参 考 文 献

- 1 Naitoh H. Grassmann geometry on compact symmetric spaces, Submitted to PRG conference held in Korea. 1996
- 2 Naitoh H. Compact simple Lie algebras with two involutions and submanifolds of compact symmetric spaces, iv, $\textcircled{C}$ Osaka J Math, 1993, 30: 653~ 732
- 3 Naitoh H. Symmetric submanifolds of compact symmetric spaces. Tsukuba J Math, 1986, 10(2): 215~ 242
- 4 Guest A. Geometry of maps between generalized flag manifold. J Diff Geom, 1987, 25(2): 223~ 247

(1997-12-29 收稿, 1998-03-25 收修改稿)

Leray_Schauder 不动点的计算

范江华^④ 黎培兴

(中山大学科学计算系, 广州 510275; ④广西师范大学数学系, 桂林 541004)

摘要 给出计算 Leray_Schauder 不动点的单纯同伦算法, 此算法也能计算 Merrill 不动点和 Eaves 不动点. 还给出了保证计算有界的一个充分条件.

关键词 集值映射 Leray_Schauder 不动点 向量标号算法

现有的单纯不动点算法都是计算凸集上半连续集值映射(包含单值连续映射)的不动点, 本文给出计算非凸集上 Leray_Schauder 不动点的一种算法, 从而给出了 Leray_Schauder 不动点定理的一个构造性证明. 本文给出的算法同样可用来计算 n 维紧凸集和欧氏空间的自映射的不动点, 也构造性地证明了推广的 Eaves 不动点定理, 并给出了保证计算有界的一个充分条件, 此条件大大改进了著名的 Merrill 条件.

记 $P(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的非空紧凸子集族. 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$, coA , $\overline{A}$, ∂A 分别表示 A 的凸包、闭包与边界.

本文用到的 D_3 剖分可参看文献[1, 2], 完备单纯形以及完备单纯形的转轴运算都与文献[3~ 6]一致.

先看如下形式的 Leray_Schauder 不动点定理:

定理 1 设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中一开集, $x_0 \in U$, $F: \overline{U} \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ 上半连续, $F(\overline{U})$ 有界, 且 F 满足

$$x \in \lambda F(x) + (1-\lambda)\{x_0\}, \quad \forall \lambda \in (0, 1), \quad \forall x \in \partial U. \quad (1)$$

那么存在一点 $y_0 \in \overline{U}$, 使得 $y_0 \in F(y_0)$, 即 F 在 $\overline{U}$ 中存在不动点 y_0 .

注 1 1. 若 U 有界, 则 $\overline{U}$ 紧, 因 F 上半连续, 故 $F(\overline{U})$ 紧, 从而 $F(\overline{U})$ 有界.

2. 若 $U = \mathbb{R}^n$, 则 $\partial U = \emptyset$, 故 F 满足式(1).

3. 若 $\overline{U}$ 为紧凸集, $F: \overline{U} \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ 上半连续, 且 $F(\overline{U}) \subset \overline{U}$, 容易证明满足定理 1 的条件(可参看文献[7]中定理 7 的证明). 因此本文的算法可计算 n 维紧凸集上自映射的不动点.

定理 1 中不动点的存在性证明可由集值映射的拓扑度理论^[8]给出, 也可参看文献[7]. 当 U 有界时, 文献[9]给出了一个并不纯粹的构造性证明, 因从 4.4 节强制性条件(∂U , η)到

4.6节的强制性条件(∂U)的证明是存在性的,而非构造性的. 本文将给出计算 Leray-Schauder不动点的算法,从而给出定理1的构造性证明.

引理1 设 F, U, x_0 同定理1中的假设,则 $F_1: \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ 上半连续,且 F_1 与 F 有相同的不动点集,其中 F_1 满足:

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x), & x \in U, \\ co(F(x) \cup \{x_0\}), & x \in \partial U, \\ \{x_0\}, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{U}. \end{cases}$$

证 F_1 的上半连续性由文献[5]中第六章定理3.2可得. 下证 F 与 F_1 有相同的不动点集.

1. 设 y_0 为 F_1 的不动点. 若 $y_0 \in U$, 则 y_0 为 F 的不动点. 若 $y_0 \in \partial U$, 则 $y_0 \in co(F(y_0) \cup \{x_0\})$, 从而存在 $\lambda \in [0, 1]$, 使得 $y_0 \in \lambda F(y_0) + (1-\lambda)\{x_0\}$, 而由式(1)可知 $\lambda = 1$ 或 0 . 当 $\lambda = 0$ 时, $y_0 = x_0$, 这与 $x_0 \in U$ 矛盾. 因此 $\lambda = 1$. 故 $y_0 \in F(y_0)$, 即 y_0 为 F 的不动点.

2. 设 y_0 为 F 的不动点, 显然 y_0 为 F_1 的不动点. 证毕.

利用引理1将计算 F 的不动点转化成计算 F_1 的不动点, 而 F_1 为 n 维欧氏空间的上半连续自映射, 因此可利用向量标号算法来计算 F_1 的不动点. 下面利用 D_3 剖分和 Eaves-Saigal 向量标号单纯同伦算法^[4, 5]来计算 F_1 的不动点.

算法: 先对 $(0, 1] \times \mathbb{R}^n$ 作 D_3 剖分. 设 $y = (t, x)$ 为 $(0, 1] \times \mathbb{R}^n$ 的 D_3 剖分的一个顶点.

若 $t = 1$, 则令 $\varphi(y) = x_0$.

若 $t < 1$, 当 $x \in U$ 时, 则取定 $F(x)$ 中任意一点作为 $\varphi(y)$, 当 $x \notin U$ 时, 则令 $\varphi(y) = x_0$.

在剖分的每个单纯形上按重心坐标将顶点上已赋值的 φ 作仿射扩张, 得到单值的分片线性映射: $\Phi: (0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. 最后按

$$\Phi(t, x) = x - \varphi(t, x)$$

定义的 $\Phi: (0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为向量标号映射. 在 $\{1\} \times \mathbb{R}^n$, $\Phi(1, x) = x - x_0$, 故在 $\{1\} \times \mathbb{R}^n$ 上有且只有一个完备界面, 记为 τ_0 .

利用完备单纯形的转轴运算^[6], 可得到一个由完备界面组成的序列. 若所有完备界面都在 $(0, 1] \times \mathbb{R}^n$ 的一个有界区域内, 则无穷的完备界面序列必有一个形如 $(0, y_0)$ 的聚点, 事实上 y_0 为 F 的不动点.

下面先证明所有的完备界面在一个有界区域内.

设 τ 为 $(0, 1] \times \mathbb{R}^n$ 内任一完备界面, 且 $\tau \neq \tau_0$, 设 τ 的顶点为 $y^1, y^2, \dots, y^n$, 其中 $y^i = (t_i, x^i)$, $t_i \in (0, 1]$, $x^i \in \mathbb{R}^n$.

因 $F(\overline{U})$ 有界, 故存在一个紧凸集 B , 使得 $F(\overline{U}) \subset B$, 且 $x_0 \in B$. 从而 $F_1(\overline{U}) \subset B$. 若 $\tau \cap ((0, 1] \times B) = \emptyset$, 因

$$\Phi(y^i) = x^i - \varphi(y^i),$$

故对于满足

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

的 λ_i 都有 $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(y^i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i - \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(y^i)$. 因 $\phi(y^i) \in F_1(x^i) \subset B$, 故 $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(y^i) \in B$. 又因 $\bar{\tau} \cap ((0, 1] \times B) = \emptyset$, 从而 $\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i \notin B$. 故 $\phi(y^i) (i=1, 2, \dots, n)$ 的任意凸组合都不可能为零. 这与 τ 是完备界面矛盾. 因此 $\bar{\tau} \cap ((0, 1] \times \bar{B}) \neq \emptyset$, 由 B 的有界性和 τ_0 有界可知, 所有完备界面都在 $(0, 1] \times \mathbb{R}^n$ 的一个有界区域内.

显然 y_0 为 $F_1: \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ 的不动点^[6]. 显然 $y_0 \in \bar{U}$, 且由引理 1 知 y_0 为 F 的不动点. 这样就算出了 F 的一个不动点 y_0 , 也完成了定理 1 的构造性证明.

定理 2 设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中一开集, $x_0 \in U$, $F: \bar{U} \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ 上半连续, $F(\bar{U})$ 有界, 若存在 $\omega \in \mathbb{R}^n$, 有:

$$\omega^T \cdot (x_0 - x) > 0, \quad \omega^T \cdot (f - x) > 0, \quad \forall x \in \partial U, \quad \forall f \in F(x), \quad (2)$$

则 F 在 $\bar{U}$ 中存在不动点 y_0 .

注 2 容易证明定理 2 蕴含 Kakutani 不动点定理、Merrill 不动点定理^[4].

定理 2 的证明 只需证明定理 2 的条件可推出定理 1 中式(1)成立.

若式(1)不成立, 则存在 $x \in \partial U$, $\lambda \in (0, 1)$, $f \in F(x)$ 使得 $x = \lambda x_0 + (1 - \lambda)f$. 因此 $x_0 - x = -(1 - \lambda)(f - x)$. 因 $-(1 - \lambda) < 0$, 故不可能存在 $\omega \in \mathbb{R}^n$, 使得式(2)成立. 证毕.

因此要计算定理 2 中的不动点可利用定理 1 的证明中的算法.

定理 3(推广的 Eaves 不动点定理) 设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中一开集, $x_0 \in U$, $G: \bar{U} \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ 上半连续, 若 $G(\bar{U})$ 有界且有

$$x_0 \in G(x), \quad \forall x \in \partial U,$$

那么存在一点 $y_0 \in \bar{U}$, 使得 $y_0 \in G(y_0)$, 即 G 在 $\bar{U}$ 中存在不动点 y_0 .

引理 2 设 G, U, x_0 同定理 3 中的假设, 则 $G_1: \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ 上半连续, 且 G_1 与 G 有相同的不动点集, 其中 G_1 满足:

$$G_1(x) = \begin{cases} G(x), & x \in \bar{U}, \\ \{x_0\}, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}. \end{cases}$$

证明与引理 1 类似, 略.

定理 3 的证明 利用引理 2 转化成计算 $G_1: \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ 的不动点, 计算方法与定理 1 证明中的算法完全一致.

为了保证计算在一个有界区域内进行, Merrill 给出了 Merrill 条件.

可以证明若 F 满足 Merrill 条件, 则用向量标号单纯同伦算法计算 F 的 Kakutani 不动点时, 计算在一个有界区域进行, 从而无限的计算序列必有子序列收敛到 F 的 Kakutani 不动点^[3].

Merrill 条件要求较强, 我们给出一个保证计算收敛的较弱的条件.

条件: 设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中一开集, $x_0 \in U$, $F: \bar{U} \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ 上半连续, $F(\bar{U})$ 有界且满足

$$x \notin \lambda F(x) + (1 - \lambda)\{x_0\}, \quad \forall \lambda \in (0, 1), \quad \forall x \in \partial U.$$

结论: 利用本文提出的算法, 计算必在有界区域内进行, 从而无限的计算点列必有子序列收敛到 F 到 Kakutani 不动点.

很明显, 若集值映射 F 满足 Merrill 条件, 则必满足上述条件, 上述条件大大弱于 Merrill

条件.

致谢 感谢导师王则柯教授的指导和帮助. 本工作为国家自然科学基金(批准号:79790130)资助项目.

参 考 文 献

- 1 Dang C. Triangulations and Simplicial Methods. Berlin: Springer-Verlag, 1995. 129~ 143
- 2 Dang C. The D_3 -triangulations for simplicial deformation algorithms for computing solutions of nonlinear equations. J of Opt Theory and Appl, 1995, 75(1): 51~ 67
- 3 Todd M J. The Computation of Fixed Points and Applications. New York: Springer-Verlag, 1976. 64~ 100
- 4 陈开周, 党创寅, 杨再福. 不动点理论和算法. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1990. 136~ 284
- 5 王则柯. 单纯不动点算法基础. 广州: 中山大学出版社, 1986. 132~ 203
- 6 王则柯, 高堂安. 同伦方法引论. 重庆: 重庆出版社, 1990. 216~ 247
- 7 Park S. Fixed points of approximable maps. Proc Amer Math Soc, 1996, 124(10): 3 109~ 3 113
- 8 Petryshyn W V, Fitzpatrick P M. A degree theory, fixed point theorems, and mapping theorems for multivalued noncompact mappings. Tran Amer Math Soc, 1974, 194(1): 1~ 25
- 9 Allgower E L, Georg K. Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions of systems of equations. SIAM Review, 1980, 22(1): 28~ 85

(1997-12-23 收稿, 1998-05-04 收修改稿)

掺 Ho PMP YBCO 超导体鱼尾效应的研究

冯 勇^{④(四)} 周 廉 石 磊 J. G. Wen^④
N. Koshizuka^④ 杨万民 吴晓祖

(西北有色金属研究院, 西安 710016; ④Superconductivity Research Laboratory, ISTEK 10_13 Shinonome, I_chome, Koto_ku, Tokyo 135 Japan; ④中国高等科学技术中心, 北京 100080; 中国科技大学结构开放实验室, 合肥 230026)

摘要 通过粉末熔化处理 (PMP) 法制备了 $Y_{1-x}Ho_xBa_2Cu_3O_y$ 超导体, 采用 SQUID 磁强计 (最大磁场 7T), 测量了所有样品在不同温度下的磁化曲线, 临界电流密度 J_c 是通过 Bean 临界态模型得到的. 实验结果表明, 在 Ho 含量较低的 $Y_{0.8}Ho_{0.2}Ba_2Cu_3O_y$ 样品中直到温度降至 30 K 没有鱼尾效应出现; 而在较高 Ho 含量的 $Y_{0.6}Ho_{0.4}Ba_2Cu_3O_y$ 样品中存在鱼尾现象. 鱼尾峰值场随温度升高而降低, 当温度升至 77 K 以上时鱼尾消失. 此外, 当该样品在高温下长时间再处理后, 在磁场平行于和垂直于样品的 C 轴时均有鱼尾出现. 通过对所得结果的系统分析, 认为在掺 Ho YBCO 样品中鱼尾效应可能是来源于体系的顺磁性, 再者, 也许由于 Ho 加入引起的阳离子无序是另一个原因.

关键词 磁通钉扎 鱼尾效应 元素替代 临界电流密度

自从高温氧化物超导体发现以来, 在许多体系如 YBCO 块材及单晶, $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+x}$ 和 $Tl_{1-x}Ba_xCaCu_2O_{8-x}$ 等中都发现了鱼尾效应^[1~5]. 通常来说, 临界电流密度随磁场增大而减小, 而

<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/csb1998-43-16-1723>