用 $x \wedge p - I_E d = 0$ 来表示.

2.2 PGA 中点线面的表示

通过使用齐次坐标, 可以提升矢量空间的维度, 将 $\mathbb{R}^3$ 嵌入到 $\mathbb{R}^{3,1}$ 或 $\mathbb{R}^4$ 中. 我们选择 $\mathbb{R}^{3,1}$, 额外增加的基矢量为 e_- , 表示齐次分量, $e_-^2 = -1$. 那么 $\mathbb{R}^{3,1}$ 导出的 $G^{3,1}$ 的一组规范基为 $\{1, e_1, e_2, e_3, e_-, e_{12}, e_{23}, e_{31}, e_{-1}, e_{-2}, e_{-3}, e_{123}, e_{-12}, e_{-23}, e_{-31}, e_{-123} = I_P\}$, $G^{3,1}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的投影几何代数, 即 PGA. 值得注意的是 $I_P^2 = -1$.

G^3 中的点 x 加上齐次分量 e_- 即可表示 $G^{3,1}$ 空间的点 X_P , 即

$$X_P = x + e_-. \quad (14)$$

$G^{3,1}$ 空间的直线 L_P 用两个不同点的外积表示, 即

$$L_P = X_1 \wedge X_2 = (x_1 + e_-) \wedge (x_2 + e_-) = x_1 \wedge x_2 + (x_1 - x_2) \wedge e_-. \quad (15)$$

令式 (15) 中 $x_1 - x_2 = r$ 表示方向, $x_1 \wedge x_2 = m$ 表示矩, 那么

$$L_P = m + re_-. \quad (16)$$

$G^{3,1}$ 空间的面用三个不同点的外积表示, 即

$$P_P = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 = (x_1 + e_-) \wedge (x_2 + e_-) \wedge (x_3 + e_-) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 + (x_1 - x_2) \wedge (x_1 - x_3) \wedge e_-. \quad (17)$$

式 (17) 中 $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 = I_E d$ 表示方向, $(x_1 - x_2) \wedge (x_1 - x_3) = n$ 表示矩, 那么

$$P_P = I_E d + ne_-. \quad (18)$$

式 (18) 将平面 P_P 形式化为平面上的法向 2- 矢量和平面到原点的 Hesse 距离 d .

在 $G^{3,1}$ 空间, 如果一个点 X_P 在一条直线 L_P 上, 只需要满足 $X_P \wedge L_P = 0$ 即可.

2.3 CGA 中几何体的表示

李洪波^[8]从 Minkowski 空间 $\mathbb{R}^{1,1}$ 上的几何代数开始, 介绍了如何将欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 扩展到 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 空间, 提出了 CGA 的概念和基本性质.

假设 Minkowski 空间 $\mathbb{R}^{1,1}$ 的一组正交基为 $\{e_+, e_-\}$, 这组正交基满足

$$\begin{cases} e_+^2 = 1; \\ e_-^2 = -1; \\ e_+ e_- = 0. \end{cases} \quad (19)$$

可以通过 e_+, e_- 引入两个 null 基 e_o 和 e_∞ 的定义

$$\begin{cases} e_o := \frac{1}{2}(e_- - e_+); \\ e_\infty := e_- + e_+. \end{cases} \quad (20)$$

很显然, null 基 e_o 和 e_∞ 满足以下性质

$$\begin{cases} e_o^2 = e_\infty^2 = 0; \\ e_o \cdot e_\infty = -1. \end{cases} \quad (21)$$

在 Minkowski 空间 $\mathbb{R}^{1,1}$ 张成的几何代数空间 $G^{1,1}$ 上可定义单位伪标量 I_M 为

$$I_M = e_+ \wedge e_- = e_+ e_- = e_\infty \wedge e_o, \quad (22)$$

I_M 也被称为 Minkowski 平面, 具有以下性质

$$\begin{aligned} I_M^2 &= 1; & I_M e_\infty &= -e_\infty; & I_M e_o &= e_o; & e_+ I_M &= e_-; & e_- I_M &= e_+; \\ 1 - I_M &= -e_\infty e_o; & 1 + I_M &= -e_o e_\infty; & \tilde{I}_M &= -I_M. \end{aligned} \quad (23)$$

通过 $\mathbb{R}^{n+1,1} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{1,1}$ 这种直和形式, 我们将 $\mathbb{R}^n$ 嵌入到 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 中, 那么 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 的一组规范正交基为 $\{e_1, \dots, e_n, e_+, e_-\}$, 基满足

表 1 $G^{4,1}$ 的一组规范基Table 1 Canonical algebra basis of the CGA $G^{4,1}$

0-vector(scalar)	1
1-vector	e_1, e_2, e_3, e_+, e_-
2-vector	$e_{12}, e_{13}, e_{1+}, e_{1-}, e_{23}, e_{2+}, e_{2-}, e_{3+}, e_{3-}, e_{+-}$
3-vector	$e_{123}, e_{12+}, e_{12-}, e_{13+}, e_{13-}, e_{1+-}, e_{23+}, e_{23-}, e_{2+-}, e_{3+-}$
4-vector	$e_{123+}, e_{123-}, e_{12+-}, e_{13+-}, e_{23+-}$
5-vector(pseudoscalar)	$e_{123+-} = I_C = I_E I_M$

$$\begin{cases} e_i^2 = 1, & i = 1, \dots, n; \\ e_{\pm}^2 = \pm 1; \\ e_i \cdot e_+ = e_i \cdot e_- = e_+ \cdot e_- = 0, & i = 1, \dots, n; \end{cases} \quad (24)$$

$\mathbb{R}^{n+1,1}$ 导出的几何代数空间 $G^{n+1,1}$, 即为 $\mathbb{R}^n$ 的共形几何代数 (CGA) 空间, 同 $\mathbb{R}^{1,1}$ 空间情形一样, 在 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 空间也可以通过 e_+, e_- 引入两个 null 基 e_o 和 e_∞ , 在物理意义上, e_o 表示 $\mathbb{R}^n$ 空间的原点, 而 e_∞ 则表示 $\mathbb{R}^n$ 空间的无穷远点.

在共形几何代数 $G^{4,1}$ 中研究几何体, 意味着用具有特殊意义的两个基 e_+ 和 e_- 将欧氏空间嵌入到更高维空间 (与 PGA 原理一样); 通过这种嵌入高维空间的方式, 我们用共形空间的子空间来表示欧氏空间的特定几何体.

$\mathbb{R}^{4,1}$ 空间的一组基为 $\{e_1, e_2, e_3, e_+, e_-\}$, 其导出的 $G^{4,1}$ 空间具有 $2^5 = 32$ 个基如表 1 所示.

$G^{4,1}$ 空间的点 $\mathbf{X}$ 表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_o. \quad (25)$$

式 (25) 的具体推导过程可以查阅参考文献 [13]. 例如 $\mathbb{R}^3$ 空间的一点 $(3, -1, 4)$ 在 $G^{4,1}$ 中表示为 $\mathbf{X} = 3e_1 - e_2 + 4e_3 + \frac{\sqrt{26}}{2}e_\infty + e_o$.

CGA 中的最基本的几何体是球, 其他几何体都可以从其导出. 中心为 $\mathbf{o}$, 半径为 r 的球表示为

$$\mathbf{S} = \mathbf{o} + \frac{1}{2}(\mathbf{o}^2 - r^2)e_\infty + e_o. \quad (26)$$

实际上, 我们可以把共形点 $\mathbf{X}$ 看做半径 $r = 0$ 的球. 其他如环 $\mathbf{C}$ 和点对 $\mathbf{PP}$ 等实体也能从球导出, 如表 2 所示.

为了得到球的中心和半径, 我们可以用以下公式

$$\mathbf{o} = (\mathbf{S} \wedge \mathbf{I}_M) \cdot \mathbf{I}_M, \quad (27)$$

$$r = \sqrt{-\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}}. \quad (28)$$

对任意放大比例的球 $\mathbf{S}$, 我们用以下公式

$$r = \sqrt{-\left(\frac{\mathbf{S}}{-\mathbf{S} \cdot e_\infty}\right)^2}. \quad (29)$$

假设是 CGA 中的两个球 $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$, 那么两者的内积

表 2 CGA 中常用几何体表达形式

Table 2 Geometric entities representation in CGA

Entity	CGA expression (IPNS)	Grade No.	Dual expression (OPNS)	Grade No.
Sphere	$S = o + \frac{1}{2}(o^2 - r^2)e_\infty + e_o$	1	$S^* = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4$	4
Point	$X = x + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_o$	1	$X^* = (-I_M x - \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_o)$	4
Plane	$P = nI_E - de_\infty$ $n = (a - b) \wedge (a - c)$ $d = (a \wedge b \wedge c)I_E$	1	$P^* = e_\infty \wedge X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$	4
Line	$L = rI_E + e_\infty mI_E$ $r = a - b$ $m = a \wedge b$	2	$L^* = e_\infty \wedge X_1 \wedge X_2$	3
Circle	$C = S_1 \wedge S_2$	2	$C^* = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$	3
Point pair	$PP = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$	3	$PP^* = X_1 \wedge X_2, X^* = e_\infty \wedge X$	2

$$\begin{aligned}
S_1 \cdot S_2 &= \left(o_1 + \frac{1}{2}(o_1^2 - r_1^2)e_\infty + e_o\right) \cdot \left(o_2 + \frac{1}{2}(o_2^2 - r_2^2)e_\infty + e_o\right) \\
&= o_1 \cdot o_2 - \frac{1}{2}o_1^2 - \frac{1}{2}o_2^2 + \frac{1}{2}r_1^2 + \frac{1}{2}r_2^2 \\
&= -\frac{1}{2}(o_1^2 - o_2^2) + \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2).
\end{aligned} \quad (30)$$

如果两者相减得到

$$S_1 - S_2 = (o_1 - o_2) + \frac{1}{2}(o_1^2 - o_2^2 - r_1^2 + r_2^2)e_\infty + e_o. \quad (31)$$

对上式平方可以得到

$$(S_1 - S_2)^2 = (o_1 - o_2)^2. \quad (32)$$

那么, 如果想得到对应于欧氏空间的两球中心矢量的欧氏距离度量, 可以用式 (31) 或从式 (30) 推出

$$(o_1 - o_2)^2 = -2S_1 \cdot S_2 + r_1^2 + r_2^2. \quad (33)$$

表 2 是 CGA 中常用几何体的表达形式 (内积 null 空间) 及其对偶表达形式 (外积 null 空间)^[9].

2.4 PGA 中几何体与 e_∞ 的外积

在 GA 中, 外积是一种升维运算, 而内积是一种降维运算. 从前面的 EGA, PGA 和 CGA 的定义中可以看到, 他们分别对应于 $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{3,1}, \mathbb{R}^{4,1}, \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^{3,1} \subseteq \mathbb{R}^{4,1}$, 对于几何体而言, 也可以看作 $G^3 \subseteq G^{3,1} \subseteq G^{4,1}$, 需要注意的是不同的 GA 中, 表示几何体的能力不同.

命题 1 假设 e_∞ 为 $G^{4,1}$ 的 null 基, $G^{4,1}$ 中的点、线、面分别为 X, L, P , $G^{3,1}$ 的点、线、面分别为 X_M, L_M, P_M , 那么 e_∞ 和 X_M, L_M, P_M 的外积可以得到 X, L, P .

证明 因为 $e_\infty \wedge e_- = (e_+ + e_-) \wedge e_- = I_M$, 所以有

$$e_\infty \wedge X_M = e_\infty \wedge (X + e_-) = e_\infty \wedge X + e_\infty \wedge e_- = e_\infty X + I_M = X^* \in G^{4,1}, \quad (34)$$

$$e_{\infty} \wedge L_M = e_{\infty} \wedge (e_- r + m) = e_{\infty} \wedge m + e_{\infty} \wedge (e_- r) = e_{\infty} m + I_M r = L^* \in G^{4,1}, \quad (35)$$

$$e_{\infty} \wedge P_M = e_{\infty} \wedge (e_- n + dI_E) = e_{\infty} \wedge (e_- n) + e_{\infty} \wedge dI_E = I_M X + e_{\infty} dI_E = P^* \in G^{4,1}. \quad (36)$$

证毕.

3 医学图像的共形位置约束

在实际医学影像使用环境中, 通常为了需要, 将人体组织按三维方向生成序列医学图像, 这些不同的序列图实际就是人体组织的切片图, 重建可以生成与人体组织基本一致的三维图.

假设医学图像序列共有 n 幅, 分别表示为 $\{M_i(x, y), i = 1, 2, \dots, n\}$, 按三维方向可以重建为 $M = \{M(x, y, z)\}$, 三维空间的任意像素可以表示为 $p(x, y, z)$, 这里的 x, y, z 表示欧氏三维空间的 3 个方向的坐标, i 表示图像序列号.

考虑 M 所在的欧氏空间 $\mathbb{R}^3$, 利用正交基、null 基和几何积我们可以得到 3 种几何代数空间 $G^3, G^{3,1}$ 和 $G^{4,1}$, G^3 可以直接对应于欧氏空间 $\mathbb{R}^3$, $G^{3,1}$ 和 $G^{4,1}$ 分别对应于投影空间和共形空间. 假设 $\mathbb{R}^3$ 的一组规范正交基为 $\{e_1, e_2, e_3\}$, 从前面我们知道 G^3 由 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 导出, $G^{3,1}$ 由 $\{e_1, e_2, e_3, e_-\}$ 张成, 而 $G^{4,1}$ 由 $\{e_1, e_2, e_3, e_-, e_+\}$ 导出.

假设两幅图像 (三维体数据) M 和 N , N 为参照图像, M 为活动图像, 我们对 M 进行不断的几何变换来使两者配准, 正如前面定义, 配准主要考虑的是关键点的对齐问题, 那么在几何变换过程中, N 中的每个关键像素点和 M 的关键点位置关系不断变动, 如果我们将 N, M 中的关键像素点构造成不同的几何体, 那么配准过程过程转换成 N 和 M 中的几何体的位置关系的一种约束问题. 在 CGA 中, N 和 M 的几何体包括点 X 、线 L 、面 P 、环 C 、点对 PP 和球 S , 那么 N 和 M 中任意两种几何体之间都存在位置约束问题, 文献 [9,10] 中在预测机器人姿态时利用了 CGA 中几何体的位置关系进行约束, 我们在其基础上进行扩展用于 3D 医学图像配准.

3.1 医学图像的位置关系

下面我们仅考虑点点、点线、点面、线面位置约束问题.

3.1.1 $X-X$ 型约束

假设是 CGA 中的两个球 S_1, S_2 , 那么两者的内积 $S_1 \cdot S_2 = -\frac{1}{2}(\mathbf{o}_1^2 - \mathbf{o}_2^2) + \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2)$, 当两球退化为两个点时, $X_1 \cdot X_2 = -\frac{1}{2}(\mathbf{o}_1^2 - \mathbf{o}_2^2)$. 对于医学图像活动图和参照图来说, 当分属两图的两个像素点配准时, $X_1 \cdot X_2 = 0$, 否则 $\|X_1 \cdot X_2\| = \|\frac{1}{2}(\mathbf{o}_1^2 - \mathbf{o}_2^2)\|$, 这和欧式空间的距离度量是对应的.

3.1.2 $X-L$ 型约束

我们考虑参照图和活动图共同所在的 $G^{4,1}$ 空间, 设活动图上一关键像素点 $X = I_M + e_{\infty} x$, 参照图上的关键像素构成的线 $L = I_M r + e_{\infty} m$, 假设两图配准后, 点 X 应该在线 L 上, 那么有 $X \underline{\times} L = 0$.

将 $X \underline{\times} L = 0$ 左边部分用几何积表示并展开有

$$\begin{aligned} X \underline{\times} L &= \frac{1}{2}(XL - LX) = \frac{1}{2}[(I_M + e_{\infty} X)(I_M r + e_{\infty} m) - (I_M r + e_{\infty} m)(I_M + e_{\infty} X)] \\ &= \frac{1}{2}(I_M^2 r + I_M e_{\infty} m + e_{\infty} x I_M r - e_{\infty}^2 x m - I_M^2 r - I_M r e_{\infty} X - e_{\infty} m I_M - e_{\infty}^2 m x). \end{aligned}$$

图 1 X - L 型位置关系

Figure 1 X - L positional relationship. The Euclidean line l' consists of the direction r' and the moment $m' = v \times r'$. Further, there exists a decomposition $x = x_1 + x_2$ with $x_1 \in l'$ and $x_2 \perp r'$ so that $m' = v \times r' = x_1 \times r'$

将 $I_M^2 = 1$, $e_\infty^2 = 0$ 和 $I_M e_\infty = -e_\infty$ 代入上式, 则得到

$$\begin{aligned} X \times L &= \frac{1}{2} (I_M e_\infty m + e_\infty x I_M r - I_M r e_\infty X - e_\infty m I_M) \\ &= \frac{1}{2} (-e_\infty m - e_\infty x r + e_\infty r x - e_\infty m) = \frac{1}{2} (-2m + x r - r x) e_\infty \\ &= (-m + \frac{1}{2} (x r - r x)) e_\infty = -(m - r \times x) e_\infty. \end{aligned}$$

即有 $(m - r \times x) e_\infty = 0$, 两边同时点乘 e_+ , 即有

$$m - r \times x = 0. \quad (37)$$

$X \times L = -(m - r \times x) e_\infty$ 表明其是 null 空间的元素, 和 e_+ 内积后得到 $m - r \times x$, 这实际上是 G^3 空间的二重矢量. 注意到式 (37) 所表示的位置约束关系式缺少比例因子, 并不能体现欧氏空间距离度量, 我们加入一个比例因子 $\lambda = \frac{1}{\|r\|}$, 使方程与直线 L 方向范数的倒数成比例, 那么有

$$\lambda(m - r \times x) = \lambda m - (\lambda r) \times x = m' - r' \times x = 0. \quad (38)$$

现在考虑这样的情形, 假设两图并没有配准, 活动图上这一点 X 并不在参照图的 L 上, 那么必然存在一个分解 $x = x_1 + x_2$, 使得 $X_1 = (I_M + e_\infty x_1) \in L'$ 和 $X_2 = (I_M + e_\infty x_2) \perp L'$ (见图 1). 这样 $m' - r' \times x$ 转换 $m' - r' \times (x_1 + x_2)$, 那么

$$\|m' - r' \times x\| = \|m' - r' \times (x_1 + x_2)\| = \|r' \times x_2\|. \quad (39)$$

考虑到 $r' = x - y = (x_1 + x_2) - y$, 那么上式即为

$$\|m' - r' \times x\| = \|(x_2)^2\|. \quad (40)$$

式 (40) 意味着, 当两图没有配准时, 活动图的点 X 和参照图的直线 L' 存在一个距离误差, 与欧氏空间的 Hesse 距离度量是对应的.

3.1.3 X - P 型约束

同上面一样我们考虑参照图和活动图共同所在的 $G^{4,1}$ 空间, 设活动图上一关键像素点 $X = I_M + e_\infty x$, 参照图上的关键像素构成的面 $P = I_M n + e_\infty d I_E$, 假设两图配准后, 点 X 应该在线 P 上, 那么有 $X \times P = 0$.

图 2 X - P 型位置关系

Figure 2 X - P positional relationship. The Euclidean plane p' is represented by the normal n' (as bivector) and the Hesse distance d' . The value d' can be interpreted as a sum $d' = d'_1 + d'_2$ so that $d'_1 n'$ corresponds to the orthogonal projection of x onto n'

将 $X \underline{\times} P = 0$ 左边部分用几何积表示并展开有

$$\begin{aligned} X \underline{\times} P = 0 &= \frac{1}{2} (XP - PX) = \frac{1}{2} [(I_M + e_\infty X)(I_M n + e_\infty dI_E) - (I_M n + e_\infty dI_E)(I_M + e_\infty X)] \\ &= \frac{1}{2} (I_M^2 n + I_M e_\infty dI_E + e_\infty x I_M n + e_\infty^2 x dI_E - I_M n I_M - I_M n e_\infty X \\ &\quad - e_\infty dI_E I_M - e_\infty dI_E e_\infty X). \end{aligned}$$

将 $I_M^2 = 1$, $e_\infty^2 = 0$ 和 $I_M e_\infty = -e_\infty$ 代入上式得

$$X \underline{\times} P = \frac{1}{2} (dI_E e_\infty - x n e_\infty - n x e_\infty + dI_E e_\infty) = \frac{1}{2} (2dI_E - x n - n x) e_\infty = (dI_E - x \bar{\times} n) e_\infty.$$

即有 $(dI_E - x \bar{\times} n) e_\infty = 0$, 两边同时点乘 e_+ , 即有

$$dI_E - x \bar{\times} n = 0. \quad (41)$$

$X \underline{\times} P = (dI_E - x \bar{\times} n) e_\infty$ 是 null 空间的元素, 和 e_+ 内积后得到 $dI_E - x \bar{\times} n$, 注意到这实际上是 G^3 空间的三重矢量, 上述过程相当于把 null 空间的约束关系转换到非 null 空间. 同样式 (41) 所表示的位置约束关系式缺少比例因子, 并不能体现欧氏空间距离度量, 我们加入一个比例因子 $\lambda = \frac{1}{\|n\|}$, 使方程与 2- 矢量 n 的范数的倒数成比例, 那么有

$$\lambda(dI_E - x \bar{\times} n) = \lambda dI_E - x \bar{\times} (\lambda n) = d'I_E - x \bar{\times} n' = 0. \quad (42)$$

假设两图并没有配准, 活动图上这一点 X 并不在参照图的 P' 上, 那么必然存在一个分解 $d' = d'_1 + d'_2$, $d'_1 n'$ 为 x 在 n' 上的正交投影, 使得 $d'_1 I_E - x \bar{\times} n' = 0$ (见图 2), 那么有

$$\|d'I_E - x \bar{\times} n' = 0\| = \|(d'_1 + d'_2)I_E - x \bar{\times} n'\| = \|d'_2 I_E\|. \quad (43)$$

式 (43) 意味着, 当两图没有配准时, 活动图的点 X 和参照图的平面 P' 存在一个距离误差, 这也表明 $d'_1 I_E - x \bar{\times} n'$ 与欧氏空间的点到平面的 Hesse 距离是对应的.

3.1.4 L - P 型约束

同样我们考虑参照图和活动图共同所在的 $G^{4,1}$ 空间, 设活动图上关键像素点构成的线 $L = I_M r + e_\infty m$, 参照图上的关键像素构成的面 $P = I_M n + e_\infty d I_E$, 假设两图配准后, 线 L 应该在面 P 上, 那么有 $L \bar{\times} P = 0$.

将 $L \bar{\times} P = 0$ 左边部分用几何积表示并展开有

$$\begin{aligned} L \bar{\times} P &= \frac{1}{2}(LP + PL) = \frac{1}{2}[(I_M r + e_\infty m)(I_M n + e_\infty d I_E) + (I_M n + e_\infty d I_E)(I_M r + e_\infty m)] \\ &= \frac{1}{2}(I_M^2 r n + I_M r e_\infty d I_E + e_\infty m I_M n + e_\infty^2 m d I_E + I_M^2 n r + I_M n e_\infty m \\ &\quad + e_\infty d I_E I_M r + e_\infty d I_E e_\infty m) \\ &= \frac{1}{2}(r n + I_M r e_\infty d I_E + e_\infty m I_M n + n r + I_M n e_\infty m + e_\infty d I_E I_M r) \\ &= \frac{1}{2}(r n + e_\infty r d I_E + e_\infty m n + n r - e_\infty n m - e_\infty d I_E r) \\ &= \frac{1}{2}(r n + n r) + \frac{1}{2}(2 r I_E d + m n - n m) e_\infty \\ &= (r \bar{\times} n) + (r I_E d + m \underline{\times} n) e_\infty. \end{aligned}$$

注意到 $(r \bar{\times} n) + (r I_E d + m \underline{\times} n) e_\infty$ 实际上是一个“马达”算子, 由两部分组成, $r \bar{\times} n$ 不属于 null 空间, 意味着某种旋转变换, $(r I_E d + m \underline{\times} n) e_\infty$ 属于 null 空间, 意味着某种平移变换. $L \bar{\times} P = 0$ 即 $(r \bar{\times} n) + (r I_E d + m \underline{\times} n) e_\infty$, 同前面一样, 我们需要乘以一个比例因子 λ 来和欧式空间对应, 令 $\lambda = \frac{1}{\|n\| \|r\|}$, 那么

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|n\| \|r\|} [(r \bar{\times} n) + (r I_E d + m \underline{\times} n) e_\infty] \\ &= \left(\frac{1}{\|r\|} r \right) \bar{\times} \left(\frac{1}{\|n\|} n \right) + \left[\left(\frac{1}{\|r\|} r \right) I_E \left(\frac{1}{\|n\|} d \right) + \left(\frac{1}{\|r\|} m \right) \underline{\times} \left(\frac{1}{\|n\|} n \right) \right] e_\infty = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

令 $r' = \frac{1}{\|r\|} r$, $n' = \frac{1}{\|n\|} n$, $m' = \frac{1}{\|r\|} m$, $d' = \frac{1}{\|n\|} d$, 那么式 (44) 可写为

$$r' \bar{\times} n' + (r' I_E d' + m' \underline{\times} n') e_\infty = 0. \quad (45)$$

假设两图没有配准, $L' \notin P'$, 如果 $r' \perp n'^*$, 那么 $r' \bar{\times} n' = 0$, 否则

$$r' \bar{\times} n' = \|r'\| \|n'\| \cos(\alpha) = \cos(\alpha). \quad (46)$$

式 (46) 中 α 表示 L' 和 P' 之间的夹角 (图 3).

在 l' 上我们选择矢量 s 满足 $s \perp r'$, 那么直线 $L' = I_M r' + e_\infty m'$ 中的 $m' = s \underline{\times} r'$, 我们可以采用以下方式来计算 $m' \underline{\times} n'$,

$$m' \underline{\times} n' = (s \underline{\times} r') \underline{\times} n' = s \bar{\times} (r' \bar{\times} n') - (s \bar{\times} n') \bar{\times} r'. \quad (47)$$

假设 s 与 n'^* 的夹角为 β , 那么 $m' \underline{\times} n' = \cos(\alpha) s - \|s\| \cos(\beta) r'$.

在欧氏空间我们可以在矢量 S 方向上 (不一定在矢量 s 所在的直线上) 找到一点 S_1 , 使得 $d' = (\|s\| + \|s_1\|) \cos(\beta)$. 那么

图 3 L - P 型位置关系

Figure 3 L - P positional relationship. The Euclidean plane p' is represented by the normal n' (as bivector) and the Hesse distance d' . Furthermore, we choose $s \in l'$ with $s \perp r'$. The angle of r' and n'^* is α and the angle of s and n'^* is β . We choose the vector s_1 with $s_1 \parallel s$ so that dn'^* is the orthogonal projection of $s + s_1$ onto n'^*

$$\begin{aligned} r' I_E d' + m' \underline{\times} n' &= r' I_E ((\|s\| + \|s_1\|) \cos(\beta)) + \cos(\alpha) s - \|s\| \cos(\beta) r' \\ &= \|s_1\| \cos(\beta) r' + \cos(\alpha) s. \end{aligned} \quad (48)$$

式 (48) 说明 $r' I_E d' + m' \underline{\times} n'$ 是矢量 s 和方向矢量 r' 的线性组合, s 的系数是角度 α 的余弦、 r' 的系数是角度 β 的余弦和 s_1 的范数的乘积.

当 $r' \perp n'^*$ 时, 那么 $n'^* \parallel s$, 因此

$$\begin{aligned} \|r' I_E d' + m' \underline{\times} n'\| &= \|r' I_E d' + s \bar{\times} (r' \bar{\times} n') - (s \bar{\times} n') \bar{\times} r'\| \\ &= \|d' I_E \bar{\times} r' - (s \bar{\times} n') \bar{\times} r'\| = \|d' I_E - (s \bar{\times} n')\|. \end{aligned} \quad (49)$$

式 (49) 说明 $\|r' I_E d' + m' \underline{\times} n'\|$ 与点面位置约束是一致的, 对应于直线到平面的 Hesse 距离. 需要注意的是式 (49) 中的矢量 s 与矢量空间的原点选择有关, 这点不是我们所期望的, 但当 n'^* 和 s 直接非常接近平行时, 线面位置约束可以等同于点面约束.

从以上分析, 说明当活动图与参照图没有配准时, 可能有两种情况, 活动图的直线 L' 平行于平面 P' 时, 那么 L - P 约束等同于 X - P 约束; 当直线 L' 和平面 P' 相交时, 直线 L' 选择合适的角度 α 旋转将与 P' 平行 (存在一个 $r' \bar{\times} n'$ 旋转), 此后的约束情况也等同于 X - P 约束, 旋转中心不同可能会影响 X - P 约束关系.

3.2 基于共形约束的三维医学图像配准

3.2.1 纹理信息获取

为了获取纹理信息, 本文采取用一套 k -覆盖掩码矩阵 (图 4), 每种能量覆盖掩码矩阵都给出像素点的一个值^[11].

我们的目的是建立图像中每个像素点的一个纹理矢量, 因此取像素点每种覆盖结果的绝对值, 根据值大于零或等于零, 分别用 1 或 0 修正纹理矢量. 用纹理矢量的第 $k+1$ 维值来识别像素是属于背

-1	-4	-6	-4	-1
-2	-4	-12	-8	-2
0	0	0	0	0
2	8	12	8	2
1	4	6	4	1

1	-4	6	-4	1
-4	-16	-24	-16	-4
0	0	0	0	0
-4	-16	-24	-16	-4
1	-4	6	-4	1

-1	-4	-6	-4	-1
0	0	0	0	0
2	8	12	12	8
0	0	0	0	0
-1	-4	-6	-4	-1

-1	-2	0	-2	-1
0	0	0	0	0
2	4	0	-4	-2
0	0	0	0	0
-1	-2	0	-2	-1

图 4 图像像素点特征提取的能量纹理覆盖掩码矩阵 (掩码矩阵将和图像进行卷积操作)

Figure 4 Energy texture mask used to characterize each pixel over the whole image (these mask are convolved with image)

图 5 (a) CT 图像的主要结构的纹理矢量, 仅采用前 5- 矢量形式用以区分; (b) 用能量覆盖掩码矩阵修正骨骼像素特征的种子点

Figure 5 (a) Texture vectors for main structures of CT image, taking only the five values of the $k+1$ -vector for the sake of clarity; (b) seed points fixed with the results of the characterization of skeleton pixel by use of the energy masks

景 (值设为 0) 还是属于病人头部 (值设为 1). 我们记纹理矢量为 V , 用 $V[l], l=1, \dots, k+1$ 来表示第 l 维, 具体处理步骤如下:

- 1) 对 CT 图像的每个像素点 p : 如果 p_{ij} 处于背景上, 则 $V[1] = 0$; 否则 $V[1] = 1$;
- 2) 将图像和每种能量覆盖掩码卷积, 得到一套“纹理图像”;
- 3) 对图像的每个位置 (i, j) 和能量覆盖卷积的每个结果, 取绝对值 $\text{new_val}_{ij} = ||(\text{actual_val}_{ij})||$.

如果 $\text{new_val}_{ij} > 0$, 那么 $V[l] = 1$; 否则 $V[l] = 0$, 这里 $V[l], l=1, \dots, k+1$ 的对于不同的覆盖.

医学图像上不同组织结构 (软组织、骨骼、皮肤、背景) 都有一个典型矢量, 如图 5 (a) 所示. 注意到, 由于周边像素点值的变化, 属于同一目标 (骨骼) 的像素并不是都具有所期望的矢量, 但具有同一纹理矢量的像素点已经足够分离目标了. 用户选择了目标区域 (骨骼) 的中心点后, 可以用具有同样纹理矢量的像素作为区域增长模式的种子点来重建目标. 现在, 我们假设用户期望从图像中分割骨骼, 并且已经选择了种子点. 下一步就是修正这些种子, 我们用具有肿瘤纹理矢量的像素替代这些种子 (见图 5(a) 和 (b)).

3.2.2 3D/3D 配准图像共形位置

GA 是一个数学框架, 允许我们将几何体视作一个代数上的整体, 方便使用代数工具进行处理几何体. 一些作者称其为几何代数, 是因为他们关注的是代数体的几何特征; 而另外一些称其 Clifford 代

数是因为他们关注的是代数方面. 本章我们选择用几何代数, 下面给出了一个简单介绍, 感兴趣的读者可以在文献 [12~14] 查阅更多细节和不同空间 GA 的阐释.

共形几何代数 (CGA) 是几何代数的重要分支之一, 由中国科学院数学与系统科学研究院的李洪波研究员主创. 共形几何代数继承了几何代数的众多优点, 采用简明统一的方式重新阐释了欧氏几何、双曲 (非欧) 几何、球几何、投影几何、仿射几何等经典几何 [14].

根据 GA 的不同, 可以使用不同的多重矢量表示不同的几何对象 (如点、线、面、环、球等). 例如, 在 $G^{3,0,0}$ (3D 欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 导出的 GA) 中, 点表示为 $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, 在 $G^{3,0,0}$ 中无法简单表示一个环, 但在 $G^{4,1}$ 中, 环可以定义为一个 4- 矢量 $Z = S_1 \wedge S_2$ (两球的交).

3.2.3 共形约束相似性测度

假设有两图像 (三维体数据) M 和 N , M 为活动图像, N 为参照图像, 通过前面的图像分割算法得到两者的骨骼轮廓, 我们用 M' 和 N' 表示, 两者所在的 CGA 空间用 $G^{4,1}$ 表示, 那么我们对 M' 进行不断的几何变换来使两者配准. M' 和 N' 中的像素点在 $G^{4,1}$ 中可以构造成不同的几何体, 那么通过前面的医学图像共形位置约束表示, 我们可以定义医学图像的共形约束相似测度.

定义 4 在 CGA 中, N' 可以表示不同的几何体的集合 $N' = \{X_i, L_j, P_k\}$, M' 也可以类似表示. 那么 M' 中的任意几何体 P_t 和 N' 的每个几何体都存在一个位置约束, 表示为 PU_l , 我们定义 P_t 和 N' 的相似测度为如下形式:

$$S_t = \min_{l=1}^m (||P_t U_l||). \quad (50)$$

式 (50) 中 m 表示 N' 中所有几何体, $PU_l \in \{X-X, X-L, X-P, X-P, L-P\}$.

定义 5 假设有两图像 (三维体数据) M 和 N , M' 和 N' 为两图的需要对齐的关键解剖点集 (这里指骨骼轮廓), 在 CGA 中 $N' = \{X_i, L_j, P_k\}$, $M' = \{X_{i'}, L_{j'}, P_{k'}\}$, M' 中的任意几何体 P_t 和 N' 的相似测度为 $S_t = \min_{l=1}^m (||P_t U_l||)$, 那么我们定义 M 和 N 的相似测度如下:

$$S_{MN} = \sum_{t=1}^n S_t = \sum_{t=1}^n \min_{l=1}^m (||P_t U_l||). \quad (51)$$

通过几何变换, 我们可以得到不同的 M' , 然后按式 (51) 得到一系列的相似测度, 相似测度最小即为配准, 配准过程也就是寻找满足图像的共形约束值最小的几何变换的过程, 下面我们我们来讨论 CGA 中的几何变换问题.

3.2.4 医学图像共形几何变换

在共形几何空间 $G^{4,1}$ 中, 一个几何体 O 的各种几何变换通常采用以下几何积来实现

$$O' = VO\tilde{V},$$

这里 V 表示变换算子, $\tilde{V}$ 是 V 的逆. 下面分别介绍共形几何代数中的平移、旋转.

定义 6 令 $t = t_1e_2 + t_2e_2 + t_3e_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的向量, 表示平移的方向和长度, 那么在对应的共形几何空间 $G^{4,1}$ 中, 平移算子 T 定义为

$$T = e^{\frac{1}{2}te_\infty}.$$

由于 $T = e^{\frac{1}{2}te_\infty} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}te_\infty}{1!} + \frac{(-\frac{1}{2}te_\infty)^2}{2!} + \dots$ 且 $(e_\infty)^2 = 0$, 所以

$$T = 1 - \frac{1}{2}te_\infty. \quad (52)$$

定义 7 在共形几何代数中, 几何体的旋转由所谓的转子 R (旋转算子) 来实现. R 定义如下

$$R = e^{-\frac{1}{2}b\theta} = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) - b\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right), \quad (53)$$

这里的 b 表示与旋转轴对应的 2- 矢量, θ 则表示旋转角度.

在共形几何代数中, 几何体的刚体变形可以看作平移和旋转的组合, 用符号 M 表示, 那么一个几何体的刚体运动则可以表示为

$$O' = MOM, \quad (54)$$

这里的 $M = RT$ 或者 $M = TR$. 一般来说, 旋转和平移的次序不同得到的结果也不同, 意即几何体 O 经过 $M = RT$ 变换和经过 $M = TR$ 变换后得到的结果不一定一样.

上面的几何体 O 可以是点 X 、线 L 、面 P 、环 C 等任意几何体, 点 X 的几何变换表示为 $X' = VX\tilde{V}$, 由于其他几何体都可以分解为不同点的外积形式, 那么其几何变换也可以分解为不同点的几何变换的外积形式:

$$V(X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_n)\tilde{V} = (VX_1 \wedge \tilde{V}) \wedge (VX_2 \wedge \tilde{V}) \wedge \cdots \wedge (VX_n \wedge \tilde{V}). \quad (55)$$

3.2.5 三维医学图像配准

根据上一小节的相似测度, 我们提出了基于共形几何代数的 3D 医学图像配准的算法, 其中的参数寻优策略参考了 ICP 算法, ICP 算法由 Besl 等^[15]于 1992 年提出, 是对应点集配准算法的改进. 假设存在两个点集 $M' = \{X_i | i = 1, 2, \dots, m\}$ 和 $N' = \{y_i | i = 1, 2, \dots, n\}$, ICP 算法就是计算如何通过旋转平移使得两个点集尽可能重叠. 具体步骤如下:

1. 设 $N' = \{Y_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 为参照点集, $M' = \{X_i | i = 1, 2, \dots, m\}$ 为活动点集, 从 N' 中找到和活动点集 M' 中每个点对应的最近点集合 $P' = \{Z_i | i = 1, 2, \dots, m\}$;
2. 根据旋转和平移, 定义点集间最小均方形式的代价函数, 计算满足代价函数最小的点集 M' 和 P' 间的几何变换参数, 得到几何变换矩阵;
3. 用上一步得到的几何变换矩阵对 M' 中所有点进行坐标变换得到点集 M'_1 ;
4. 计算 M'_1 和 P' 的均方根误差, 如果小于预设阈值, 则结束; 否则以点集 M'_1 替代点集 M' , 重复上述步骤.

ICP 算法经过 20 年的发展, 不断地得到了完善和补充. 如 Rusinkiewicz 等^[16]提出用点投影搜索最近点, 算法通过扫描参考曲面的透视点, 以活动曲面上的一点和透视点连接作为投影线, 其与目标表面上的交点为搜索的最近点; Johnson 等^[17]提出了一种基于彩色三维扫描数据点纹理信息的数据配准方法, 通过在 ICP 算法中融合三维扫描点的纹理色彩信息来搜索最近点; 赵成安等^[18]详细分析了基本的 ICP 算法及其常用最优化解析方法, 较全面分析了 ICP 算法各个步骤的改进技术; 周春燕等^[19]在 ICP 算法前加入主成分分析法进行粗配准, 通过预处理和点对限制来提高算法的精确性; 王君臣等^[20]提出了基于 ICP 算法的手术导航三维配准, 算法中也利用 PCA 算法进行初配准.

根据选择的几何体不同, 我们可以有多种不同的相似测度, 基于此本文提出了 3 种基于共形几何位置约束的三维医学图像配准算法. 算法中首先利用图像分割技术得到目标对象中相对刚性的骨骼轮廓点, 从配准点范围加以严格限制; 其次从目标代价函数上加以改进.

下面是这 3 种不同测度的配准算法步骤:

1. 基于 $X-X$ 型位置约束测度的 3D 配准 (XX-ICP)

- 1) 预处理参照图像 $N = \{N_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 和浮动图像 $M = \{M_j, j = 1, 2, \dots, m\}$, 使在图像有效区域内两者的分辨率、尺寸范围达到一致;
- 2) 对参照图像 $N = \{N_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 和浮动图像 $M = \{M_j, j = 1, 2, \dots, m\}$ 采用 canny 算子进行边缘检测, 可以得到对应的边缘轮廓;
- 3) 根据第 2) 步的边缘轮廓, 利用前面的图像分割算法, 得到参照图和浮动图的骨骼轮廓点集分别为 N' 和 M' ;
- 4) 在 $G^{4,1}$ 中, 将 M' 和 N' 都转换成 $X = e_\infty X + I_M$ 形式, 现在 $M'_k = \{X_i | i = 1, 2, \dots, n\}$, $N' = \{Y_j | j = 1, 2, \dots, m\}$
- 5) 通过公式 $S_{MN} = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \min_{j=1}^m (\|X_i Y_j\|)$ 计算相似测度;
- 6) 初始化迭代条件 $k = 0, k_{\max} = 1000, \varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$;
- 7) 令迭代第 k 次时的旋转为 R^k , 平移为 T^k , 第 4) 步中的 X_i 变换后为 $X_i = M X_i \tilde{M}$, $M = R^k T^k$ 旋转 R^k 和平移 T^k 满足第 5) 步中的对应 S_i 平方和最小;
- 8) 根据公式 $S_{MN} = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \min_{j=1}^m (\|X_i Y_j\|)$ 计算相似测度 S_{MN} , 如果 S_{MN} 小于阈值 ε 或 $k \geq k_{\max}$ 则转下一步, 否则 $k = k + 1$ 转 4);
- 9) 计算浮动图像在前面过程中的连续旋转和平移下的结果, 输出最终的配准图, 与参照图融合 (可直接叠加), 得到配准后的融合图.

2. 基于 $X-L$ 型位置约束测度的 3D 配准 (XL-ICP)

- 1) 预处理参照图像 $N = \{N_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 和浮动图像 $M = \{M_j, j = 1, 2, \dots, m\}$, 使在图像有效区域内两者的分辨率、尺寸范围达到一致;
- 2) 对参照图像 $N = \{N_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 和浮动图像 $M = \{M_j, j = 1, 2, \dots, m\}$ 采用 canny 算子进行边缘检测, 可以得到对应的边缘轮廓;
- 3) 根据第 2) 步的边缘轮廓, 利用前面的图像分割算法, 得到参照图和浮动图的骨骼轮廓点集分别为 N' 和 M' ;
- 4) 在 $G^{4,1}$ 中, 将 M' 都转换成 $X = e_\infty X + I_M$ 形式, N' 中的点构造成线 $L = e_\infty m + I_M r$ 形式, 在构造中, 每个点使用不超过一次, 现在 $M'_k = \{X_i | i = 1, 2, \dots, n\}$, $N' = \{L_j | j = 1, 2, \dots, m\}$.
- 5) 通过公式 $S_{MN} = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \min_{j=1}^m (\|X_i L_j\|)$ 计算相似测度;
- 6) 初始化迭代条件 $k = 0, k_{\max} = 1000, \varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$;
- 7) 令迭代第 k 次时的旋转为 R^k , 平移为 T^k , 第 4) 步中的 X_i 变换后为 $X_i = M X_i \tilde{M}$, $M = R^k T^k$ 旋转 r^k 和平移 T^k 满足第 5) 步中的对应 S_i 平方和最小;
- 8) 根据公式 $S_{MN} = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \min_{j=1}^m (\|X_i L_j\|)$ 计算相似测度 S_{MN} , 如果 S_{MN} 小于阈值 ε 或 $k \geq k_{\max}$ 则转下一步, 否则 $k = k + 1$ 转 4);
- 9) 计算浮动图像在前面过程中的连续旋转和平移下的结果, 输出最终的配准图, 与参照图融合 (可直接叠加), 得到配准后的融合图.

3. 基于 $X-P$ 型位置约束测度的 3D 配准 (XP-ICP)

- 1) 预处理参照图像 $N = \{N_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 和浮动图像 $M = \{M_j, j = 1, 2, \dots, m\}$, 使在图像有效区域内两者的分辨率、尺寸范围达到一致;
- 2) 对参照图像 $N = \{N_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 和浮动图像 $M = \{M_j, j = 1, 2, \dots, m\}$ 采用 canny 算子进行边缘检测, 可以得到对应的边缘轮廓;

图 6 (a) CT 序列图 (前 8 幅图); (b) MR 序列图 (前 8 幅图)

Figure 6 (a) CT sequence images (the first 8 images); (b) MR sequence images (the first 8 images)

3) 根据第 2) 步的边缘轮廓, 利用前面的图像分割算法, 得到参照图和浮动图的骨骼轮廓点集分别为 N' 和 M' ;

4) 在 $G^{4,1}$ 中, 将 M' 都转换成 $\mathbf{X} = \mathbf{e}_\infty \mathbf{x} + \mathbf{I}_M$ 形式, N' 中的点构造成面 $\mathbf{P} = \mathbf{I}_M \mathbf{n} + \mathbf{e}_\infty \mathbf{d} \mathbf{I}_E$ 形式, 在构造中, 每个点使用不超过一次, 现在 $M'_k = \{\mathbf{X}_i | i = 1, 2, \dots, n\}$, $N' = \{\mathbf{P}_j | j = 1, 2, \dots, m\}$.

5) 通过公式 $S_{MN} = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \min_{j=1}^m (\|\mathbf{X}_i \mathbf{L}_j\|)$ 计算相似测度;

6) 初始化迭代条件 $k = 0, k_{\max} = 1000, \varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$;

7) 令迭代第 k 次时的旋转为 $\mathbf{R}^k$, 平移为 $\mathbf{T}^k$, 第 4) 步中的 $\mathbf{X}_i$ 变换后为 $\mathbf{X}_i = \mathbf{M} \mathbf{X}_i \tilde{\mathbf{M}}$, $\mathbf{M} = \mathbf{R}^k \mathbf{T}^k$ 旋转 $\mathbf{R}^k$ 和平移 $\mathbf{T}^k$ 满足第 5) 步中的对应 S_i 平方和最小;

8) 根据公式 $S_{MN} = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \min_{j=1}^m (\|\mathbf{X}_i \mathbf{L}_j\|)$ 计算相似测度 S_{MN} , 如果 S_{MN} 小于阈值 ε 或 $k \geq k_{\max}$ 则转下一步, 否则 $k = k + 1$ 转 4);

9) 计算浮动图像在前面过程中的连续旋转和平移下的结果, 输出最终的配准图, 与参照图融合 (可直接叠加), 得到配准后的融合图.

在上面 3 种算法的第 4) 步中, 构造几何体的时候, 也可以同时构造多种几何体, 这时相似测度由混合的几何体的位置关系约束决定.

3.2.6 实验对比分析

本节实验图像数据来源于美国 Vanderbilt 大学的 “The Retrospective Image Registration Evaluation Project”, 选取 Patient_001 的图像数据的 CT 和 MR 序列, 前者为参照图.

CT 图有 28 层, 在 x 和 y 方向上像素大小为 0.65 mm, z 方向上为 4.0 mm. 图 6(a) 是 CT 前 8 层图, 可以看出由于 z 方向位置的不同, 每层显示的人脑骨骼信息都不一样.

MR 图有 26 层, 在 x 和 y 方向上像素大小为 1.25 mm, z 方向上为 4.0 mm. 图 6(b) 是 MR 前 8 层图, 可以看出由于 z 方向位置的不同, 每层显示的病人脑部软组织信息都不一样.

对比 CT 的相同图层, 可以看出两图具有相似外轮廓, 而内部由于成像侧重点不同, 显示的组织都有或多或少的差异. 从图 6 可以看出不同 z 轴位置的成像体现了病人组织的不同细节.

利用序列图可以重建三维图, 图 7(a) 为根据 CT 图重建的三维脑部模型, 从不同的角度可以看到脑部骨骼的不同部分. 图 7(b) 为根据 MR 图重建的三维脑部模型, 由于 MR 反映的主要是脑部软组织信息, 所以三维模型图的可透视部分较少, 只有在内部组织和骨骼之间留有少量间隙透视.

从图 7(a) 和 (b) 可以看到不同成像模式的成像细节不完全相同, 注意到相较其他组织成分, 两种图像的骨骼部分轮廓是非常接近的.

图 7 (a) CT 三维重建图; (b) MR 三维重建图

Figure 7 (a) 3D reconstruction image of CT; (b) 3D reconstruction image of MR

图 8 CT 和 MR 采用 XX-ICP 算法配准结果

Figure 8 Registration of CT and MR with XX-ICP. (a) 3D reconstruction of fusion image after registration; (b) some slice figure after registration

图 9 CT 和 MR 采用 XL-ICP 算法配准结果

Figure 9 Registration of CT and MR with XL-ICP. (a) 3D reconstruction of fusion image after registration; (b) some slice figure after registration

配准前, 从五维共形几何代数的角度, 世界坐标系下的 CT 图和 MR 图相差一个平移算子 T 和一个旋转算 R , 也就是说, MR 在平移算子 T 和一个旋转算 R 的作用下将和 CT 配准. 在实际算法中, 由于采用的寻优策略是基于 ICP 算法的, 实际上 MR 是在平移算子 T^k 和一个旋转算 R^k 的连续的作用下取得配准. 配准后, MR 和 CT 图骨骼部分合并, 而 MR 中的软组织部分将填入 CT 图的骨骼空隙中. 图 8(a), 9(a) 和 10(a) 是 3 种新算法配准后的 CT 和 MR 融合三维效果图, 对应的图 8(b), 9(b) 和 10(b) 是 3 种新算法配准后的 CT 和 MR 融合后的切片图.

图 8(b), 9(b) 和 10(b) 分别是 3 种新算法配准后的 CT 和 MR 融合后的部分切片图. 从切片图中可以看到配准后的切片是不同于配准前的 CT 和 MR 切片的, CT 和 MR 切片中的相同组织对齐融合, 而不同组织则在位置上互相补充显示.

为了便于比较, 采用前面提到的经典 ICP 算法配准 CT 和 MR 序列, 得到图 11.

图 10 CT 和 MR 采用 XP-ICP 算法配准结果

Figure 10 Registration of CT and MR with XP-ICP. (a) 3D reconstruction of fusion image after registration; (b) some slice figure after registration

图 11 CT 和 MR 采用 ICP 算法配准结果

Figure 11 Registration of CT and MR with ICP. (a) 3D reconstruction of fusion image after registration; (b) some slice figure after registration

表 3 算法分别运行 50 次的耗时表

Table 3 Time cost of the algorithms run 50 times respectively

Algorithm type	Max time cost (ms)	Min time cost (ms)	Average time cost (ms)
ICP	76678	48902	57546
XX-ICP	65442	46404	52007
XL-ICP	33044	24320	28321
XP-ICP	36047	30107	32113

和传统的 ICP 算法相较, 本文提出的 3 种算法在配准精度上有一定的提高, 从图 11(b) 上方框标示位置可以看出经典的 ICP 算法并没有配准完好, 而本文提出的 3 种算法在同样位置处基本对齐. 这说明通过基于共形几何代数几何体位置约束的新算法能够在一定程度上提高配准精度. 对比 3 种新算法的切片图, 配准精度最高的是 XX-ICP 算法, 原因主要在于 XX-ICP 采用的点点位置约束, 比点线位置约束和点面位置约束采用了更多的几何基本体参与配准, 但是这样也会导致配准速度降低. 表 3 为 3 种算法和经典 ICP 算法的配准速度对比, 为了更好地对比算法, 算法分别运行 50 次, 每次运行形取不同的轮廓点集范围.

从表 3 可以看出, 本章提出的 3 种新算法的最长耗时都要小于基本 ICP 算法, 平均耗时也要小于基本 ICP 算法. 其中 XL-ICP 的表现最为突出, 主要原因可以归结为 3 点, 首先是采用骨骼轮廓点作

为配置的基本点集, 使得配置点数量大幅度减少, 这使得新算法的运算规模缩小了; 其次新算法将原来的欧氏点点距离运算改为共形点线距离运算, 这也会缩小运算规模, 理论上配准过程中的共形线数量选择越少运行时间越短, 但是配准精度会降低; 第三是新算法采用共形几何变换进行共形点的空间变换在一定程度上也简化了运算过程, 也能够缩短配准运算时间。

三种新算法中, XX-ICP 的配准精度最高, 效率相对也低些, 这是因为其算法中用到的几何体也最多; 在 XL-ICP 算法中, 运算速度与选择几何代数共形线的数目直接相关, 数目增多则速度下降; 而 XP-ICP 算法, 虽然运算中参与配准的几何体减少了, 但是几何代数共形面的转换比几何代数共形线复杂, 时间开销要大些, 这样, 反而 XP-ICP 算法的效率要低于 XL-ICP 算法。

4 结论

本文主要是根据 CGA 空间的 3D 医学图像的本质特点, 分析了配准时参照图像和活动图像的几何元素之间的位置关系约束, 并定义了一种基于位置约束的相似测度, 在这种测度的基础上, 我们结合 ICP 算法提出了 3 种新的三维医学图像配准算法。最后通过 CT 和 MR 的三维配准实验, 验证了该算法能直接将图像序列进行三维配准, 使得 MR 的软组织信息在融合 CT 图的骨骼信息后, 给以直观的实体展示。

参考文献

- 1 Hsu L Y, Loew M H. Fully automatic 3D feature-based registration of multi-modality medical Images. *Image Vis Comput*, 2001, 19: 75–85
- 2 Li W L, Cheng L Q, Li J, et al. Three dimensional nonrigid medical image registration using free form deformation. *Chin J Med Imaging Technol*, 2011, 27: 2536–2540 [李文龙, 程流泉, 李军, 等. 基于自由变形的 3D 非线性医学图像配准. *中国医学影像技术*, 2011, 27: 2536–2540]
- 3 Harmouche R, Cheriet F, Labelle H, et al. 3D registration of MR and X-ray spine images using an articulated model. *Comput Med Imag Graph*, 2012, 36: 410–418
- 4 Sharman R, Tyler J M, Pianykh O S. A fast and accurate method to register medical images using wavelet modulus maxima. *Pattern Recognit Lett*, 2000, 21: 447–462
- 5 Babaie-Zadeh M, Jutten C, Nayeibi K. Differential of the mutual information. *IEEE Signal Process Lett*, 2004, 11: 48–51
- 6 Chui H, Rangarajan A. A new point matching algorithm for non-rigid registration. *Comput Vis Image Underst*, 2003, 89: 114–141
- 7 Hestenes D, Sobczyk G. *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*. Berlin: Springer, 1984
- 8 Hongbo L. Conformal geometric algebra—a new framework for computational geometry. *J Comput Aided Des Comput Graph*, 2005, 17: 2383–2393 [李洪波. 共形几何代数—几何代数的新理论和计算框架. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2005, 17: 2383–2393]
- 9 Rosenhahn B, Sommer G. Pose estimation in conformal geometric algebra part I: the stratification of mathematical spaces. *J Math Imaging Vis*, 2005, 22: 27–48
- 10 Rosenhahn B, Sommer G. Pose estimation in conformal geometric algebra part II: real-time pose estimation using extended feature concepts. *J Math Imaging Vis*, 2005, 22: 49–70
- 11 Jorge R, Eduardo B. Medical image segmentation, volume representation and registration using spheres in the geometric algebra framework. *Pattern Recognit*, 2007, 40: 171–188
- 12 Hongbo L, Hestenes D, Rockwood A. A universal model for conformal geometries of euclidean, spherical and double-hyperbolic spaces. Sommer: Springer Heidelberg, 2001. 77–104

- 13 Hongbo L, Hestenes D, Rockwood A. Generalized homogeneous coordinates for computational geometry. Sommer: Springer Heidelberg, 2001. 27–60
- 14 Hongbo L, Hestenes D, Rockwood A. Spherical conformal geometry with geometric algebra. Sommer: Springer Heidelberg, 2001. 61–76
- 15 Besl P J, McKay H D. A method for registration of 3-D shapes. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell, 1992, 14: 239–256
- 16 Rusinkiewicz S, Levoy M. Efficient variants of the ICP algorithm. In: Proceedings of the 3rd Intl Conf on 3D Digital Imaging and Modeling, Quebec, 2001. 145–152
- 17 Johnson A E, Bing K S. Registration and integration of textured 3D data. Image Vis Comput, 1999, 17: 135–147
- 18 Zhao C A, Zhou C L. Research and implementation of registering range images based on ICP algorithm. J Commun Univ China Sci Technol, 2008, 1: 34–39 [赵成安, 周春来. 基于 ICP 算法的距离图像配准研究. 中国传媒大学学报 (自然科学版), 2008, 1: 34–39]
- 19 Zhou C Y, Li Y, Zou Z R. Three-dimensional cloud ICP algorithm improvement. Comput Technol Dev, 2011, 8: 75–77 [周春艳, 李勇, 邹峥嵘. 三维点云 ICP 算法改进研究. 计算机技术与发展, 2011, 8: 75–77]
- 20 Wang J C, Wang T M, Xu Y, et al. Registration method based on ICP algorithm for 3D surgical navigation. J Beijing Univ Aeronaut Astronaut, 2009, 4: 434–438 [王君臣, 王田苗, 徐源, 等. 基于 ICP 算法的手术导航三维配准技术. 北京航空航天大学学报, 2009, 4: 434–438]

3D medical image registration based on conformal geometric algebra

CAO WenMing¹, LIU Hui¹, XU Chen^{1*}, FENG JiQiang¹ & FENG Hao²

1 College of Information Engineering, Modern Communication and Information Processing Key Laboratory, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China;

2 School of Automation, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China

*E-mail: xuchen@szu.edu.cn

Abstract With the development of medical image processing technology, more attention has been paid to the registration of 3D/3D medical images, especially in medical applications such as surgical navigation. Many methods to register 3D/3D medical images have been proposed, but most are based on traditional algebra, and have some problems with registration accuracy and efficiency. Here we reconstruct the position constraints of a 3D medical image with conformal geometric algebra, which is a kind of neo-Classical algebra, and also analyze the conformal geometry transformation of medical images. We then construct a novel similarity measure for 3D medical image registration. We use this method to propose 3D medical image registration algorithms for the registration of 3D CT and MR images. In these algorithms, we regard the skeletal outline as the base point set of the registration, based on which conformal geometric entities were constructed with conformal geometric algebra. Then, using the new similarity measure, we prospectively register the 3D data directly. Finally, we present experiments to validate the new algorithms. The results show that the algorithm realizes the direct alignment of 3D data, which can better localize the 3D position of tissues and organs and intuitively reflect the registration results.

Keywords conformal geometric algebra, conformal geometric entity, medical image, registration, similarity measure

CAO WenMing was born in 1965. He received a Ph.D. degree from the Institute of Semiconductors Chinese Academy of Sciences in 2007. Currently, he is a Professor at Shenzhen University. His research interests include image processing, pattern recognition, and artificial intelligence.

LIU Hui was born in 1977. He received a Ph.D. degree in Signal and Information Processing from the Shenzhen University, Shenzhen city, in 2012. Currently, he is a Vice Researcher at Guangdong University of Foreign Studies. His research interests include image processing, pattern recognition, and natural language processing.

XU Chen was born in 1965. He received a Ph.D. degree from the Xian Jiaotong University in 1992. Currently, he is a Professor at Shenzhen University. His research interests include image processing and computer applications.

FENG Hao was born in 1956. He received a Ph.D. degree from the Institute of Semiconductors Chinese Academy of Sciences in 2005. Currently, he is a Professor at Hangzhou Dianzi University. His research interests include image processing, pattern recognition, and natural language processing.