一维 Brown 运动在其正则 Dirichlet 扩张中的正交补

沈云骢^{1*}, 李利平², 应坚刚¹

1. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433;

2. 中国科学院数学与系统研究院, 北京 100190

E-mail: yuncongshen13@fudan.edu.cn, liping_li@amss.ac.cn, jgying@fudan.edu.cn

收稿日期: 2016-11-16; 接受日期: 2017-01-06; 网络出版日期: 2017-09-15; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11271240)、中国博士后科学基金 (批准号: 2015LH0043 和 2016M90145) 和中国科学院随机复杂结构与数据科学重点实验室资助项目

摘要 考虑一维 Brown 运动的正则 Dirichlet 扩张 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, 即 $H^1(\mathbb{R})$ 是 $\mathcal{F}$ 的子空间, 并且任意的 $f, g \in H^1(\mathbb{R})$ 满足 $\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2}D(f, g)$. 由于 $H^1(\mathbb{R})$ 和 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{E}_\alpha$ 下都是 Hilbert 空间, 因此存在 α -正交补 $\mathcal{G}_\alpha$. 本文给出 $\mathcal{G}_\alpha$ 中函数的具体表达式, 它们可以被另两个函数空间刻画. 这两个空间上存在自然的广义 Dirichlet 型, 通过补丁变换可以给出它们的正则表示.

关键词 正则 Dirichlet 扩张 正则 Dirichlet 子空间 Dirichlet 型 正交补 补丁过程

MSC (2010) 主题分类 31C25, 60J55, 60J60

1 引言

正则 Dirichlet 子空间的概念最早是在文献 [1] 中对于一维 Brown 运动提出的. 随后, 文献 [2, 3] 对一般情形下空间的结构也作了研究. 具体地, 令 E 是一个局部紧可分度量空间, m 是 E 上的满支撑 Radon 测度. 如果 $L^2(E, m)$ 上的两个正则 Dirichlet 型 $(\mathcal{E}^1, \mathcal{F}^1)$ 和 $(\mathcal{E}^2, \mathcal{F}^2)$ 满足

$$\mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}^2, \quad \mathcal{E}^2(u, v) = \mathcal{E}^1(u, v), \quad \forall u, v \in \mathcal{F}^1,$$

则 $(\mathcal{E}^1, \mathcal{F}^1)$ 称为 $(\mathcal{E}^2, \mathcal{F}^2)$ 的一个正则 Dirichlet 子空间, 而 $(\mathcal{E}^2, \mathcal{F}^2)$ 称为 $(\mathcal{E}^1, \mathcal{F}^1)$ 的一个正则 Dirichlet 扩张. 我们采用文献 [4, 5] 中关于 Dirichlet 型的术语.

众所周知, 一维 Brown 运动对应的 $L^2(\mathbb{R})$ 上的 Dirichlet 型是 $(\frac{1}{2}D, H^1(\mathbb{R}))$, 其中 $H^1(\mathbb{R})$ 是 1-Sobolev 空间,

$$D(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u'(x)v'(x)dx, \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}).$$

英文引用格式: Shen Y C, Li L P, Ying J G. The orthogonal complements of $H^1(\mathbb{R})$ in its regular Dirichlet extensions (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 289–304, doi: 10.1360/SCM-2016-0722

本文中 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度一律用 m 表示. 文献 [1] 给出了 $(\frac{1}{2}D, H^1(\mathbb{R}))$ 的正则 Dirichlet 子空间的刻画. 可以证明 $(\frac{1}{2}D, H^1(\mathbb{R}))$ 的每个正则 Dirichlet 子空间都是既约的, 它对应的扩散过程可以由 $\mathbb{R}$ 上的一个尺度函数 s 刻画, 它是绝对连续的并且 $s' = 0$ 或 $s' = 1$ a.e. (参见文献 [1] 和 [6, 命题 2.1]). 之后, Li 和 Ying^[7] 给出了 $(\frac{1}{2}D, H^1(\mathbb{R}))$ 的正则 Dirichlet 扩张的完整刻画. 虽然每个正则 Dirichlet 扩张也是强局部的 (参见文献 [2, 定理 1]), 从而对应一个内部没有死亡的扩散过程, 但与子空间的情形不同, 这个过程未必是既约的. 与文献 [7] 中一样, 令 $a < b$, $I = \langle a, b \rangle$ 表示 (a, b) 、 $(a, b]$ 、 $[a, b)$ 和 $[a, b]$ 中的一个. 记 $T(I)$ 为所有 I 上的严格增连续函数 $t(x)$, 满足

$$dx \ll dt, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{dx}{dt} = 1, \quad dt\text{-a.e.},$$

其中 “ $\ll$ ” 表示 “绝对连续”. 由于 $t(x)$ 是单调的, 我们可以将其延拓到 $[a, b]$ 上. 定义

$$T_\infty(I) := \{t \in T(I) : t(a) = -\infty \text{ iff } a \notin I, t(b) = \infty \text{ iff } b \notin I\}, \quad (1.1)$$

其中 “iff” 表示 “当且仅当”. 注意 $T_\infty(I)$ 是非空的 (参见文献 [7, 注 3.1]). 文献 [7] 中的一个主要结果 (参见文献 [7, 定理 3.3]) 证明了每个 $(\frac{1}{2}D, H^1(\mathbb{R}))$ 的正则 Dirichlet 扩张 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 有如下表示: 存在至多可数个不相交的区间 $\{I_n = \langle a_n, b_n \rangle : n \geq 1\}$ 满足 $m((\bigcup_{n \geq 1} I_n)^c) = 0$, 以及一系列尺度函数 $\{t_n \in T_\infty(I_n) : n \geq 1\}$ 使得

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f|_{I_n} \in \mathcal{F}^n, \sum_{n \geq 1} \mathcal{E}^n(f|_{I_n}, f|_{I_n}) < \infty \right\}, \\ \mathcal{E}(f, g) &= \sum_{n \geq 1} \mathcal{E}^n(f|_{I_n}, g|_{I_n}), \quad f, g \in \mathcal{F}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中 $(\mathcal{E}^n, \mathcal{F}^n)$ 由下式定义:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^n &= \left\{ f \in L^2(I_n) : f \ll t_n, \int_{I_n} \left(\frac{df}{dt_n} \right)^2 dt_n < \infty \right\}, \\ \mathcal{E}^n(f, g) &= \frac{1}{2} \int_{I_n} \frac{df}{dt_n} \frac{dg}{dt_n} dt_n, \quad f, g \in \mathcal{F}^n. \end{aligned}$$

注意到 $f \ll t_n$, 意味着存在一个绝对连续函数 g 使得

$$f = g \circ t_n$$

且

$$\frac{df}{dt_n} := g' \circ t_n.$$

这就是说, 扩张 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 可以被分成至多可数个既约的部分. 对应的扩散过程在每个区间 I_n 上是一个既约扩散过程, 其尺度函数为 t_n , 速度测度为 $m|_{I_n}$. 另外, 条件 $m((\bigcup_{n \geq 1} I_n)^c) = 0$ 意味着 $(\bigcup_{n \geq 1} I_n)^c$ 在 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 下是一个 $\mathcal{E}$ -极集 (参见文献 [7, 注 3.4(4)]). 文献 [7, 第 3.3 页] 给出了几个正则扩张的例子.

由于 $(\frac{1}{2}D, H^1(\mathbb{R}))$ 是 (1.2) 中 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 的正则 Dirichlet 子空间, 因此, 对任意的常数 $\alpha > 0$, $H^1(\mathbb{R})$ 在内积 $\mathcal{E}_\alpha$ 下是 $\mathcal{F}$ 的一个子空间. 自然地, 我们可以定义 $H^1(\mathbb{R})$ 在 $\mathcal{F}$ 中的 α -正交补

$$\mathcal{G}_\alpha := \{f \in \mathcal{F} : \mathcal{E}_\alpha(f, g) = 0, \forall g \in H^1(\mathbb{R})\}. \quad (1.3)$$

我们同样记作 $\mathcal{F} = H^1(\mathbb{R}) \oplus_{\alpha} \mathcal{G}_{\alpha}$ 或 $\mathcal{G}_{\alpha} = \mathcal{F} \ominus_{\alpha} H^1(\mathbb{R})$. 将 $H^1(\mathbb{R})$ 和 $\mathcal{F}$ 换成它们的扩展 Dirichlet 空间后, $\alpha = 0$ 这种特殊情形在文献 [7, 第 4.1 节] 中已有讨论. 本文的主要目的是对任意的常数 $\alpha > 0$, 研究 α -正交补 $\mathcal{G}_{\alpha}$ 空间的结构. 文献 [8] 已经对 $(\frac{1}{2}D, H^1(\mathbb{R}))$ 的正则子空间考虑过同样的问题. 文献 [5, 例 1.2.2] 中的讨论也与本文有类似的形式.

本文中, 我们参照文献 [8] 给出了 $\mathcal{G}_{\alpha}$ 的表示, 然后通过两个函数 $\mathbf{c}_+$ 和 $\mathbf{c}_-$ 给出了 $\mathcal{G}_{\alpha}$ 中函数的具体表达式. 可以证明 $\mathbf{c}_{\pm}$ 构成一个 Hilbert 空间 $\mathfrak{C}_{\pm}$, 并且与 $\mathcal{G}_{\alpha}$ 之间存在一个线性双射. 进一步, 我们证明了 $\mathfrak{C}_{\pm}$ 上自然的二次型 $\mathcal{E}_{\pm}$ 是一个广义 Dirichlet 型. 最后, 我们用补丁 (darning) 变换得到 $(\mathcal{E}_{\pm}, \mathfrak{C}_{\pm})$ 在 I_n 上的正则表示.

下面给出符号说明. 对任意 $n \geq 1$, 令

$$U_n := \left\{ x \in I_n : \frac{dx}{d\mathbf{t}_n} = 1 \right\}.$$

注意到 U_n 是在 $d\mathbf{t}_n$ -几乎处处意义下定义的. 记 $W_n := I_n \setminus U_n$. 显然,

$$\begin{aligned} m(W_n) &= 0, \\ \frac{dx}{d\mathbf{t}_n} &= 1_{U_n}, \quad d\mathbf{t}_n\text{-a.e.}, \end{aligned}$$

这两个性质会反复用到. 上式意味着某个事实在 I_n 上几乎处处成立等价于在 U_n 上 $d\mathbf{t}_n$ -几乎处处成立. 进一步, 记

$$U := \bigcup_{n \geq 1} U_n, \quad W := \bigcup_{n \geq 1} W_n, \quad I := \bigcup_{n \geq 1} I_n.$$

按照文献 [7] 中的记号, 令 $I_n = \langle a_n, b_n \rangle$. 给定 $\mathbb{R}$ 上的一个函数 f 和一个集合 $A \subset \mathbb{R}$, 记 $f|_A$ 为 f 在 A 上的限制. 同样, 测度 m 在 A 上的限制记为 $m|_A$. 此外, 如果 S 是某个符号, 则 $S_{\pm}$ 表示 S_+ 或 S_- , 也就是说, 它所在的这句话对 S_+ 和 S_- 都成立.

2 正交补的刻画

令 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 如 (1.2), 为 $L^2(\mathbb{R})$ 上 $(\frac{1}{2}D, H^1(\mathbb{R}))$ 的正则扩张. $\{I_n = \langle a_n, b_n \rangle : n \geq 1\}$ 和 $\{\mathbf{t}_n : n \geq 1\}$ 为相应的区间和尺度函数. 固定常数 $\alpha > 0$, $\mathcal{G}_{\alpha}$ 由 (1.3) 给出, 是 $H^1(\mathbb{R})$ 在 $\mathcal{F}$ 中的 α -正交补.

分别记 $H_e^1(\mathbb{R})$ 和 $\mathcal{F}_e$ 为 $H^1(\mathbb{R})$ 和 $\mathcal{F}$ 的扩展 Dirichlet 空间. Li 和 Ying^[7] 讨论了 $H_e^1(\mathbb{R})$ 在 $\mathcal{F}_e$ 中的正交补:

$$\mathcal{G} := \{f \in \mathcal{F}_e : \mathcal{E}(f, g) = 0, \forall g \in H_e^1(\mathbb{R})\}.$$

文献 [7, 定理 4.2] 告诉我们

$$\mathcal{G} = \left\{ f \in \mathcal{F}_e : \frac{df}{d\mathbf{t}_n} \Big|_{I_n} = 0, d\mathbf{t}_n\text{-a.e. 在 } U_n \text{ 上}, \forall n \geq 1 \right\}, \quad (2.1)$$

并且 $f \in \mathcal{F}_e$ 可以在差一个常数意义下被唯一分解为

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in H_e^1(\mathbb{R}), \quad f_2 \in \mathcal{G}.$$

我们用类似的方法得到 $\mathcal{G}_{\alpha}$ 的第一种表示.

定理 2.1 对任意常数 $\alpha > 0$, 有

$$\mathcal{G}_\alpha = \left\{ f \in \mathcal{F} : \frac{df|_{I_n}}{d\mathbf{t}_n}(y) - \frac{df|_{I_m}}{d\mathbf{t}_m}(x) = 2\alpha \int_x^y f(z)dz, \text{ a.e. } x \in I_m, y \in I_n, \forall m, n \geq 1 \right\}. \quad (2.2)$$

证明 固定函数 $f \in \mathcal{F}$, $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 并假设 $\text{supp}[g]$ 属于某个区间 (a, b) , 则

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx &= - \int_a^b f(x)dx \int_x^b g'(y)dy \\ &= - \int_a^b g'(y)dy \int_a^y f(x)dx. \end{aligned}$$

令 $f_n = f \cdot 1_{I_n}$, 则有

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\alpha(f, g) &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \int_a^b \frac{df_n}{d\mathbf{t}_n}(y)g'(y)dy - \alpha \int_a^b g'(y)dy \int_a^y f(x)dx \\ &= \int_a^b g'(y)dy \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{df_n}{d\mathbf{t}_n}(y) - \alpha \int_a^y f(x)dx \right]. \end{aligned}$$

现假设 f 属于 (2.2) 右端, 则对几乎处处的 $x, y \in (\bigcup_{n \geq 1} I_n) \cap (a, b)$, 其中 $x \in I_m, y \in I_n$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{df_n}{d\mathbf{t}_n}(x) - \alpha \int_a^x f(z)dz &= \frac{1}{2} \frac{df_m}{d\mathbf{t}_m}(x) - \alpha \int_a^x f(z)dz \\ &= \frac{1}{2} \frac{df_n}{d\mathbf{t}_n}(y) - \alpha \int_a^y f(z)dz \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{df_n}{d\mathbf{t}_n}(y) - \alpha \int_a^y f(z)dz \\ &\equiv C, \end{aligned}$$

其中 C 是一个常数. 由于 $m((a, b) \setminus \bigcup_{n \geq 1} I_n) = 0$, 因此,

$$\mathcal{E}_\alpha(f, g) = C \cdot \int_a^b g'(y)dy = 0.$$

故 $f \in \mathcal{G}_\alpha$, 因为 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 在 $H^1(\mathbb{R})$ 中是 $\mathcal{E}_1$ -稠的.

反过来, 假设 $f \in \mathcal{G}_\alpha$, 则

$$\mathcal{E}_\alpha(f, g) = 0, \quad \forall g \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

同上, 设 $\text{supp}[g] \subset (a, b)$. 令

$$h(y) := \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{df_n}{d\mathbf{t}_n}(y) - \alpha \int_a^y f(x)dx, \quad y \in (a, b),$$

则

$$\mathcal{E}_\alpha(f, g) = \int_a^b g'(y)h(y)dy = 0, \quad \forall g \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

故 $h(x)$ 是一个常数 a.e. $x \in (a, b)$. 从而,

$$0 = 2h(y) - 2h(x) = \frac{df|_{I_n}}{d\mathbf{t}_n}(y) - \frac{df|_{I_m}}{d\mathbf{t}_m}(x) - 2\alpha \int_x^y f(z)dz$$

对 a.e. $x \in I_m \cap (a, b)$ 和 $y \in I_n \cap (a, b)$ 成立. 由于 (a, b) 可以取任意大, 因此 f 必然属于 (2.2) 右端. 定理得证. $\square$

注 2.2 在 $\alpha = 0$ 的情形下, 形式上我们有

$$\mathcal{G}_0 = \left\{ f \in \mathcal{F} : \frac{df|_{I_n}}{d\mathbf{t}_n} = c, \text{ a.e. 在 } I_n \text{ 上}, \forall n \geq 1 \right\}, \quad (2.3)$$

其中 c 为某个常数. 又因为 $f \in \mathcal{G}_0 \subset \mathcal{F}$, 于是,

$$\begin{aligned} \infty &> \mathcal{E}(f, f) = \sum_{n \geq 1} \mathcal{E}^n(f|_{I_n}, f|_{I_n}) \\ &\geq \frac{c^2}{2} \sum_{n \geq 1} \int_{I_n} 1_{U_n}(x) \cdot d\mathbf{t}_n(x) = \frac{c^2}{2} m(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

从而, $c = 0$,

$$\mathcal{G}_0 = \left\{ f \in \mathcal{F} : \frac{df|_{I_n}}{d\mathbf{t}_n} = 0, \text{ a.e. 在 } I_n \text{ 上}, \forall n \geq 1 \right\}.$$

如果将 $\mathcal{F}$ 替换成 $\mathcal{F}_e$, 这就与 (2.1) 一致.

下面将给出 $\mathcal{G}_\alpha$ 的另一种表达式. 注意 $f \in \mathcal{F}$ 在每个区间 I_n 上是连续的, 但在 $\mathbb{R}$ 上并不一定连续. 事实上, 由 (1.2) 知, f 在 I_n 上的限制 $f|_{I_n}$ 是关于 $\mathbf{t}_n$ 绝对连续的, 因此在 I_n 上也是连续的. 关于第二个论断, 可以参见文献 [7, 例 4.4]. 此外, f 不需要在 $(\bigcup_{n \geq 1} I_n)^c$ 上定义, 因为 $m((\bigcup_{n \geq 1} I_n)^c) = 0$.

我们先假设对任意 $n \geq 1$, U_n 的一个 $d\mathbf{t}_n$ -版本是开的, 在定理 2.3 中再取消这个条件. 这是一个很自然的假设, 因为 $W_n = I_n \setminus U_n$ 的一个典型例子就是文献 [1] 和 [7, 第 4.2 节] 中所述的 Cantor 型集合. 按照文献 [7, (4.7)], 把 U_n 表示成不相交的开区间的并:

$$U_n = \bigcup_{m \geq 1} (a_m^n, b_m^n). \quad (2.4)$$

固定 $f \in \mathcal{G}_\alpha$ 和 $n, m \in \mathbb{N}$. 因为在 (a_m^n, b_m^n) 上 $d\mathbf{t}_n = dx$, 由定理 2.1 得

$$f'(y) - f'(x) = 2\alpha \int_x^y f(z) dz, \quad x, y \in (a_m^n, b_m^n),$$

我们得到了类似文献 [8, 第 3 节] 的调和方程

$$\frac{1}{2} f''(x) = \alpha f(x), \quad x \in (a_m^n, b_m^n). \quad (2.5)$$

显然, f 在 (a_m^n, b_m^n) 上是二次可导的. 所以, (2.5) 的解为

$$f(x) = \frac{\mathbf{c}_+^{n,m}}{2} \cdot e^{\sqrt{2\alpha}x} + \frac{\mathbf{c}_-^{n,m}}{2} \cdot e^{-\sqrt{2\alpha}x}, \quad x \in (a_m^n, b_m^n),$$

其中 $\mathbf{c}_+^{n,m}$ 和 $\mathbf{c}_-^{n,m}$ 是两个常数. 因此有

$$f(x) = \frac{\mathbf{c}_+(x)}{2} e^{\sqrt{2\alpha}x} + \frac{\mathbf{c}_-(x)}{2} e^{-\sqrt{2\alpha}x}, \quad x \in U, \quad (2.6)$$

其中函数 $\mathbf{c}_+, \mathbf{c}_-$ 满足当 $x \in (a_m^n, b_m^n)$ 时 $\mathbf{c}_\pm(x) \equiv \mathbf{c}_\pm^{n,m}$. 这意味着

$$\frac{d\mathbf{c}_\pm}{d\mathbf{t}_n} = 0, \quad d\mathbf{t}_n\text{-a.e. 在 } U_n \text{ 上}, \quad n \geq 1. \quad (2.7)$$

粗略地说, $c_{\pm}$ 在任意区间 I_n 上是一个 Cantor- 型函数, 就如 W_n 是一个 Cantor- 型集合. 由于 f 在 $I = \bigcup_{n \geq 1} I_n$ 上连续并且 $f|_{I_n} \ll \mathbf{t}_n$, 我们希望 $c_{\pm}$ 可以被连续延拓到 I 上, 仍然记作 $c_{\pm}$, 满足 $c_{\pm}|_{I_n} \ll \mathbf{t}_n$. 换句话说, (2.6) 对任意 $x \in I$ 成立, 并且函数 c_+ 和 c_- 定义在 I 上, 满足

(C1) $c_{\pm}|_{I_n} \ll \mathbf{t}_n$ 且 (2.7) 成立.

进一步, 如果 (C1) 成立, 通过简单的计算可以得到, 对任意 $n \geq 1$, 有

$$\frac{df|_{I_n}}{d\mathbf{t}_n}(x) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{2}(c_+(x)e^{\sqrt{2\alpha}x} - c_-(x)e^{-\sqrt{2\alpha}x}), \quad d\mathbf{t}_n\text{-a.e. } x \in U_n, \quad (2.8)$$

$$\frac{df|_{I_n}}{d\mathbf{t}_n}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{dc_+|_{I_n}}{d\mathbf{t}_n}(x)e^{\sqrt{2\alpha}x} + \frac{dc_-|_{I_n}}{d\mathbf{t}_n}(x)e^{-\sqrt{2\alpha}x}\right), \quad d\mathbf{t}_n\text{-a.e. } x \in W_n. \quad (2.9)$$

将 (2.8) 的右端记为 $u(x)$, $x \in U$. 由定理 2.1 得

$$u(y) - u(x) = 2\alpha \int_x^y f(z)dz, \quad \text{a.e. } x, y \in U.$$

因为 $f \in L^2(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, 我们有

(C2) $u(x) := \frac{\sqrt{2\alpha}}{2}(c_+(x)e^{\sqrt{2\alpha}x} - c_-(x)e^{-\sqrt{2\alpha}x})$, $x \in U$ 可以延拓成 $\mathbb{R}$ 上的绝对连续函数.

我们需要指出, $c_{\pm}$ 在 (a_n^m, b_n^m) 上是常数, 所以在 U 上绝对连续, 但在 $W = \bigcup_{n \geq 1} W_n$ 上通常不是绝对连续的.

下面的定理指出 (C1) 和 (C2) 不仅是 $f \in \mathcal{G}_{\alpha}$ 的必要条件, 也是充分条件. 而 U_n 是不是开集并没有影响.

定理 2.3 假设 $f \in \mathcal{F}$, 则 $f \in \mathcal{G}_{\alpha}$ 当且仅当

$$f(x) = \frac{c_+(x)}{2}e^{\sqrt{2\alpha}x} + \frac{c_-(x)}{2}e^{-\sqrt{2\alpha}x}, \quad x \in I, \quad (2.10)$$

其中 (c_+, c_-) 是一对定义在 I 上的函数, 满足 (C1) 和 (C2), $c_{\pm}$ 是由 f 唯一决定的.

证明 假设 $f \in \mathcal{G}_{\alpha}$. 由 (2.2) 中的方程可知, 存在 $\mathbb{R}$ 上的绝对连续函数 u 使得 $u'(x) = 2\alpha f(x)$ 对 $x \in I$ 成立, 并且

$$u(x) = \frac{df|_{I_n}}{d\mathbf{t}_n}(x), \quad d\mathbf{t}_n\text{-a.e. } x \in U_n. \quad (2.11)$$

注意 $d\mathbf{t}_n\text{-a.e. } x \in U_n$ 等价于 $\text{a.e. } x \in I_n$. 在 I 上定义 c_+ 和 c_- :

$$\begin{aligned} c_+(x) &:= e^{-\sqrt{2\alpha}x} \left(f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} u(x) \right), \\ c_-(x) &:= e^{\sqrt{2\alpha}x} \left(f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} u(x) \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

于是有 (2.10), 并且 (C2) 也自动成立了. 显然, $c_{\pm}|_{I_n} \ll \mathbf{t}_n$, 其在 I_n 上的密度为

$$\frac{dc_{\pm}}{d\mathbf{t}_n} = e^{\mp\sqrt{2\alpha}x} \left(\frac{df}{d\mathbf{t}_n} - u(x) \frac{dx}{d\mathbf{t}_n} \right).$$

从而由 (2.11) 可知 (2.7) 成立. 又因为 U 在 $\mathbb{R}$ 中稠, u 由 f 唯一决定, 故 $c_{\pm}$ 也是唯一的.

反过来, 假设 f 由 (2.10) 定义, 并且 (c_+, c_-) 满足 (C1) 和 (C2). 根据 (2.8) 和 (C2), 我们有

$$\frac{df|_{I_n}}{d\mathbf{t}_n}(x) = u(x), \quad d\mathbf{t}_n\text{-a.e. } x \in U_n,$$

其中 u 在 $\mathbb{R}$ 上绝对连续. 因此, 对 $d\mathbf{t}_m$ -a.e. $x \in U_m$ 和 $d\mathbf{t}_n$ -a.e. $y \in U_n$, 有

$$\begin{aligned} \frac{df|_{I_n}}{d\mathbf{t}_n}(y) - \frac{df|_{I_m}}{d\mathbf{t}_m}(x) &= \int_x^y u'(z)dz \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_{(x,y) \cap U_n} \frac{du}{d\mathbf{t}_n} d\mathbf{t}_n \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_{(x,y) \cap U_n} \left(\alpha(\mathbf{c}_+(z)e^{\sqrt{2\alpha}z} + \mathbf{c}_-(z)e^{-\sqrt{2\alpha}z}) \right) \frac{dz}{d\mathbf{t}_n} d\mathbf{t}_n \\ &= 2\alpha \sum_{n \geq 1} \int_{(x,y) \cap U_n} f(z)dz \\ &= 2\alpha \int_x^y f(z)dz. \end{aligned}$$

定理得证. □

注 2.4 (1) 从证明中可知, 如果 $(\mathbf{c}_+, \mathbf{c}_-)$ 满足 (C1) 和 (C2), 则

$$\frac{d\mathbf{c}_+|_{I_n}}{d\mathbf{t}_n}(x)e^{\sqrt{2\alpha}x} = \frac{d\mathbf{c}_-|_{I_n}}{d\mathbf{t}_n}(x)e^{-\sqrt{2\alpha}x}, \quad d\mathbf{t}_n\text{-a.e. } x \in W_n, \quad n \geq 1.$$

也就是说 (2.9) 右端的两项是相等的.

(2) 当 f 具有 (2.10) 的形式时, $f \in \mathcal{F}$ 就变成了 (2.10)、(2.8) 和 (2.9) 的 L^2 可积性, 分别等价于

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{c}_+(x)^2 e^{2\sqrt{2\alpha}x} dx < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} \mathbf{c}_-(x)^2 e^{-2\sqrt{2\alpha}x} dx < \infty$$

和

$$\sum_{n \geq 1} \int_{W_n} \left(\frac{d\mathbf{c}_+}{d\mathbf{t}_n} e^{\sqrt{2\alpha}x} \right)^2 d\mathbf{t}_n = \sum_{n \geq 1} \int_{W_n} \left(\frac{d\mathbf{c}_-}{d\mathbf{t}_n} e^{-\sqrt{2\alpha}x} \right)^2 d\mathbf{t}_n < \infty.$$

(3) 当 $\alpha = 0$ 时, 显然 $\mathbf{c}_+ = \mathbf{c}_-$ 且 (C2) 是平凡的 ($u \equiv 0$). 因此, (2.10) 与 (2.3) 中的条件是一致的. 下面是一个非常简单的 $(\mathbf{c}_+, \mathbf{c}_-)$ 满足 (C1) 和 (C2) 的例子.

例 2.5 固定正整数 n 以及 $-\infty = d_0 < d_1 < \cdots < d_n < d_{n+1} = \infty$. 令 $I_i := (d_{i-1}, d_i)$ ($1 \leq i \leq n+1$) 为扩张 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 的区间. 取两组常数 $\{\mathbf{c}_+^{(i)} : i = 1, \dots, n+1\}$ 和 $\{\mathbf{c}_-^{(i)} : i = 1, \dots, n+1\}$ 使得

$$\mathbf{c}_+^{(i)} e^{\sqrt{2\alpha}d_i} - \mathbf{c}_-^{(i)} e^{-\sqrt{2\alpha}d_i} = \mathbf{c}_+^{(i+1)} e^{\sqrt{2\alpha}d_i} - \mathbf{c}_-^{(i+1)} e^{-\sqrt{2\alpha}d_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

以及 $\mathbf{c}_-^{(1)} = \mathbf{c}_+^{(n+1)} = 0$. 定义

$$\mathbf{c}_{\pm}(x) := \mathbf{c}_{\pm}^{(i)}, \quad x \in I_i, \quad 1 \leq i \leq n+1,$$

则 $(\mathbf{c}_+, \mathbf{c}_-)$ 满足 (C1) 和 (C2). 并且容易验证 $f \in \mathcal{F}$, 从而 $f \in \mathcal{G}_{\alpha}$. 特别地, 任取 $a = d_i$ ($1 \leq i \leq n$), 令

$$f(x) := \begin{cases} e^{\sqrt{2\alpha}(x-a)}, & x < a, \\ -e^{\sqrt{2\alpha}(a-x)}, & x > a, \end{cases}$$

则 f 属于 $\mathcal{G}_{\alpha}$.

3 补丁过程

本节的目的是利用上一节讨论的函数 $\mathbf{c}_\pm$ 诱导一个所谓的“补丁过程”. 首先回顾文献 [7, 第 4.2 节] 中 $\mathcal{G}$ 的补丁过程. 注意 $\mathcal{G}$ 由 (2.1) 给出, 它是 $H^1_e(\mathbb{R})$ 在 $\mathcal{F}_e$ 中关于 $\mathcal{E}$ 的伪正交补. 显然, $\mathcal{G}$ 不是一个真正的 Dirichlet 空间, 因为它不在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠. 然而, 文献 [7, 引理 4.6] 断言了 $\mathcal{G}$ 与形式 $\mathcal{E}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的广义 Dirichlet 型, 意思是它满足 Dirichlet 型中除了在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠以外的所有条件. 注意 $(\mathbb{R}, m, \mathcal{G}, \mathcal{E})$ 在 Fukushima 的术语中被称为 “D- 空间”. Fukushima^[9] 证明了任何 D- 空间 (如 $(\mathbb{R}, m, \mathcal{G}, \mathcal{E})$) 由一个正则表示, 即存在另一个 Hilbert 空间 $L^2(E', m')$ 上的正则 Dirichlet 型 $(\mathcal{E}', \mathcal{G}')$, 以及一个从 $\mathcal{G} \cap L^\infty(\mathbb{R})$ 到 $\mathcal{G}' \cap L^\infty(E')$ 的代数同构 Φ , 使得

$$\|u\|_\infty = \|\Phi u\|_\infty, \quad \mathcal{E}(u, u) = \mathcal{E}'(\Phi u, \Phi u), \quad (u, u)_m = (\Phi u, \Phi u)_{m'}. \quad (3.1)$$

按照文献 [3, 第 3.2 节], Li 和 Ying 在文献 [7, 第 4.2 节] 中引入 “补丁变换” 找到了 $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ 的正则表示. 简单地讲, 在假设 “ U_n 是开集” 下, 任何 $\mathcal{G}$ 中的函数在区间 (a_m^n, b_m^n) (见 (2.4)) 上都是常数. 补丁变换是将每个这样的区间看作一整部分并将其压缩成一个点, 这样就能在一个新状态空间上得到一个正则 Dirichlet 型, 它就是所需要的正则表示. 具体的细节可以参见文献 [3, 第 3.2 节] 和 [7, 第 4.2 节]. 但是, 下面的例子说明 $(\mathcal{E}, \mathcal{G}_\alpha)$ 通常不是 Markov 的, 因此不是一个广义 Dirichlet 型. 所以, 文献 [7] 中对 $\mathcal{G}$ 用的 “补丁方法” 对 $\mathcal{G}_\alpha$ 并不适用.

例 3.1 考虑 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 是既约的特殊情形, 即 $I_1 = I = \mathbb{R}$, 尺度函数 $\mathbf{t} \in T_\infty(\mathbb{R})$ 为 $\mathbf{t}(x) = x + c(x)$, 其中 c 是 $[0, 1]$ 上的标准 Cantor 函数且 $x < 0$ 时 $c(x) := 0$, $x > 1$ 时 $c(x) := 1$. 显然,

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{dx}{d\mathbf{t}} = 1 \right\} = (-\infty, 0) \cup ([0, 1] \setminus K) \cup (1, \infty),$$

其中 K 是 $[0, 1]$ 上的标准 Cantor 集. 由定理 2.3 可知, 任何函数 $f \in \mathcal{G}_\alpha$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的限制可以表示为

$$f(x) = k_+ e^{\sqrt{2\alpha}x} + k_- e^{-\sqrt{2\alpha}x}, \quad x < 0,$$

其中 k_+ 和 k_- 是两个常数. 由注 2.4 (2) 可知 $k_- = 0$. 不失一般性, 我们取函数 $f \in \mathcal{G}_\alpha$ 使得

$$f(x) = k_+ e^{\sqrt{2\alpha}x}, \quad x < 0,$$

其中 $k_+ > 1$. 考虑正规压缩 $\phi(x) = 1 \wedge x \vee 0$. 显然 $\phi \circ f \notin \mathcal{G}_\alpha$, 因此 $\mathcal{G}_\alpha$ 不是 Markov 的.

条件 (2.7) 启示我们将关注点转移到函数 $\mathbf{c}_\pm$ 上. 粗略地看, 如果 $\alpha = 0$, 则 $\mathbf{c}_+ = \mathbf{c}_- = f$, 它是 $\mathcal{G}$ 中的函数, 是 Markov 的 (参见文献 [7, 引理 4.6]). 下面对所有可能的函数 $\mathbf{c}_\pm$ 作一个刻画.

方便起见, 记

$$h_\pm(x) := e^{\pm\sqrt{2\alpha}x}.$$

根据定理 2.3 可知, $\mathbf{c}_\pm$ 是由 f 唯一决定的. 于是可以记

$$\mathbf{c}_\pm := \Gamma_\pm f, \quad f \in \mathcal{G}_\alpha,$$

从而诱导出 $\mathcal{G}_\alpha$ 上的线性映射 $\Gamma_\pm$. 令

$$\mathbf{m}_\pm(dx) := h_\pm(x)^2 dx. \quad (3.2)$$

定义

$$\mathfrak{C}_{\pm} := \left\{ \mathfrak{c} \in L^2(\mathbb{R}; \mathfrak{m}_{\pm}) : \mathfrak{c}|_{I_n} \ll \mathfrak{t}_n, \frac{d\mathfrak{c}|_{I_n}}{d\mathfrak{t}_n} = 0, d\mathfrak{t}_n\text{-a.e. 在 } U_n \text{ 上}, \right. \\ \left. \sum_{n \geq 1} \int_{I_n} \left(\frac{d\mathfrak{c}}{d\mathfrak{t}_n} \cdot h_{\pm} \right)^2 d\mathfrak{t}_n < \infty \right\}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{E}_{\pm}(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2) := \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \int_{I_n} \frac{d\mathfrak{c}_1}{d\mathfrak{t}_n} \frac{d\mathfrak{c}_2}{d\mathfrak{t}_n} h_{\pm}^2 d\mathfrak{t}_n, \quad \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2 \in \mathfrak{C}_{\pm}, \quad (3.4)$$

以及

$$\mathcal{E}_{\pm,1}(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2) := \mathcal{E}_{\pm}(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2) + (\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)_{\mathfrak{m}_{\pm}}.$$

注意我们视 $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2 \in \mathfrak{C}_{\pm}$ 为相等当且仅当 $\mathfrak{c}_1(x) = \mathfrak{c}_2(x)$ 对 $x \in I$ 成立.

定理 3.2 由 (2.10) 诱导的映射

$$\Gamma_{\pm} : \mathcal{G}_{\alpha} \rightarrow \mathfrak{C}_{\pm}, \quad f \mapsto \mathfrak{c}_{\pm}$$

是一个线性双射, 并且对任意的 $f \in \mathcal{G}_{\alpha}$, 有

$$\mathcal{E}_{\pm}(\Gamma_{\pm}f, \Gamma_{\pm}f) = \frac{1}{2} \int_W d\mu_{(f)}, \quad (3.5)$$

其中 $\mu_{(f)}$ 是 f 关于 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 的能量测度. 此外, 存在常数 $K_{\alpha} > 1$ 使得对任意的 $f \in \mathcal{G}_{\alpha}$, 有

$$K_{\alpha}^{-1} \mathcal{E}_{\pm,1}(\Gamma_{\pm}f, \Gamma_{\pm}f) \leq \mathcal{E}_1(f, f) \leq K_{\alpha} \mathcal{E}_{\pm,1}(\Gamma_{\pm}f, \Gamma_{\pm}f). \quad (3.6)$$

我们首先证明一个引理.

引理 3.3 如果 $g \in L^2(\mathbb{R})$, 则对任意 $\lambda > 0$, 有

$$\int_{\mathbb{R}} \left[e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^x g(z) e^{\lambda z} dz \right]^2 dx \leq \lambda^{-2} \|g\|_{L^2}^2, \\ \int_{\mathbb{R}} \left[e^{\lambda x} \int_x^{\infty} g(z) e^{-\lambda z} dz \right]^2 dx \leq \lambda^{-2} \|g\|_{L^2}^2. \quad (3.7)$$

证明 令 $G(x) = e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^x g(z) e^{\lambda z} dz$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$G(x)^2 \leq e^{-2\lambda x} \int_{-\infty}^x g(z)^2 dz \int_{-\infty}^x e^{2\lambda z} dz = \frac{1}{2\lambda} \int_{-\infty}^x g(z)^2 dz \rightarrow 0,$$

当 $x \rightarrow -\infty$ 时. 由于 $G' = -\lambda G + g$, 我们有

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^2}^2 &\geq \int_{-\infty}^a g(x)^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^a (G'^2 + 2\lambda G'G + \lambda^2 G^2) dx \\ &= \int_{-\infty}^a (G'^2 + \lambda^2 G^2) dx + \lambda G(a)^2 \\ &\geq \lambda^2 \int_{-\infty}^a G^2 dx. \end{aligned}$$

令 $a \rightarrow \infty$ 即可得到第一个不等式, 第二个类似. □

定理 3.2 的证明 线性是显然的. 要证明 $\Gamma_{\pm}$ 是一个双射, 等价于证明对任意 $\mathbf{c}_{\pm} \in \mathfrak{C}_{\pm}$, 存在唯一的 $\mathbf{c}_{\mp} \in \mathfrak{C}_{\mp}$ 满足 (C2).

不失一般性, 我们固定 $\mathbf{c}_{+} \in \mathfrak{C}_{+}$, 并假设 $\mathbf{c}_{-} \in \mathfrak{C}_{-}$ 满足 (C2). 于是, $v(x) := \mathbf{c}_{+}(x)h_{+}(x)^2 - \mathbf{c}_{-}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在绝对连续的延拓, 仍然记作 v . 从而, 对 $x, y \in I$, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{-}(y) - \mathbf{c}_{-}(x) &= \mathbf{c}_{+}(y)h_{+}(y)^2 - \mathbf{c}_{+}(x)h_{+}(x)^2 - \int_x^y v'(z)dz \\ &= \mathbf{c}_{+}(y)h_{+}(y)^2 - \mathbf{c}_{+}(x)h_{+}(x)^2 - \sum_{n \geq 1} \int_{(x,y) \cap U_n} \frac{dv}{d\mathbf{t}_n} d\mathbf{t}_n \\ &= \mathbf{c}_{+}(y)h_{+}(y)^2 - \mathbf{c}_{+}(x)h_{+}(x)^2 - 2\sqrt{2\alpha} \int_x^y \mathbf{c}_{+}(z)h_{+}(z)^2 dz. \end{aligned}$$

因此,

$$\mathbf{c}_{-}(x) - \mathbf{c}_{+}(x)h_{+}(x)^2 + 2\sqrt{2\alpha} \int_{-\infty}^x \mathbf{c}_{+}(z)h_{+}(z)^2 dz \equiv C,$$

其中 C 是某个常数. 由 (3.7) 可知 $Ch_{-}(x)$ 属于 $L^2(\mathbb{R})$. 故 $C = 0$,

$$\mathbf{c}_{-}(x) = \mathbf{c}_{+}(x)h_{+}(x)^2 - 2\sqrt{2\alpha} \int_{-\infty}^x \mathbf{c}_{+}(z)h_{+}(z)^2 dz, \quad x \in I. \quad (3.8)$$

显然, 由 (3.8) 定义的 $\mathbf{c}_{-}$ 在 $\mathfrak{C}_{-}$ 中是唯一的, 并且满足 (C2). 因此 $\Gamma_{\pm}$ 是一个双射. 根据 (2.8)–(2.10), 我们可以得到 (3.5) 以及

$$\frac{1}{2} \int_U d\mu_{\langle f \rangle} + (f, f)_m = \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}} ((\Gamma_{+}f)h_{+} - (\Gamma_{-}f)h_{-})^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} ((\Gamma_{+}f)h_{+} + (\Gamma_{-}f)h_{-})^2 dx$$

对 $f \in \mathcal{G}_{\alpha}$ 成立. 由 (3.7) 和 (3.8) 得

$$\int_{\mathbb{R}} ((\Gamma_{+}f)h_{+} - (\Gamma_{-}f)h_{-})^2 dx \leq 4(\Gamma_{\pm}f, \Gamma_{\pm}f)_{\mathbf{m}_{\pm}}.$$

通过简单的计算得到

$$\left(\alpha \wedge \frac{1}{2}\right) \mathcal{E}_{\pm,1}(\Gamma_{\pm}f, \Gamma_{\pm}f) \leq \mathcal{E}_1(f, f) \leq (2\alpha + 4) \mathcal{E}_{\pm,1}(\Gamma_{\pm}f, \Gamma_{\pm}f).$$

定理得证. $\square$

推论 3.4 令 $\mathfrak{C}_{\pm}$ 、 $\mathcal{E}_{\pm}$ 和 $\mathbf{m}_{\pm}$ 分别由 (3.3)、(3.4) 和 (3.2) 给出, 则 $(\mathcal{E}_{\pm}, \mathfrak{C}_{\pm})$ 是 $L^2(\mathbb{R}, \mathbf{m}_{\pm})$ 上的一个广义 Dirichlet 型.

证明 容易验证 $(\mathcal{E}_{\pm}, \mathfrak{C}_{\pm})$ 是 Markov 的对称型. 闭性则是由 (3.6) 以及 $(\mathcal{E}, \mathcal{G}_{\alpha})$ 的闭性得到. $\square$

推论 3.5 对任意的 $\alpha > 0$, $f \in \mathcal{G}_{\alpha}$ 当且仅当

$$f(x) = \mathbf{c}_{+}(x)h_{+}(x) - \sqrt{2\alpha}h_{-}(x) \int_{-\infty}^x \mathbf{c}_{+}(z)h_{+}(z)^2 dz, \quad \mathbf{c}_{+} \in \mathfrak{C}_{+},$$

或者等价地,

$$f(x) = \mathbf{c}_{-}(x)h_{-}(x) - \sqrt{2\alpha}h_{+}(x) \int_x^{\infty} \mathbf{c}_{-}(z)h_{-}(z)^2 dz, \quad \mathbf{c}_{-} \in \mathfrak{C}_{-}.$$

现在将应用前面介绍的补丁方法, 其关键是一个由 $\mathbf{t}_n$ 诱导的变换. 注意到当 I_n 非闭时, $\mathbf{t}_n(I_n)$ 是无界的, 所以考虑 $(\mathcal{E}_\pm, \mathfrak{C}_\pm)$ 在每个 I_n 上的限制而非 $(\mathcal{E}_\pm, \mathfrak{C}_\pm)$ 本身. 固定整数 $n \geq 1$. 令

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_\pm^n &:= \{\mathfrak{c} \mid I_n : \mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_\pm\} \\ &= \left\{ \mathfrak{c} \in L^2(I_n; \mathbf{m}_\pm \mid I_n) : \mathfrak{c} \ll \mathbf{t}_n, \frac{d\mathfrak{c}}{d\mathbf{t}_n} = 0, d\mathbf{t}_n\text{-a.e. 在 } U_n \text{ 上}, \int_{I_n} \left(\frac{d\mathfrak{c}}{d\mathbf{t}_n} h_\pm \right)^2 d\mathbf{t}_n < \infty \right\}, \end{aligned}$$

对任意 $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_\pm^n$, 有

$$\mathcal{E}_\pm^n(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}) := \frac{1}{2} \int_{I_n} \left(\frac{d\mathfrak{c}}{d\mathbf{t}_n} \right)^2 h_\pm^2 d\mathbf{t}_n.$$

令 $\mathbf{m}_\pm^n := \mathbf{m}_\pm \mid I_n$. 与推论 3.4 类似, 我们可以得到 $(\mathcal{E}_\pm^n, \mathfrak{C}_\pm^n)$ 是一个 $L^2(I_n, \mathbf{m}_\pm^n)$ 上的广义 Dirichlet 型.

回忆 $I_n = \langle a_n, b_n \rangle$. 从现在开始, 我们作与文献 [7, 第 4.2 节] 中相同的基本假设:

(H1) U_n 有 (并且就取成) 一个 $d\mathbf{t}_n$ -a.e. 开的版本, 并将 U_n 写成 (2.4);

(H2) 对任意 $x \in W_n \cap (a_n, b_n)$ 以及 $\epsilon > 0$, 有 $d\mathbf{t}_n((x - \epsilon, x + \epsilon) \cap W_n) > 0$;

(H3) $d\mathbf{t}_n(W_n) > 0$.

根据文献 [7, 第 4.2 节] 中所述, (H2) 不是本质的, U_n 和 W_n 结构的相关说明参见文献 [7, 注 4.5].

我们用补丁变换给出 $(\mathcal{E}_\pm^n, \mathfrak{C}_\pm^n)$ 的正则表示. 由于权重函数 $h_\pm$ 的存在, 情形比文献 [7] 中的复杂很多. 令

$$l_n := \inf\{x : x \in W_n\}, \quad r_n := \sup\{x : x \in W_n\}.$$

在 I_n 上定义如下变换, 将 (2.4) 中的每个开区间 (a_m^n, b_m^n) 压缩成一个点:

$$j_n(x) := \int_{e_n}^x 1_{W_n}(y) d\mathbf{t}_n(y), \quad x \in I_n, \quad (3.9)$$

其中 e_n 是 (a_n, b_n) 中的一个固定点. 令

$$l_n^* := j_n(l_n) \geq -\infty, \quad r_n^* := j_n(r_n) \leq \infty.$$

对右端点 r_n 和 r_n^* , 有以下可能的情形:

(R1) $b_n < \infty, b_n \notin I_n$: 因为 U_n 开并且 $\mathbf{t}_n(b_n) = \infty$, 所以 $r_n = b_n, r_n^* = \infty$.

(R2) $b_n < \infty, b_n \in I_n$: 此时 $r_n = b_n, r_n^* < \infty$.

(R3) $b_n = \infty$:

(R3i) $r_n = \infty, r_n^* < \infty$. 下面的例子说明这是有可能的. 不失一般性, 设 $I_n = [0, \infty)$. 取 $[0, 1]$ 上的标准 Cantor 函数 c . 定义 $[0, \infty)$ 上的函数 $C(x)$ 如下: 当 $x \in [0, 1]$ 时, $C(x) := c(x)$, 对任意正整数 $k \geq 1$, 当 $x \in [k, k+1]$ 时,

$$C(x) := 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \cdot c(x-k).$$

再令 $\mathbf{t}_n(x) := x + C(x)$, 则有 $r_n = \infty$, 以及

$$r_n^* = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots < \infty.$$

(R3ii) $r_n = \infty, r_n^* = \infty$. 在上面的例子中, 将 C 的定义改为

$$C(x) := k + c(x-k), \quad x \in [k, k+1],$$

就成了这种情形的例子.

(R3iii) $r_n < \infty$, $r_n^* < \infty$. 在例 3.1 中, $r_1 = r_1^* = 1$.

左端点 l_n 和 l_n^* 对应的情形记为 (L1)、(L2)、(L3)、(L3i)、(L3ii) 和 (L3iii). 定义区间

$$J_+^{n*} := \langle l_n^*, r_n^* \rangle,$$

其中 $r_n^* \in J_+^{n*}$ 当且仅当情形 (R2), $l_n^* \in J_+^{n*}$ 当且仅当情形 (L2)、(L3i) 和 (L3iii). 类似地,

$$J_-^{n*} := \langle l_n^*, r_n^* \rangle,$$

其中 $r_n^* \in J_-^{n*}$ 当且仅当情形 (R2)、(R3i) 和 (R3iii), 且 $l_n^* \in J_-^{n*}$ 当且仅当情形 (L2). 注意在情形 (R1) 和 (R3ii) (对应地, (L1) 和 (L3ii)) 下, $r_n^* = \infty$ (对应地, $l_n^* = -\infty$).

补丁变换 j_n 诱导 $\mathbf{m}_\pm^n$ 在 $J_\pm^{n*}$ 上的测度

$$\mathbf{m}_\pm^{n*} := \mathbf{m}_\pm^n \circ j_n^{-1},$$

规定 $\mathbf{m}_\pm^{n*}(J_\pm^{n*} \setminus j_n(I_n)) = 0$. 容易验证 $\mathbf{m}_\pm^{n*}$ 是 $J_\pm^{n*}$ 上的一个满支撑 Radon 测度. 注意 $\mathbf{m}_\pm^{n*}$ 关于 Lebesgue 测度不是绝对连续的. 其 Lebesgue 分解为

$$\mathbf{m}_\pm^{n*} = h_\pm^*(x)^2 dx + \kappa_\pm,$$

其中 $h_\pm^*(x)^2 dx$ 为绝对连续部分.

固定一个函数 $\mathbf{c} \in \mathfrak{C}_\pm$. 由于 $\mathbf{c} \ll \mathbf{t}_n$ 且 $\mathbf{c}$ 在 (a_m^n, b_m^n) 上是常数, 补丁变换诱导出一个 $j_n(I_n)$ 上的绝对连续函数 $\mathbf{c}^*$ 满足

$$\mathbf{c}(x) = \mathbf{c}^* \circ j_n(x), \quad x \in I_n.$$

我们将 $\mathcal{E}_\pm^n(\mathbf{c}, \mathbf{c})$ 重新表示成

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\pm^n(\mathbf{c}, \mathbf{c}) &= \frac{1}{2} \int_{l_n}^{r_n} \left(\frac{d\mathbf{c}^* \circ j_n}{d\mathbf{t}_n} \right)^2 h_\pm^2 d\mathbf{t}_n \\ &= \frac{1}{2} \int_{l_n^*}^{r_n^*} \left(\frac{d\mathbf{c}^*}{dx} \right)^2 (h_\pm^*)^2 dx. \end{aligned}$$

上式的最后一项记为 $\mathcal{E}_\pm^{n*}(\mathbf{c}^*, \mathbf{c}^*)$. 进一步定义

$$\mathfrak{C}_\pm^{n*} := \{\mathbf{c}^* \in L^2(J_\pm^{n*}, \mathbf{m}_\pm^{n*}) : \exists \mathbf{c} \in \mathfrak{C}_\pm^n \text{ s.t. } \mathbf{c}^*(x) = \mathbf{c} \circ j_n^{-1}(x), x \in J_\pm^{n*} \cap j_n(I_n)\}.$$

显然, j_n^{-1} 是一个 $(\mathfrak{C}_\pm^n, \mathcal{E}_\pm^n)$ 到 $(\mathfrak{C}_\pm^{n*}, \mathcal{E}_\pm^{n*})$ 的同构. 下面根据不同情形将定义具体写出来 (见表 1).

除了 (L3i) 和 (R3iii) 对于 $(\mathfrak{C}_+^{n*}, \mathcal{E}_+^{n*})$, 以及 (R3i) 和 (L3iii) 对于 $(\mathfrak{C}_-^n, \mathcal{E}_-^n)$, 我们有 $J_\pm^{n*} = j_n(I_n)$, 因此,

$$\mathfrak{C}_\pm^{n*} = \{\mathbf{c}^* \in L^2(J_\pm^{n*}, \mathbf{m}_\pm^{n*}) : \mathbf{c}^* \text{ AC}, \mathcal{E}_\pm^{n*}(\mathbf{c}^*, \mathbf{c}^*) < \infty\}.$$

“AC” 表示 “绝对连续”. 对于 $(\mathfrak{C}_+^{n*}, \mathcal{E}_+^{n*})$ 在 (L3i) 下的情形, $l_n^* \in J_+^{n*}$ 但 $l_n^* \notin j_n(I_n)$, 因此,

$$\mathfrak{C}_+^{n*} = \{\mathbf{c}^* \in L^2(J_+^{n*}, \mathbf{m}_+^{n*}) : \mathbf{c}^* \text{ AC 在 } (l_n^*, r_n^*) \text{ 上}, \mathcal{E}_+^{n*}(\mathbf{c}^*, \mathbf{c}^*) < \infty\},$$

表 1 区间开闭情况

	J_+^{n*}	J_-^{n*}	$j_n(I_n)$
(R1)	$\langle l_n^*, \infty \rangle$	$\langle l_n^*, \infty \rangle$	$\langle l_n^*, \infty \rangle$
(R2)	$\langle l_n^*, r_n^*]$	$\langle l_n^*, r_n^*]$	$\langle l_n^*, r_n^*]$
(R3i)	$\langle l_n^*, r_n^* \rangle$	$\langle l_n^*, r_n^* \rangle$	$\langle l_n^*, r_n^* \rangle$
(R3ii)	$\langle l_n^*, \infty \rangle$	$\langle l_n^*, \infty \rangle$	$\langle l_n^*, \infty \rangle$
(R3iii)	$\langle l_n^*, r_n^* \rangle$	$\langle l_n^*, r_n^*]$	$\langle l_n^*, r_n^*]$

其中是否 $r_n^* \in \langle l_n^*, r_n^* \rangle$ 取决于 (R) 的类型. 对于 $(\mathfrak{C}_+^{n*}, \mathcal{E}_+^{n*})$ 在 (R3iii) 下的情形, $r_n^* \notin J_+^{n*}$ 但 $r_n^* \in j_n(I_n)$. 注意到任何 $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_+^{n*}$ 在 $[r_n, \infty)$ 上都是常数, 而 $\mathfrak{m}_+^n((r_n, \infty)) = \infty$. 故在 $[r_n, \infty)$ 上, $\mathfrak{c} = 0$. 因此,

$$\mathfrak{C}_+^{n*} = \left\{ \mathfrak{c}^* \in L^2(J_+^{n*}, \mathfrak{m}_+^{n*}) : \mathfrak{c}^* \text{ AC 在 } \langle l_n^*, r_n^* \rangle \text{ 上, } \lim_{x \uparrow r_n^*} \mathfrak{c}^*(x) = 0, \mathcal{E}_+^{n*}(\mathfrak{c}^*, \mathfrak{c}^*) < \infty \right\},$$

其中是否 $l_n^* \in \langle l_n^*, r_n^* \rangle$ 取决于 (L) 的类型. $(\mathfrak{C}_-^{n*}, \mathcal{E}_-^{n*})$ 在 (R3i) 和 (L3iii) 下的情形是类似的. 下面是本节的主要结果. 记住 $J_\pm^{n*}$ 关于 $j_n(I_n)$ 作的端点调整是为了保证正则性.

定理 3.6 二次型 $(\mathcal{E}_\pm^{n*}, \mathfrak{C}_\pm^{n*})$ 是 $L^2(J_\pm^{n*}, \mathfrak{m}_\pm^{n*})$ 上的正则 Dirichlet 型, 并且 $(J_\pm^{n*}, \mathfrak{m}_\pm^{n*}, \mathfrak{C}_\pm^{n*}, \mathcal{E}_\pm^{n*})$ 是 $(I_n, \mathfrak{m}_\pm^n, \mathfrak{C}_\pm^n, \mathcal{E}_\pm^n)$ 的一个正则表示.

证明 我们在 (L2) 和每种 (R) 下证明正则性, 则其他情形也能立即得到. 为方便起见, 设 $l_n^* = 0$.

在 (R2) 下, $\mathfrak{C}_\pm^{n*} \subset C([0, r_n^*])$; 在 (R3iii) 下, $\mathfrak{C}_-^{n*} \subset C([0, r_n^*])$. 正则性显然.

对于 (R1) 和 (R3ii), 注意到 $r_n^* = \infty$. 存在 $[0, \infty)$ 上的紧支撑函数 $\{\theta_k : k \geq 1\}$ 使得 $0 \leq \theta_k \leq 1$, $\theta_k \uparrow 1$, 且 $|\theta'_k| < 1/k$. 于是, 对任意 $\mathfrak{c}^* \in \mathfrak{C}_\pm^{n*}$, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\pm,1}^{n*}(\mathfrak{c}^*(1-\theta_k), \mathfrak{c}^*(1-\theta_k)) &= \int_0^\infty \mathfrak{c}^{*2}(1-\theta_k)^2 d\mathfrak{m}_\pm^{n*} + \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathfrak{c}^{*'}(1-\theta_k) + \mathfrak{c}^* \theta'_k)^2 (h_\pm^*)^2 dx \\ &\leq \int_0^\infty \mathfrak{c}^{*2}[(1-\theta_k)^2 + \theta_k'^2] d\mathfrak{m}_\pm^{n*} + \int_0^\infty (\mathfrak{c}^{*'})^2 (1-\theta_k)^2 (h_\pm^*)^2 dx \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时. 因此, $\mathfrak{C}_\pm^{n*} \cap C_c(J_\pm^{n*})$ 在 $\mathfrak{C}_\pm^{n*}$ 中是 $\mathcal{E}_{\pm,1}^{n*}$ -稠的.

情形 (R3i) 对 $\mathfrak{C}_+^{n*}$ 和 $\mathfrak{C}_-^{n*}$ 是不同的. 对于 $\mathfrak{c}^* \in \mathfrak{C}_-^{n*}$, 令

$$\mathfrak{c}_k^*(x) = \mathfrak{c}^*(0) + \int_0^x ((-k) \vee \mathfrak{c}^{*'}(z)) \wedge k \, dz,$$

则 $\mathfrak{c}_k^* \in C([0, r_n^*])$ 且由控制收敛定理知, $\mathfrak{c}_k^*(x) \rightarrow \mathfrak{c}^*(x)$ 对 $x \in [0, r_n^*)$ 成立. 注意

$$|\mathfrak{c}_k^*(x) - \mathfrak{c}^*(x)| \leq \int_0^x (\mathfrak{c}^{*'}(z) - k)^+ dz,$$

以及

$$\begin{aligned} \left(\int_0^x |\mathfrak{c}^{*'}(z)| dz \right)^2 &\leq \int_0^x h_+^*(z)^2 dz \int_0^x \mathfrak{c}^{*'}(z)^2 h_-^*(z)^2 dz \\ &\leq M \int_0^x h_+^*(z)^2 dz \end{aligned}$$

对某个常数 M 成立. 我们有

$$\begin{aligned}
 \int_0^{r_n^*} \left(\int_0^x |\mathbf{c}^{*'}(z)| dz \right)^2 \mathbf{m}_-^{n*}(dx) &\leq M \int_0^{r_n^*} \mathbf{m}_-^{n*}(dx) \int_0^x h_+^*(z)^2 dz \\
 &= M \int_{l_n}^\infty h_-(x)^2 dx \int_{l_n}^x h_+(z)^2 1_{W_n}(z) d\mathbf{t}_n(z) \\
 &= M \int_{l_n}^\infty h_+(z)^2 1_{W_n}(z) d\mathbf{t}_n(z) \int_z^\infty h_-(x)^2 dx \\
 &= (2\sqrt{2\alpha})^{-1} M \int_{l_n}^\infty h_+(z)^2 h_-(x)^2 1_{W_n}(z) d\mathbf{t}_n(z) \\
 &= (2\sqrt{2\alpha})^{-1} M r_n^* \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

因此, 再由控制收敛定理可知, $\mathbf{c}_k^* \rightarrow \mathbf{c}^*$ 在 $\mathcal{E}_{-1}^{n*}$ 范数意义下. 对于 $\mathbf{c}^* \in \mathfrak{C}_+^{n*}$, 因为当 $x, y \rightarrow r_n^*$ 时,

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{c}^*(x) - \mathbf{c}^*(y)| &\leq \int_x^y |\mathbf{c}^{*'}(z)| dz \\
 &\leq \int_x^y h_-(z)^2 dz \int_x^y \mathbf{c}^{*'}(z)^2 h_+(z)^2 dz \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{c}^*(r_n^*) := \lim_{x \uparrow r_n^*} \mathbf{c}^*(x)$ 存在. 而如果 $\mathbf{c}^*(r_n^*) \neq 0$, 则存在 $\delta, \varepsilon > 0$, 使得 $\mathbf{c}^*(r_n^*)^2 > \varepsilon$ 在 $(r_n^* - \delta, r_n^*)$ 上成立, 于是,

$$\int_0^{r_n^*} \mathbf{c}^*(x)^2 \mathbf{m}_+^{n*}(dx) \geq \int_{r_n^* - \delta}^{r_n^*} \varepsilon \mathbf{m}_+^{n*}(dx) = \infty,$$

矛盾. 因此 $\mathbf{c}^*(r_n^*) = 0$ 且 $\mathfrak{C}_+^{n*} \subset C_0([0, r_n^*))$, 其中 C_0 表示在紧集外消失的连续函数. 从而, $(\mathfrak{C}_+^{n*}, \mathcal{E}_+^{n*})$ 是正则的 (参见文献 [4, 第 1.3.12 小节]).

在 (R3iii) 下, 我们也有 $\mathfrak{C}_+^{n*} \subset C_0([0, r_n^*))$, 所以正则性成立.

最后, 要说明 $(J_\pm^{n*}, \mathbf{m}_\pm^{n*}, \mathfrak{C}_\pm^{n*}, \mathcal{E}_\pm^{n*})$ 是一个正则表示, 定义 $\Phi: \mathfrak{C}_\pm^n \rightarrow \mathfrak{C}_\pm^{n*}$ 使得

$$(\Phi \mathbf{c})(x) = \mathbf{c} \circ j^{-1}(x), \quad \mathbf{c} \in \mathfrak{C}_\pm^n.$$

由 $\mathfrak{C}_\pm^{n*}$ 和 $\mathcal{E}_\pm^{n*}$ 的定义可知 (3.1) 中的等式成立. 注意 $\mathbf{m}_\pm^{n*}(J_\pm^{n*} \setminus j_n(I_n)) = 0$, 且 $j_n(I_n) \setminus J_\pm^{n*} = \emptyset$ 除了 $(\mathfrak{C}_+^n, \mathcal{E}_+)$ 对于 (R3iii) (相应地, $(\mathfrak{C}_-^n, \mathcal{E}_-)$ 对于 (L3iii)), 而这种情形下, $\mathbf{c} = 0$ 在 $[r_n, \infty)$ 上 (相应地, 在 $(-\infty, l_n]$ 上) 成立. $\square$

致谢 作者非常感谢评审专家给本文提出的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Fang X, Fukushima M, Ying J. On regular Dirichlet subspaces of $H^1(I)$ and associated linear diffusions. Osaka J Math, 2005, 42: 27–41
- 2 Li L, Ying J. Regular subspaces of Dirichlet forms. In: Festschrift Masatoshi Fukushima. Hackensack: World Scientific Publishing, 2015, 397–420
- 3 Li L, Ying J. On structure of regular Dirichlet subspaces for one-dimensional Brownian motion. ArXiv:1412.1896, 2016
- 4 Chen Z Q, Fukushima M. Symmetric Markov Processes, Time Change, and Boundary Theory. Princeton: Princeton University Press, 2012
- 5 Fukushima M, Oshima Y, Takeda M. Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes. Berlin: Walter de Gruyter, 2011

- 6 Song X, Li L. Regular Dirichlet subspaces and Mosco convergence. Chin Ann Math Ser A, 2016, 37: 1–14
- 7 Li L, Ying J. Regular Dirichlet extensions of one-dimensional Brownian motion. ArXiv:1606.00630, 2016
- 8 Li L P, Song X C. The α -orthogonal complements of regular Dirichlet subspaces for one-dimensional Brownian motion. Sci China Math, 2016, 59: 2019–2026
- 9 Fukushima M. Regular representations of Dirichlet spaces. Trans Amer Math Soc, 1971, 155: 455–455

附录 A $H^1(\mathbb{R})$ 正则子空间的正交补

正则子空间下的结论可以类似地得到. 令 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 为 $(\frac{1}{2}D, H^1(\mathbb{R}))$ 的一个正则 Dirichlet 子空间, $\mathcal{G}_\alpha$ 为它的 α -正交补, 则

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f \ll \mathbf{s}, \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{df}{d\mathbf{s}} \right)^2 d\mathbf{s} < \infty \right\},$$

$$\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{df}{d\mathbf{s}} \frac{dg}{d\mathbf{s}} d\mathbf{s}, \quad f, g \in \mathcal{F},$$

其中 $\mathbf{s}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个严格增绝对连续函数, 满足

$$\mathbf{s}'(x) = 0 \quad \text{或} \quad \mathbf{s}'(x) = 1, \quad \text{a.e.}$$

定义 $G := \{x \in \mathbb{R} : \mathbf{s}'(x) = 1\}$, 则 (参见文献 [3, 8])

$$\mathcal{G}_\alpha = \left\{ f \in H^1(\mathbb{R}) : f'(y) - f'(x) = 2\alpha \int_x^y f(z) dz, \text{ a.e. } x, y \in G \right\}.$$

下面的定理证明与前面基本相同, 所以省略.

定理 A.1 设 $f \in H^1(\mathbb{R})$, 则 $f \in \mathcal{G}_\alpha$ 当且仅当

$$f(x) = \frac{\mathbf{c}_+(x)}{2} e^{\sqrt{2\alpha}x} + \frac{\mathbf{c}_-(x)}{2} e^{-\sqrt{2\alpha}x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

其中 $(\mathbf{c}_+, \mathbf{c}_-)$ 是一对 $\mathbb{R}$ 上的函数满足 $\mathbf{c}_\pm \ll dx$, 在 G 上, $d\mathbf{c}_\pm/dx = 0$, 以及在 $\mathbb{R}$ 上,

$$\frac{d\mathbf{c}_+}{dx} e^{\sqrt{2\alpha}x} = \frac{d\mathbf{c}_-}{dx} e^{-\sqrt{2\alpha}x}.$$

进一步, 令 $\mathbf{m}_\pm(dx) = e^{\pm 2\sqrt{2\alpha}x} dx$ 且假设 f 具有上面的形式, 则 $f \in H^1(\mathbb{R})$ 等价于 $\mathbf{c}_+ \in H^1(\mathbb{R}; \mathbf{m}_+)$ 且 $\mathbf{c}_- \in H^1(\mathbb{R}; \mathbf{m}_-)$, 其中

$$H^1(\mathbb{R}; \mathbf{m}_\pm) := \{u \in L^2(\mathbb{R}, \mathbf{m}_\pm) : u' \in L^2(\mathbb{R}, \mathbf{m}_\pm)\}.$$

定义

$$\mathfrak{C}_\pm := \left\{ \mathbf{c} \in H^1(\mathbb{R}; \mathbf{m}_\pm) : \frac{d\mathbf{c}}{dx} = 0 \text{ 在 } G \text{ 上} \right\},$$

$$\mathcal{E}_\pm(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mathbf{c}_1}{dx} \frac{d\mathbf{c}_2}{dx} d\mathbf{m}_\pm, \quad \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathfrak{C}_\pm,$$

以及映射

$$\Gamma_\pm : \mathcal{G}_\alpha \rightarrow \mathfrak{C}_\pm, \quad f \mapsto \mathbf{c}_\pm.$$

定理 A.2 映射 $\Gamma_\pm$ 是一个线性双射, 且存在常数 $K_\alpha > 1$ 使得对任意 $f \in \mathcal{G}_\alpha$, 有

$$K_\alpha^{-1} \mathcal{E}_{\pm,1}(\Gamma_\pm f, \Gamma_\pm f) \leq \mathcal{E}_1(f, f) \leq K_\alpha \mathcal{E}_{\pm,1}(\Gamma_\pm f, \Gamma_\pm f).$$

从而同样可以得到 $(\mathcal{E}_\pm, \mathfrak{C}_\pm)$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的一个广义 Dirichlet 型, 以及与推论 3.5 相同的表达式. 其正则表示可以由前面 (L3) 和 (R3) 下同样的方法得到.

The orthogonal complements of $H^1(\mathbb{R})$ in its regular Dirichlet extensions

Yuncong Shen, Liping Li & Jiangang Ying

Abstract Consider the regular Dirichlet extension $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ for one-dimensional Brownian motion, that $H^1(\mathbb{R})$ is a subspace of $\mathcal{F}$ and $\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2}D(f, g)$ for $f, g \in H^1(\mathbb{R})$. Both $H^1(\mathbb{R})$ and $\mathcal{F}$ are Hilbert spaces under $\mathcal{E}_\alpha$ and hence there is α -orthogonal complement $\mathcal{G}_\alpha$. We give the explicit expression for functions in $\mathcal{G}_\alpha$ which then can be described by other two spaces. On the two spaces, there is a natural Dirichlet form in the wide sense and by the darning method, their regular representations are given.

Keywords regular Dirichlet extensions, regular Dirichlet subspaces, Dirichlet forms, orthogonal complements, darning processes

MSC(2010) 31C25, 60J55, 60J60

doi: 10.1360/SCM-2016-0722