输出载荷精确控制的结构拓扑优化设计方法

曹吟锋, 朱继宏*, 郭文杰, 李昱, 张卫红

西北工业大学, 工程仿真与宇航计算技术联合实验室, 西安 710072

*联系人, E-mail: jh.zhu@nwpu.edu.cn

收稿日期: 2016-12-19; 接受日期: 2017-03-14; 网络出版日期: 2017-06-30

国家自然科学基金(编号: 11432011, 11172236)、高等学校创新引智计划(编号: B0750)、陕西省科学技术研究发展计划项目(编号: 2014KJXX-37)和中央高校基本科研业务(编号: 3102014JC02020505)资助

摘要 随着飞行器性能的不断提高, 其承载结构的设计也越来越复杂. 通过优化设计载荷的传递方式, 将载荷合理分配到承载结构上, 对充分利用材料的承载潜力、减轻结构重量以及保证承载性能具有重要意义. 为此本文提出了一种对输出载荷精确控制的结构拓扑优化设计方法, 可在给定载荷输入和边界条件下根据设计要求实现输出位置载荷大小的精确可控. 通过在载荷输出位置设置辅助杆单元, 将输出载荷约束转化为更加直观并易于建模的杆单元节点位移约束并加以精确控制, 结合结构柔顺度设计目标、整体材料体积约束, 建立了基于密度变量的拓扑优化设计新模型. 文章通过数值算例验证了所提方法的有效性, 并同时研究了优化设计结果随材料用量、输出载荷约束区间以及输出载荷比例等因素变化的规律.

关键词 拓扑优化, 输出载荷精确控制, 附加杆单元, 节点位移约束

PACS: 47.27.-i, 47.27.Eq, 47.27.Nz, 47.40.Ki, 47.85.Gj

结构拓扑优化设计技术经过30余年的发展和完善, 已经逐步成为结构概念设计的重要方法之一. 到目前为止, 拓扑优化技术已经在科学研究及工程应用领域取得了显著成就^[1-4], 成为航空航天结构设计的关键技术之一.

合理设计材料布局形式、提高结构承载性能是设计人员永恒不变的追求. 以飞行器结构设计为例, 随着飞行器性能的不断提高, 其承载结构设计性能也越来越复杂. 现有大量结构优化设计研究工作以考虑结构刚度、强度等整体或局部承载性能设计为主^[5-8], 部分研究工作在此基础上考虑了飞行器、机械装备

结构的局部构成特征和特定性能要求, 通过支撑布局优化^[9,10]、连接布局优化^[11]、载荷位置优化^[12]、连接载荷优化^[13]以及局部翘曲变形抑制优化^[14]等实现了特定性能下结构传力路径的有效规划.

在实际飞行器结构设计中, 我们注意到通过优化设计载荷的传递方式, 将载荷合理地分配到承载结构上, 对充分利用材料的承载潜力、减轻飞行器结构重量、保证承载性能具有重要意义. 现有工作如Zhang等人^[15,16]以运载火箭各部段间的连接结构设计为背景, 研究了集中力扩散结构的拓扑优化设计, 通过合理的传力路径设计将集中载荷均匀分散到输出点上.

引用格式: 曹吟锋, 朱继宏, 郭文杰, 等. 输出载荷精确控制的结构拓扑优化设计方法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 014606
Cao Y F, Zhu J H, Guo W J, et al. Structure topology optimization method for output loads precise control (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2018, 48: 014606, doi: [10.1360/SSPMA2016-00526](https://doi.org/10.1360/SSPMA2016-00526)

事实上, 在一些特殊的结构设计情形下, 需要将载荷更加精确地传递到目标结构上. 例如某飞行武器翼面结构设计过程中, 需要考虑连接翼面的弹身隔框以及翼根处连接件的刚度、强度以及最大承载能力, 将翼面载荷精确分配到各个连接位置, 以保证充分利用各部件的承载潜力, 实现承载性能的最大化和结构的轻量化.

为此, 本文通过合理的传力路径设计将载荷按照设计目标进行精确输出, 提出了实现输出载荷精确控制的连续体拓扑优化设计方法, 将输出载荷约束转化为辅助杆单元的节点位移约束, 通过基于密度变量的拓扑优化方法设计载荷传递路径, 实现输出点载荷的精确可控.

1 输出载荷约束的结构拓扑优化形式

1.1 载荷可控传递数学模型

考虑如图1(a)所示的承载结构系统, 顶部加载有输入载荷, 底部支撑即载荷输出点分别记为A、B和C. 现需要通过设计区域内材料分布进行拓扑优化, 控制输出点处沿特定方向的载荷大小.

考虑输出方向上载荷精确控制约束为

$$F_i^*(1-w) \cdot 100\% \leq F_i \leq F_i^*(1+w) \cdot 100\%, \quad (1)$$

式中, F_i , F_i^* , w 分别表示第 i 个位置处沿输出方向上载荷数值、目标载荷数值和约束区间相对宽度的1/2. 约束区间越小, 该约束将实现越高精度的输出载荷大小设计, 则实现载荷的精确可控传递.

由于直接控制输出载荷的大小存在一定困难. 并且在实际工程结构中, 边界条件并非完全刚性, 然而设计者们在设计过程中通常将其视为完全刚性, 这将为结构的设计带来一定误差. 在这种情况下为了更加方便准确地约束输出载荷大小, 在载荷输出点设置刚度可变的辅助杆单元, 将输出载荷约束等效转化为杆单元节点位移约束并引入到拓扑优化模型, 如图1(b)所示. 原结构支撑点除载荷输出方向外其余自由度全部约束, 辅助杆单元沿载荷输出方向放置, 一端与结构原支撑点相连, 另一端施加固定边界条件. 辅助杆单元刚度定义足够大时, 可以模拟原支撑位置处理理想刚性边界条件.

此时, 输出位置处载荷与辅助杆单元长度变化即节点位移间关系为

图1 载荷精确控制约束下结构优化设计问题的示意模型. (a) 实际载荷输出模型; (b) 等效载荷输出模型

Figure 1 An illustrative structure for load precise control design problem. (a) Actual load output model; (b) equivalent load output model.

$$u_i = \frac{F_i l_i}{E_i A_i}, \quad (2)$$

式中, E_i , A_i , l_i 分别为杆单元杨氏模量、截面积和长度, u_i 为辅助杆单元上节点沿输出方向位移值. 此时, 输出载荷约束转化为辅助杆单元节点位移约束问题:

$$u_i^*(1-w) \cdot 100\% \leq u_i \leq u_i^*(1+w) \cdot 100\%, \quad (3)$$

式中, u_i^* 表示对应目标载荷数值 F_i^* 的杆单元节点位移.

1.2 拓扑优化数学模型

输出载荷精确控制的结构拓扑优化设计问题数学模型可以定义为

$$\begin{aligned} \text{find: } & \boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N\} \\ \text{min: } & C = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \\ \text{s.t.: } & \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \\ & V \leq V^* \\ & u_i^*(1-w) \cdot 100\% \leq u_i \leq u_i^*(1+w) \cdot 100\%, \\ & i = 1, 2, \dots, n \\ & 0 < \eta_{\min} \leq \eta_e \leq 1, e = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (4)$$

式中, η_e 为设计域内描述材料分布的伪密度设计变量, 取值为0–1之间, 其中0表示无材料, 1表示实体材料, 通过材料插值模型(本文采用常见的SIMP: Solid Isotropic Material with Penalization插值模型, 惩罚因子 p 取值为3)实现0, 1离散变量的连续化, 通常伪密度变量需要设置非零下界 $\eta_{\min}$ 以避免刚度矩阵奇异; 目标函数为结构柔顺度 C , 以表征结构的整体刚度最大; N 为结构设计域内单元总数, 即伪密度设计变量数; n 为辅助杆单元总数, 即需要控制载荷的输出点数目; $\mathbf{u}$ 为节点总体位移向量, $\mathbf{K}$ 为结构总体刚度矩阵, $\mathbf{F}$ 为输入外载荷向量, V 为设计区域内材料体积, V^* 为给定材料体积上界.

2 灵敏度求解

目标函数即结构整体柔顺度对伪密度设计变量的灵敏度推导常见于拓扑优化设计文献, 此处仅给出最终结果:

$$\frac{\partial C}{\partial \eta_e} = -\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \eta_e} \mathbf{u}, \quad (5)$$

其中刚度矩阵对伪密度变量的导数可以通过材料插值模型(本文采用SIMP模型)的求导来获得.

而辅助杆单元节点位移值 u_i 对伪密度变量的灵敏度可以采用伴随法推导得到. 引入伴随向量 λ , 利用 $\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{F} = 0$, 将平衡方程包含在 u_i 中

$$u_i = \delta_i \cdot \mathbf{u} = \delta_i^T \cdot \mathbf{u} - \lambda^T (\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{F}), \quad (6)$$

式中, δ_i 为将结构总体位移 $\mathbf{u}$ 转换为约束节点输出方向上位移值 u_i 的变换向量, 其中 u_i 对应项为1, 其余各项为0.

两边同时对伪密度求偏导, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial \eta_e} &= \frac{\partial (\delta_i^T \cdot \mathbf{u})}{\partial \eta_e} - \lambda^T \frac{\partial (\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{F})}{\partial \eta_e} \\ &= \delta_i^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta_e} - \lambda^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \eta_e} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta_e} \right) \\ &= -\lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \eta_e} \mathbf{u} + (\delta_i^T - \lambda^T \mathbf{K}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta_e}. \end{aligned} \quad (7)$$

令

$$\begin{aligned} \delta_i &= \lambda^T \mathbf{K}, \\ \mathbf{K}\lambda &= \delta_i^T, \end{aligned} \quad (8)$$

因此有

$$\frac{\partial u_i}{\partial \eta_e} = -\lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \eta_e} \mathbf{u}, \quad (9)$$

其中, 伴随位移向量 λ 可通过一次附加的有限元求解得到.

3 数值算例

为了验证所提方法的适用性, 本节对二维平面结构进行输出载荷精确控制拓扑优化设计.

3.1 矩形平板的载荷可控传递

考虑图2所示的尺寸为250 mm×150 mm×1 mm矩形

平板, 90 N的集中力按图所示作用于结构顶部中点, 整个矩形平板为拓扑优化设计域, 底部均布6个载荷输出位置, 设置的辅助杆单元分别记为 A_1A_2 至 F_1F_2 . 要求竖直方向输出载荷对称分布, 其中A和F处为20 N, B和E处为15 N, C和D处为10 N, 3处载荷比例为4:3:2. $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$ 节点所有自由度完全固定; $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ 节点约束水平方向平动自由度, 在优化设计中将其竖直方向位移给定上下界, 定义为需要精确控制的位移约束.

首先取位移约束区间长度为该点目标位移的2%, 即 $w=1\%$ 进行求解, 在30%的材料体积约束下得到不同迭代步下优化结果材料分布如图3所示. 拓扑优化设计在55步时收敛, 最终结构设计方案见图3(e), 此时A和F处输出载荷19.80 N, B和E处15.10 N, C和D处10.10 N, 满足输出载荷的精确控制要求.

为研究位移约束区间大小对优化结果造成的影响, 保持材料用量不变, 分别取 w 数值为1%, 5%, 7%, 10%, 15%进行拓扑优化设计, 得到材料最优分布和对应柔顺度数值, 并与不考虑输出载荷约束的标准拓扑优化相对比, 如表1所示.

从表1中可以发现, 随着位移约束区间的增大, 输出载荷精确控制约束逐步放松, 优化解目标函数值(柔顺度)不断减小, 即优化解刚度不断增大.

分析表1中各种结构设计样式, 发现在不设置输出载荷约束时, 大部分材料集中于结构中部, 这是由于载荷作用于结构顶部中心, 靠近中心的节点竖直方向支反力越大, 越有利于结构获得较大刚度. 施加输出约束精确控制约束后, 材料分布趋于结构两侧以保证两侧节点具有较大输出载荷, 且各结构分支粗细、传力

图2 矩形平板的载荷可控传递设计示意图
Figure 2 Schematic diagram of load controlled transfer design of rectangular plate.

图 3 不同优化迭代步数下优化结果材料分布. 迭代次数分别是10 (a), 20 (b), 30 (c), 40 (d), 55 (e)

Figure 3 The distribution of materials with different optimization results under different optimal iteration steps. (a) Iteration 10; (b) iteration 20; (c) iteration 30; (d) iteration 40; (e) iteration 55.

路径走向均体现了载荷精确分布的效果. 同时可发现随着区间增大, 优化结果最终趋向于一个与无输出载荷约束优化结果相近的材料分布形式. 该问题中输出载荷约束与整体刚度之间存在消长关系, 最终优化设计方案是整体刚度和局部精确传载相互妥协的结果.

考虑相同输入载荷形式下, 各点分配不同输出载荷对优化结果结构形式以及目标函数值的影响. 在 $w=1\%$ 时, 约束A和F, B和E, C和D 3处输出载荷比值分别为4:1:1, 3:2:1, 4:3:2, 1:1:1, 2:3:4, 1:2:3, 1:1:4, 优化结果柔顺度以及结构形式随连接载荷比值的变化曲线如图4所示.

图4中柔顺度值下限虚线是由无输出载荷约束的标准拓扑优化获得, 此时3处输出载荷比值约为5.2:8.1:9.2. 当考虑输出载荷约束, 使3处载荷比值由4:1:1过渡到1:1:4时, 目标函数值呈先减小后增加的趋势. 当载荷比值较为接近5.2:8.1:9.2时, 柔顺度值接近

表 1 不同位移约束区间下优化结果对比
Table 1 Comparison of the optimization results under different displacement constraints

w	Output load (N)			C (J)	Optimized design
	A, F	B, E	C, D		
1%	19.80	15.10	10.10	5.17	
5%	19.00	15.50	10.50	5.07	
7%	18.60	15.70	10.70	5.06	
10%	18.00	16.00	11.00	4.95	
15%	17.00	16.50	11.50	4.78	
Standard	10.35	16.29	18.36	4.26

图4 不同输出载荷比例下优化结果柔顺度和结构形式对比
Figure 4 Comparison of compliance and structure form of optimization results under different output load ratio.

无输出载荷约束条件获得的目标函数下限.

3.2 带铰链矩形平板的载荷可控传递

考虑如图5所示的矩形平板, 300 N集中力按图所

示作用于结构左上角, 整个矩形平板为拓扑优化设计区域, 底部均匀分布4个载荷输出位置, 要求B, C, D处在竖直方向上输出载荷分别为100, 100, 200 N, A处设置铰链边界条件. B, C, D处附加杆单元分别记为 B_1B_2 至 D_1D_2 , 将 B_2, C_2, D_2 节点所有自由度完全固定, $B_1, C_1,$

图5 带铰链矩形平板的载荷可控传递设计示意图
Figure 5 Schematic diagram of load controlled transfer design of rectangular plate with hinge.

表2 不同体分比下优化结果和输出载荷大小

Table 2 The optimization results and the output load value under different volume fraction

Volume fraction	C (J)	Output load (N) & Error value			Optimized design
		B	C	D	
20%	14.6	99.07	99.44	200.60
		0.93%	0.56%	0.30%	
25%	11.3	99.02	101.00	199.60
		0.98%	1.00%	0.20%	
27%	10.6	99.05	101.00	199.60
		0.95%	1.00%	0.20%	
30%	9.91	99.07	101.00	199.60
		0.93%	1.00%	0.20%	
35%	8.97	99.07	101.00	199.60
		0.93%	1.00%	0.20%	
45%	7.93	99.07	101.00	199.60
		0.93%	1.00%	0.20%	

D_1 节点约束除竖直方向外所有自由度, 设置 $w=1\%$, 对结构进行拓扑优化.

分别取体分比为20%, 25%, 27%, 30%, 35%, 45%, 分析材料用量对优化结果造成的影响, 得到的材料最优分布、目标函数值、输出载荷值及其与目标载荷值相对误差如表2所示.

进一步采用更大的材料体积约束(50%, 60%, 70%, 80%, 90%), 仍然设置 $w=1\%$, 目标函数值随体分比变化的曲线如图6所示, 可以发现, 随着体分比的增大, 优化结果的柔顺度呈现先下降后趋于稳定不变的趋势.

当材料用量增大时, 增加的材料可加强优化结果使其刚度增大. 但当体分比达到45%以上时, 在主传力路径上放置更多材料将不可避免地导致输出载荷精度下降, 此时, 多余的材料将被放置在对传递载荷、提高刚度几乎无效的位置. 当材料用量达到90%时, 拓扑优化已难以产生清晰的传力路径, 此时少有的部分弱材料被用于形成结构上的裂缝, 通过与裂缝的走向控制载荷传递路径, 使整体结构仍然能保持载荷精确输出的效果.

4 结论

提出了一种控制载荷精确输出的结构拓扑优化方法, 通过合理规划结构传力路径, 使输入载荷通过结构精确分配到若干输出点上, 从而实现了载荷传递精确可控的目的.

图6 不同体分比下优化结果目标函数值变化趋势

Figure 6 The change trend of the objective function value of the optimization result under different volume fraction.

通过数值算例的深入分析, 拓扑优化得到了结构清晰的传力路径, 能够有效实现载荷的精确输出. 与仅考虑结构柔顺度最小的标准拓扑优化设计相比, 输出载荷约束的存在使结构传力路径布局、分枝尺寸等得以重新规划, 从而将输入载荷按照约束要求重新分配. 进一步分析发现, 材料用量在较大范围内均不影响载荷传递和精确输出的效果, 特别是材料用量超出一定极限后, 为满足载荷精确输出的要求, 多余材料被放置在对传力、承载无效的位置, 结构刚度将不再有显著提升.

拓扑优化对传力路径的规划不仅可以实现传统最大刚度等承载性能的设计, 通过合理的优化设计方法和约束建模还可以实现精确的载荷传递和输出设计.

参考文献

- 1 Sigmund O, Maute K. Topology optimization approaches. *Struct Multidisc Optim*, 2013, 48: 1031–1055
- 2 Bendsøe M P. Topology Optimization: Theory, Methods and Applications. Berlin: Springer, 2003. 25
- 3 Deaton J D, Grandhi R V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: Post 2000. *Struct Multidisc Optim*, 2014, 49: 1–38
- 4 Guo X, Cheng G D. Recent development in structural design and optimization. *Acta Mech Sin*, 2010, 26: 807–823
- 5 Cheng G, Jiang Z. Study on topology optimization with stress constraints. *Eng Optim*, 1992, 20: 129–148
- 6 Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Struct Multidisc Optim*, 2001, 21: 120–127
- 7 París J, Navarrina F, Colominas I, et al. Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints. *Struct Multidisc Optim*, 2009, 39: 419–437
- 8 Duysinx P, Bendsøe M P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. *Int J Numer Meth Engng*, 1998, 43: 1453–1478
- 9 Buhl T. Simultaneous topology optimization of structure and supports. *Struct Multidisc Optim*, 2002, 23: 336–346
- 10 Zhu J H, Zhang W H. Maximization of structural natural frequency with optimal support layout. *Struct Multidisc Optim*, 2006, 31: 462–469

- 11 Li Q, Steven G P, Xie Y M. Evolutionary structural optimization for connection topology design of multi-component systems. *Eng Comput*, 2001, 18: 460–479
- 12 Zhang W H, Zhang Z D, Zhu J H, et al. Structural topology optimization: Extensibility and attainability. *Sci China Tech Sci*, 2014, 57: 1310–1321
- 13 Zhu J H, Hou J, Zhang W H, et al. Structural topology optimization with constraints on multi-fastener joint loads. *Struct Multidisc Optim*, 2014, 50: 561–571
- 14 Zhu J H, Li Y, Zhang W H, et al. Shape preserving design with structural topology optimization. *Struct Multidisc Optim*, 2016, 53: 893–906
- 15 Zhang J X, Wang B, Niu F. Optimal design of concentrated force diffusion for short shell structure using hierarchical radial ribs (in Chinese). *Chin J Comput Mech*, 2014, 31: 141–148 [张家鑫, 王博, 牛飞. 分级型放射肋短壳结构集中力扩散优化设计. 计算力学学报, 2014, 31: 141–148]
- 16 Zhang J, Wang B, Niu F, et al. Design optimization of connection section for concentrated force diffusion. *Mech Based Des Struct Machines*, 2015, 43: 209–231

Structure topology optimization method for output loads precise control

CAO YinFeng, ZHU JiHong*, GUO WenJie, LI Yu & ZHANG WeiHong

Laboratory of Engineering Simulation & Aerospace Computing (ESAC), Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China

With the improvement of the aircraft performance, the design of load carrying structures becomes more and more complicated. The input load should be distributed properly to the load carrying structure by the design of load path, which is of vital importance to make full use of load carrying capacity of the material, save the structural weight and ensure the load carrying capacity of the structure. For this reason, the purpose of this paper is to propose a new continuum structure topology optimization method that controls the output loads precisely. Under given input loads and boundary conditions, the magnitudes of the output loads are precisely designed to demanding values. To have a convenient modelling of the output load, we propose to apply some artificial bar elements at the output positions instead of standard boundary conditions. The constraints on output loads are then equivalently transferred to the constraints on nodal displacements of the bars, which are much simpler to be controlled. These constraints, as well as the design objective of minimizing structural compliance and the material volume constraints, formulate a new density based topology optimization model. Numerical examples tested in this paper have validated the effect of the proposed optimization scheme. The influence of the material usage, constraint bounds and ratio of output loads on the optimized design are also analyzed in details.

topology optimization, precise control of output loads, artificial bar elements, displacement constraint on nodal

PACS: 47.27.-i, 47.27.Eq, 47.27.Nz, 47.40.Ki, 47.85.Gj

doi: [10.1360/SSPMA2016-00526](https://doi.org/10.1360/SSPMA2016-00526)