Littlewood-Paley 算子的多线性交换子的加权估计

薛庆营*, 丁勇

北京师范大学数学科学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京 100875

* E-mail: qyxue@bnu.edu.cn

收稿日期: 2007-11-19; 接受日期: 2008-10-24

国家自然科学基金 (批准号: 10701010, 10571015)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20050027025) 和教育部留学回国启动基金 (2007) 资助项目

摘要 本文给出了 Littlewood-Paley 算子的多线性交换子的加权 L^p 估计和深刻的加权端点估计.

关键词 Littlewood-Paley 算子 多线性交换子 sharp 函数 Young 函数 $Osc_{\exp L^r}$ 空间 端点估计

MSC(2000) 主题分类 42B25, 47G10

1 引言

设 ψ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, 且存在正常数 C_0, C_1, δ 及 γ 满足:

- (a) $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 0$;
- (b) $|\psi(x)| \leq C_0(1 + |x|)^{-n-\delta}$;
- (c) $|\psi(x+y) - \psi(x)| \leq C_1|y|^\gamma(1 + |x|)^{-n-\gamma-\delta}$, 如果 $2|y| \leq |x|$.

对上述 ψ , 我们如下定义 Littlewood-Paley g_λ^* 函数:

$$g_\lambda^*(f)(x) = \left(\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left(\frac{t}{t + |x - y|} \right)^{\lambda n} |\psi_t * f(y)|^2 \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2}, \quad \lambda > 1, \quad (1.1)$$

这里 $\psi_t(x) = t^{-n}\psi(x/t)$.

对任意给定的正整数 m , g_λ^* 的多线性交换子定义为:

$$g_{\lambda, \vec{b}}^*(f)(x) = \left(\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left| \left(\frac{t}{t + |x - y|} \right)^{\lambda n/2} \int \psi_t(y - z) \left[\prod_{j=1}^m (b_j(x) - b_j(z)) \right] f(z) dz \right|^2 \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2},$$

这里 $\vec{b}(x) = (b_1(x), \dots, b_m(x))$ 且 $b_j \in Osc_{\exp L^{r_j}}$, $r_j \geq 1$ ($Osc_{\exp L^{r_j}}$ 的定义参见第 2 节).

众所周知, 带 Poisson 核的经典 g_λ^* 函数的弱 $(1,1)$ 和弱 (p,p) 有界性分别被 E. M. Stein^[1] 和 C. Fefferman^[2] 所研究. C. Fefferman 在 [2] 中同时建立了 g_λ^* 的 L^p 有界性, 这里 $1 < p < \infty$

引用格式: 薛庆营, 丁勇. Littlewood-Paley 算子的多线性交换子的加权估计. 中国科学 A, 2009, 39(3): 315-332
Xue Q Y, Ding Y. Convergence of one-leg methods for nonlinear neutral delay integro-differential equations. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0049-z

且 $\lambda > \max\{1, \frac{2}{p}\}$. 对由 (1.1) 定义的更一般化的 g_λ^* 函数, L^p 有界性也是知道的 (参看 [3, pp. 309–318]). 然而, 弱 (1,1) 型估计只是被 [3] 所提及, 但是没有被清楚表述.

另一方面, 在 2002 年, Pérez 和 Trujillo-González^[4] 得到了如下定义的一类 Calderón-Zygmund 奇异积分算子的多线性交换子的一些加权估计:

$$T_{\vec{b}}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\prod_{j=1}^m (b_j(x) - b_j(y)) \right] K(x, y) f(y) dy.$$

受 Pérez 和 Tolsa^[2] 工作的启发, 2005 年 Hu, Meng 和 Yang^[6] 研究了非双倍测度的奇异积分算子的多线性交换子的有界性.

我们注意到 g_λ^* 可以看作如下 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 里面的向量值的奇异积分算子:

$$\mathcal{H} = \left\{ h : \|h\|_{\mathcal{H}} = \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |h(t, y)|^2 \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

事实上, g_λ^* 可以写为

$$g_\lambda^*(f)(x) = \left(\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left| \left(\frac{t}{t + |x - y|} \right)^{\lambda n/2} \int \psi_t(y - z) f(z) dz \right|^2 \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} := \|\psi_{t,y}(f)(x)\|_{\mathcal{H}},$$

这里 $\psi_{t,y}(f)(x) = \left(\frac{t}{t + |x - y|} \right)^{\lambda n/2} \int \psi_t(y - z) f(z) dz$.

因此, 在 ψ 满足 (a), (b) 和 (c) 时, 很自然的就会提出下面两个有趣的问题:

- (1) 需要对 λ, δ 和 γ 作什么条件的假设, 才能保证 g_λ^* 算子的弱 (1,1) 型估计成立?
- (2) 能否建立对 $g_{\lambda, \vec{b}}^*$ 的加权 L^p 和加权弱型估计?

本文的主要目的就是上面两个问题给出回答, 我们主要的结果如下:

定理 1.1 设 ψ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, 满足(a), (b) 和 (c). 进一步, $\lambda > 2, 0 < \gamma < \min\{(\lambda - 2)n/2, \delta\}$, 则 g_λ^* 是弱 (1,1) 型的.

定理 1.2 设 ψ 和 γ 满足与定理 1.1 中相同的条件, $w \in A_1, b_j \in \text{Osc}_{\exp L^{r_j}}, r_j \geq 1, 1 \leq j \leq m$ 且 $\vec{b}(x) = (b_1(x), \dots, b_m(x)), m = 1, 2, \dots, \Phi(t) = t \log^{1/r}(e + t)$, 则存在正常数 C , 使得对所有有界紧支集的函数 f 和所有 $\beta > 0$, 有

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : g_{\lambda, \vec{b}}^*(f)(x) > \beta\}) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{\|\vec{b}\|f(x)}{\beta}\right) w(x) dx, \quad \lambda > 2, \quad (1.2)$$

这里 $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_m}$.

令 $[w]_{A_\infty}$ 为 A_p 定义中最小的常数 C (A_p 权定义参见第 2 节), 我们得到了下面加权的 L^p 结果:

定理 1.3 设 $0 < p < \infty, w \in A_\infty, \psi$ 和 γ 满足与定理 1.1 中相同的条件, 则存在常数 $C > 0$, 使得对所有有界紧支集的函数 f , 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} [g_\lambda^*(f)(x)]^p \omega(x) dx \leq C [w]_{A_\infty}^p \int_{\mathbb{R}^n} [M(f)(x)]^p \omega(x) dx, \quad \lambda > 2. \quad (1.3)$$

注记 1.1 从 [1] 中我们知道定理 1.1 当 $1 < \lambda \leq 2$ 时不成立. 若 $1 < p < \infty$, 定理 1.3 是对 [7] 中带 Poisson 核的经典 g_λ^* 函数的结果的结果的本质改进.

定理 1.4 设 $0 < p < \infty$ 且 $w \in A_\infty, \psi, \gamma, b_j, \vec{b}, r_j$ 和 r 满足与定理 1.2 相同的条件, 则存在常数 $C > 0$, 使得对所有有界紧支集的函数 f , 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} [g_{\lambda, \vec{b}}^*(f)(x)]^p \omega(x) dx \leq C \|\vec{b}\|^p \int_{\mathbb{R}^n} [M_{L(\log L)^{1/r}} f(x)]^p \omega(x) dx, \quad \lambda > 2. \quad (1.4)$$

从定理 1.4 出发, 因为 $M_{L(\log L)^{1/r}}(f)$ 是在点态意义下比 $M_{L(\log L)^m}(f)$ 小, 而 $M_{L(\log L)^m}$ 是和 M^{m+1} 等价的, M^{m+1} 是指 Hardy-Littlewood 极大算子的 $m+1$ 次迭代, 我们得到下面的推论:

推论 1.1 设 $\lambda > 2$, $\psi, \gamma, b_j, \vec{b}, r_j$ 和 r 与定理 1.2 中相同, 则存在常数 $C > 0$, 使得对所有有界紧支集的函数 f , 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} [g_{\lambda, \vec{b}}^*(f)(x)]^p \omega(x) dx \leq C \|\vec{b}\|^p \int_{\mathbb{R}^n} [M_{L(\log L)^m} f(x)]^p \omega(x) dx, \quad 0 < p < \infty, \quad w \in A_\infty,$$

和

$$\int_{\mathbb{R}^n} [g_{\lambda, \vec{b}}^*(f)(x)]^p \omega(x) dx \leq C \|\vec{b}\|^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x) dx, \quad 1 < p < \infty, \quad w \in A_p.$$

若在上面结果中取 $b_1 = \cdots = b_m = b$ 和 $r_1 = \cdots = r_m = 1$, 因为 $b = b_j \in \text{BMO}$ ($\text{Osc}_{\exp L^j} = \text{BMO}$, 若 $j = 1$), 则我们得到了加权 L^p 和加权弱 $L \log L$ 型估计, 此估计结果即使对如下定义的高阶交换子 g_{λ, b^m}^* 也仍然是全新的.

$$g_{\lambda, b^m}^*(f)(x) = \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\frac{1}{1+|x-y|} \right)^{\lambda n/2} \int t^{-n} \psi \left(\frac{y-z}{t} \right) f(z) ((b(x)-b(z))^m dz \right|^2 \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2}.$$

推论 1.2 设 ψ 和 γ 与定理 1.1 中相同, $\lambda > 2$, $b \in \text{BMO}$, $\Phi(t) = t \log^m(e+t)$ ($m = 1, 2, \dots$), 则存在常数 $C > 0$, 使得对所有有界紧支集的函数 f 和所有 $\beta > 0$, 有下面不等式成立:

$$\begin{aligned} & w(\{x \in \mathbb{R}^n : |g_{\lambda, b^m}^*(f)(x)| > \beta\}) \\ & \leq C \Phi(\|b\|_*^m) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\beta} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(x)|}{\beta} \right) \right)^m w(x) dx, \quad w \in A_1, \\ & \int_{\mathbb{R}^n} [g_{\lambda, b^m}^*(f)(x)]^p \omega(x) dx \leq C \|b\|_*^{mp} \int_{\mathbb{R}^n} [M_{L(\log L)^m} f(x)]^p \omega(x) dx, \quad 0 < p < \infty, \quad w \in A_\infty, \\ & \int_{\mathbb{R}^n} [g_{\lambda, b^m}^*(f)(x)]^p \omega(x) dx \leq C \|b\|_*^{mp} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x) dx, \quad 1 < p < \infty, \quad w \in A_p. \end{aligned}$$

注记 1.2 当 $m = 1$ 时, 推论 1.2 包含了 [8] 中的结果, 这意味着我们的方法在这种情况下给出了一个新的正确的证明.

注记 1.3 上述结果对如下定义的 Littlewood-Paley 算子中的 Lusin 面积积分的多线性交换子也成立:

$$S_{\vec{b}}(f)(x) = \left(\iint_{\Gamma(x)} \left| \int t^{-n} \psi \left(\frac{y-z}{t} \right) \left[\prod_{j=1}^m (b_j(x) - b_j(z)) \right] f(z) dz \right|^2 \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2},$$

这里 $\Gamma(x) = \{(y, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : |x-y| < t\}$. 这可以从如下事实看出: $S_{\vec{b}}(f)(x) \leq C 2^{\lambda n} g_{\lambda, \vec{b}}^*(f)(x)$, 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $\lambda > 1$ 成立.

注记 1.4 很自然的, 人们会考虑更一般核的类似问题. 然而若在 (1.1) 中取 $\psi(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^{n-1}} \chi_{\{|x|<1\}}$ (此情况下, g_λ^* 在 [9] 中被定义和研究), 从 [10] 中的结果我们知道, 即使 $\Omega \in \text{Lip}_\alpha$ ($0 < \alpha < 1$), 当 $n > 2$ 时, 也不可能得到 Littlewood-Paley 算子的上述类似的结果. 事实上, 由 [10] 中的反例知, 甚至 L^p ($1 < p < 2n/(n+2)$) 有界性也不成立. 在此意义下, 我们对核条件的假设是必要和合理的. 另一方面, 上述结果对非双倍测度下的算子也是成立的, 这将会包含在另一后续文章中.

本文结构安排如下: 第 2 节中, 我们先给出一些符号和注释, 然后列出和证明一些引理. 在第 3, 4, 5 和 6 节中定理 1.1, 1.3, 1.4 和定理 1.2 的证明将分别给出.

2 符号注释和引理

首先我们给出一些符号和注释.

(1) 关于 sharp 函数

记 ρ 次 Hardy-Littlewood 极大函数和 ρ 次一般化的 sharp 函数为:

$$M_\rho f(x) = \sup_{x \in Q} \left(|Q|^{-1} \int_Q |f(y)|^\rho dy \right)^{1/\rho}, \quad \rho > 0$$

和

$$M_\rho^\sharp f(x) = \sup_{x \in Q} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|^\rho dy \right)^{1/\rho} \approx \sup_{x \in Q} \inf_c \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - c|^\rho dy \right)^{1/\rho},$$

这里 Q 是 $\mathbb{R}^n$ 中的方体. 则 M_1 恰好就是标准的 Hardy-Littlewood 极大算子. $M_1^\sharp$ 就是著名的 Fefferman-Stein sharp 函数, 我们简单记 $M_1 f = Mf$, $M_1^\sharp f = M^\sharp f$.

(2) A_p ($1 \leq p \leq \infty$) 权

权函数 $w \in A_p$ ($1 < p < \infty$) 是指 w 是一个 $\mathbb{R}^n$ 上的非负局部可积的函数, 且存在常数 $C > 0$ 使得

$$\sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \leq C.$$

权函数 $w \in A_1$ 是指存在一个常数 C 使得

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y) dy \leq C \inf_Q w.$$

我们记 A_∞ 为 $A_\infty = \bigcup_{1 < p < \infty} A_p$. 对 A_∞ 类还有一个刻画, 我们说权函数 $w \in A_\infty$, 若存在常数 $C > 0$ 和 $\tau > 0$ 使得对所有的方体 Q 和所有可测点集 $E \subseteq Q$, 有 $\frac{w(E)}{w(Q)} \leq (C \frac{|E|}{|Q|})^\tau$. 我们简单记 $[w]_{A_p}$ ($1 \leq p \leq \infty$) 为 A_p 权定义中最小的常数 C .

(3) 与 Orlicz 空间有关的符号

现在我们给出一些与 Orlicz 空间有关的符号和一些定义. 定义在 $[0, \infty)$ 上的函数 Φ 称为 Young 函数, 如果它是连续的、凸的和严格递增的且

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\Phi(t)} = 0.$$

对于定义在方体 Q 上的函数 f , f 的 Φ 平均定义为:

$$\|f\|_{\Phi, Q} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|Q|} \int_Q \Phi \left(\frac{|f(y)|}{\lambda} \right) dy \leq 1 \right\}.$$

定义极大算子 M_Φ 为: $M_\Phi(f)(x) = \sup_{Q \ni x} \|f\|_{\Phi, Q}$, 这里上确界是对所有包含 x 的方体取.

如果 $\Phi_t = t \log^s(e + t)$ ($s > 0$), 我们记 $\|f\|_{\Phi, Q} = \|f\|_{L(\log L)^s, Q}$, $M_\Phi = M_{L(\log L)^s}$. 如果 $\Phi_t = e^{t^r} - 1$, 我们记 $\|f\|_{\Phi, Q} = \|f\|_{\exp L^r, Q}$, $M_\Phi = M_{\exp L^r}$.

从 [11] 的结果知, 对任意的 $k \in \mathbb{N}$, $M_{L(\log L)^k} \sim M^{k+1}$, 后者为通常 Hardy-littlewood 极大函数的 $k+1$ 次迭代.

对 Young 函数 Φ , 函数 f 的振荡 $Osc_\Phi(f, Q)$ 定义为 $Osc_\Phi(f, Q) = \|f - f_Q\|_{\Phi, Q}$. 同样, 我们定义 $\|f\|_{Osc_\Phi} = \sup_Q \{Osc_\Phi(f, Q)\}$, 这里上确界是对所有 $\mathbb{R}^n$ 中的方体 Q 取.

我们将用到下面一般化的 Hölder 不等式, 更一般的情形见 [4].

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f_1(y) \cdots f_m(y) g(y)| dy \leq C \|f_1\|_{\exp L^{r_1}, Q} \cdots \|f_m\|_{\exp L^{r_m}, Q} \|g\|_{L(\log L)^{1/r}, Q},$$

其中 $r_1, \dots, r_m \geq 1$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_m}$. 而 Q 是 $\mathbb{R}^n$ 中的方体.

对 $r \geq 1$, 我们定义空间 $Osc_{\exp L^r}$: $Osc_{\exp L^r} = \{f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{Osc_{\exp L^r}} < \infty\}$, 其中 $\|f\|_{Osc_{\exp L^r}} = \sup_Q \|f - f_Q\|_{\exp L^r, Q} = \sup_Q \|f - f_Q\|_{e^{tr}-1, Q}$, 而上确界取遍了 $\mathbb{R}^n$ 中的所有方体. 很容易看出 $Osc_{\exp L^1} = BMO(\mathbb{R}^n)$. 我们知道对 $r > 1$, 空间 $Osc_{\exp L^r}$ 适当的包含在 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 中, 且有范数关系 $\|b\|_* \leq C\|b\|_{Osc_{\exp L^r}}$ (参见 [4]).

(4) 一些引理

先引入一些已经知道的引理.

引理 2.1^[12, p. 485]. 设 $0 < q < l < \infty$, 对每个函数 f , 定义

$$\|f\|_{WL^l} = \sup_{t>0} t|\{x : |f(x)| > t\}|^{1/l} \quad \text{和} \quad N_{l,q}(f) = \sup_E \frac{\|f\chi_E\|_q}{|\chi_E|_s}, \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{l},$$

其中 $\sup$ 取遍了满足 $0 < |E| < \infty$ 的所有可测集 E . 则

$$\|f\|_{WL^l} \leq N_{l,q}(f) \leq \left(\frac{l}{l-q}\right)^{1/q} \|f\|_{WL^l}.$$

引理 2.2^[9, 10]. 设 w 为 A_∞ 权. 则存在正常数 C , 依赖于 w 的 A_∞ 条件使得

$$w(\{y \in \mathbb{R}^n : M(f)(y) > \beta, M_\rho^\sharp(f)(y) \leq \beta\varepsilon\}) \leq C[w]_{A_\infty}^\tau \varepsilon^\rho w\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n : M(f)(y) > \frac{\beta}{2}\right\}\right)$$

对所有 $\beta, \varepsilon > 0$ 都成立.

作为一个推论, 对 $\rho > 0$ 我们有

(i) 设 $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 是双倍的. 存在正常数 C , 依赖于 w 的 A_∞ 条件和 φ 的双倍条件, 使得

$$\sup_{t>0} \varphi(t)w(\{y \in \mathbb{R}^n : M_\rho(f)(y) > t\}) \leq C \sup_{t>0} \varphi(t)w(\{y \in \mathbb{R}^n : M_\rho^\sharp(f)(y) > t\}),$$

对每一个使左边有限的函数成立.

(ii) 设 $0 < p < \infty$, 存在正常数 C , 依赖于 w 的 A_∞ 条件和 p 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} [M_\rho(f)(x)]^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} [M_\rho^\sharp(f)(x)]^p w(x) dx,$$

对每一个使得左边有限的函数成立.

引理 2.3^[4]. 设 $w \in A_1$, $\Phi(t) = t \log^{1/r}(e+t)$, 则存在正常数 C , 使得对任意的 $t > 0$ 和任意的局部可积的函数 f ,

$$w(\{y \in \mathbb{R}^n : M_\Phi(f)(y) > t\}) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(y)|}{t}\right) w(y) dy.$$

下面, 我们将给出 g_λ^* 函数的一些点态的精细估计.

引理 2.4. 设 $0 < \rho < 1$, 则存在正常数 C , 使得

$$M_\rho^\sharp(g_\lambda^*(f))(x) \leq CM(f)(x)$$

对所有有界紧支集的函数 f 成立.

证明 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 记 Q 是一个以 x_0 为中心, 边长是 d 且包含 x 的方体, χ_Q 为 Q 上的特征函数. 分解 $f = f_1 + f_2$, 其中 $f_1 = f\chi_{8\sqrt{n}Q} := f\chi_{Q^*}$.

由引理 2.1 和 g_λ^* 的弱 (1,1) 有界性 (见定理 1.1, 参见第 3 节证明) 得

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q [g_\lambda^*(f_1))(y')]^\rho dy'\right)^{1/\rho} \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_1(y')| dy' \leq CM(f)(x). \quad (2.1)$$

注意到 g_λ^* 是 L^p ($p > 1$) 有界的^[3] 且 $f \in L^p$, 则 $g_\lambda^*(f_2)(x) < \infty$ 在 Q 上几乎处处成立. 这说明存在一个可测集 E , 其测度为零使得对任意的 $x \in Q \setminus E$ 都有 $g_\lambda^*(f_2)(x) < \infty$.

下面我们将证明:

$$|g_\lambda^*(f_2)(u) - g_\lambda^*(f_2)(v)| \leq CM(f)(x) \text{ 对任意的 } u, v \in Q \setminus E. \quad (2.2)$$

注意到

$$\begin{aligned} |g_\lambda^*(f_2)(u) - g_\lambda^*(f_2)(v)| &= | \|\psi_{t,y}(f_2)(u)\|_{\mathcal{H}} - \|\psi_{t,y}(f_2)(v)\|_{\mathcal{H}} | \\ &\leq \| \|\psi_{t,y}(f_2)(u) - \psi_{t,y}(f_2)(v)\| \|_{\mathcal{H}} \\ &:= I, \end{aligned}$$

其中 $\psi_{t,y}(f)(x) = \left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{\lambda n/2} \int \psi_t(y-z)f(z)dz$. 则我们只要证明 $I \leq CM(f)(x)$ 即可.

我们将分割 I 为四部分, 即

$$\begin{aligned} I &\leq \| |\psi_{t,y}(f_2)(u) - \psi_{t,y}(f_2)(v)| \chi_{\{|u-y| \leq t, |v-y| \leq t\}} \|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \| |\psi_{t,y}(f_2)(u) - \psi_{t,y}(f_2)(v)| \chi_{\{|u-y| > t, |v-y| \leq t\}} \|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \| |\psi_{t,y}(f_2)(u) - \psi_{t,y}(f_2)(v)| \chi_{\{|u-y| \leq t, |v-y| > t\}} \|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \| |\psi_{t,y}(f_2)(u) - \psi_{t,y}(f_2)(v)| \chi_{\{|u-y| > t, |v-y| > t\}} \|_{\mathcal{H}} \\ &:= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

首先来考虑 I_1 .

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \| |\psi_{t,y}(f_2)(u) - \psi_{t,y}(f_2)(v)| \chi_{\{|u-y| \leq t, |v-y| \leq t, t \leq 8\sqrt{n}d\}} \|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \| |\psi_{t,y}(f_2)(u) - \psi_{t,y}(f_2)(v)| \chi_{\{|u-y| \leq t, |v-y| \leq t, t > 8\sqrt{n}d\}} \|_{\mathcal{H}} \\ &:= I_{1,1} + I_{1,2}. \end{aligned}$$

本处以后, ε 总是记为一个正数满足 $0 < \gamma < \varepsilon < \min\{(\lambda-2)n/2, \delta\}$.

对 $I_{1,1}$, 注意到 $|\psi_t(y-z)| \leq \frac{t^\delta}{(t+|y-z|)^{n+\delta}}$ 和 $|u-z| \leq |u-y| + |y-z| \leq t + |y-z|$. 由 Minkowski 不等式, 我们得

$$\begin{aligned} I_{1,1} &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(z)| \left(\int_0^{8\sqrt{n}d} \int_{|u-y| \leq t, |u-z| \leq t+|y-z|} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_2(z)|}{|u-z|^{n+\varepsilon}} \left(\int_0^{8\sqrt{n}d} \int_{|u-y| \leq t} \frac{t^{2\varepsilon}}{t^{n+1}} dydt \right)^{1/2} dz \leq CM(f)(x). \end{aligned}$$

对于 $I_{1,2}$, 因为 $2(t+|y-z|) > 2t + |z-u| - |u-y| > t + |z-u|$ 并且

$$\left| \left(\frac{1}{t+|u-y|} \right)^{\lambda n/2} - \left(\frac{1}{t+|v-y|} \right)^{\lambda n/2} \right| \leq \frac{Cd}{(t+|u-y|)^{\lambda n/2+1}}. \quad (2.3)$$

我们得

$$\begin{aligned} I_{1,2} &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(z)| \left(\int_{8\sqrt{n}d}^\infty \int_{|u-y| \leq t, |v-y| \leq t} \frac{d^2}{t^2} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_2(z)|}{|u-z|^{n+\varepsilon}} \left(\int_{8\sqrt{n}d}^\infty \int_{|u-y| \leq t} \frac{d^2 t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2\delta-2\varepsilon}} \frac{dydt}{t^{n+3}} \right)^{1/2} dz \leq CM(f)(x). \end{aligned}$$

对 I_2 , 若 $t < 8\sqrt{n}d$, 因为 $\frac{t}{t+|y-z|} \leq 1$ 和 $|v-z| \leq |v-y| + |y-z| \leq t + |y-z|$, 我们可以用和处理 $I_{1,1}$ 类似的方法来处理 I_2 . 若 $t > 8\sqrt{n}d$, $|u-y| > t$, $|v-y| \leq t$, 则 $|u-y| \sim |v-y|$, 因

此 (2.3) 式成立. 重复我们前面处理 $I_{1,2}$ 的步骤, 便得到 $I_2 \leq CM(f)(x)$. 相似的估计对 I_3 也成立.

现在我们来处理 I_4 . 考虑三种情况:

$$\begin{aligned} I_4 \leq & \| |\psi_{t,y}(f_2)(u) - \psi_{t,y}(f_2)(v)| \chi_{\{|u-y|>t, |v-y|>t, t \leq 8\sqrt{n}d, |u-y|>1/2|u-z|\}} \|_{\mathcal{H}} \\ & + \| |\psi_{t,y}(f_2)(u) - \psi_{t,y}(f_2)(v)| \chi_{\{|u-y|>t, |v-y|>t, t \leq 8\sqrt{n}d, |u-y| \leq 1/2|u-z|\}} \|_{\mathcal{H}} \\ & + \| |\psi_{t,y}(f_2)(u) - \psi_{t,y}(f_2)(v)| \chi_{\{|u-y|>t, |v-y|>t, t > 8\sqrt{n}d\}} \|_{\mathcal{H}} := I_{4,1} + I_{4,2} + I_{4,3}. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\int_{|y-z|>t} \frac{t^{2n+2\varepsilon+2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} dy \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^{j-1}t \leq |y-z| < 2^j t} \frac{t^{2n+2\varepsilon+2\delta}}{(t+2^{j-1}t)^{2n+2\delta}} dy \leq Ct^{n+2\varepsilon}. \quad (2.4)$$

对 $I_{4,1}$, 很容易看出 $|u-y| > |u-z|/2$, 注意到 $\lambda > 2$ 我们得到:

$$\frac{t^{\lambda n}}{(t+|u-y|)^{\lambda n}} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} \leq \frac{C}{|z-u|^{2n+2\varepsilon}} \frac{t^{2n+2\varepsilon+2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}}.$$

因此, 由 Minkowski 不等式和 (2.4) 式, 得

$$\begin{aligned} I_{4,1} & \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_2(z)|}{|u-z|^{n+\varepsilon}} \left(\int_0^{8\sqrt{n}d} \int_{|u-y|>t} \frac{t^{2n+2\varepsilon+2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \\ & \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_2(z)|}{|u-z|^{n+\varepsilon}} \left(\int_0^{8\sqrt{n}d} \int_{|y-z| \leq t} \frac{t^{2\varepsilon}}{t^{n+1}} dydt \right)^{1/2} dz \\ & \quad + C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_2(z)|}{|u-z|^{n+\varepsilon}} \left(\int_0^{8\sqrt{n}d} \int_{|y-z|>t} \frac{t^{2n+2\varepsilon+2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \leq CM(f)(x). \end{aligned}$$

现在来处理 $I_{4,2}$. 由 $|u-y| \leq |u-z|/2$, 我们得到 $|y-z| > |u-z|/2$. 由此并结合 (2.4) 式得:

$$I_{4,2} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_2(z)|}{|u-z|^{n+\varepsilon}} \left(\int_0^{8\sqrt{n}d} \int_{|u-y|>t} \frac{t^{\lambda n}}{(t+|u-y|)^{\lambda n}} \frac{t^{2\varepsilon} dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \leq CM(f)(x).$$

最后, 我们转向 $I_{4,3}$ 的估计. 由于 $t > 8\sqrt{n}d$, 因而 (2.3) 式成立, 我们得到:

$$\begin{aligned} I_{4,3} & \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(z)| \left(\int_{8\sqrt{n}d}^{\infty} \int_{\substack{t < \min\{|u-y|, |v-y|\} \\ |u-y| \geq 2|z-u|}} \frac{d^2 t^{\lambda n}}{(t+|u-y|)^{\lambda n+2}} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \\ & \quad + C \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(z)| \left(\int_{8\sqrt{n}d}^{\infty} \int_{\substack{t < \min\{|u-y|, |v-y|\} \\ |u-y| < 2|z-u|}} \frac{d^2 t^{\lambda n}}{(t+|u-y|)^{\lambda n+2}} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \\ & := I_{4,3}^1 + I_{4,3}^2 \end{aligned}$$

对 $I_{4,3}^1$, $|y-z| \geq |u-y| - |z-u| > |u-y|/2 > |z-u|$, 因此由 $I_{1,2}$ 和 $I_{4,2}$ 可得:

$$I_{4,3}^1 \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_2(z)|}{|u-z|^{n+\varepsilon}} \left(\int_{8\sqrt{n}d}^{\infty} \int_{|u-y|>t} \frac{d^2 t^{\lambda n+2\varepsilon}}{(t+|u-y|)^{\lambda n+2}} \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \leq CM(f)(x).$$

对 $I_{4,3}^2$, 由于 $t < \min\{|u-y|, |v-y|\}$, $|u-y| < 2|z-u|$, 若 $|y-z| < |z-u|/2$, 则 $|z-u| \sim |u-y|$.

若 $|y-z| \leq t$, $|y-z| \leq |u-z|/2$, 则 $|u-y| \geq |u-z| - |y-z| \geq |u-z|/2$. 进一步,

$$\begin{aligned} & \frac{t^{\lambda n}}{(t+|u-y|)^{\lambda n+2}} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} \\ & \leq \begin{cases} \frac{C t^{2n+2\varepsilon}}{|u-z|^{2n+2\varepsilon}} \frac{t^{\lambda n+2\varepsilon}}{(t+|u-y|)^{\lambda n+2}}, & \text{若 } |y-z| \geq \frac{|z-u|}{2}, \\ \frac{C}{|x|^{2n+2\varepsilon}} \frac{t^{2\varepsilon}}{t^2}, & \text{若 } |y-z| \leq t, |y-z| \leq \frac{|z-u|}{2}, \\ \frac{C t^{2n+2\varepsilon}}{t^2} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}}, & \text{若 } |y-z| > t, |y-z| \leq \frac{|z-u|}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} I_{4,3}^2 &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_2(z)|}{|z-u|^{n+\varepsilon}} \left(\int_{8\sqrt{n}d}^{\infty} \int_{|u-y|>t} \frac{d^2 t^{\lambda n+2\varepsilon}}{(t+|u-y|)^{\lambda n+2}} \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz + C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^\varepsilon |f_2(z)|}{|z-u|^{n+\varepsilon}} dz \\ &\quad + C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_2(z)|}{|z-u|^{n+\varepsilon}} \left(\int_{8\sqrt{n}d}^{\infty} \int_{|y-z|>t} \frac{d^2 t^{2n+2\varepsilon}}{t^2} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \\ &\leq CM(f)(x). \end{aligned}$$

从而完成了对不等式 (2.2) 的证明.

由 (2.2) 式, 很容易得到

$$\sup_{x \in Q} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |g_\lambda^*(f_2)(u) - (g_\lambda^*(f_2))_Q|^\rho du \right)^{1/\rho} \leq CM(f)(x). \quad (2.5)$$

那么由 (2.1) 和 (2.5) 式, $M_\rho^\sharp(g_\lambda^*(f))(x) \leq CM(f)(x)$. 便完成了引理 2.4 的证明.

在给出其它引理之前, 首先我们给出一些符号.

对给定的正整数 m 和所有的 $1 \leq k \leq m$, 记 $\mathcal{C}_k^m$ 为 $\{1, 2, \dots, m\}$ 的所有有限子集 $\sigma = \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$ 全体. 对任意的 $\sigma \in \mathcal{C}_k^m$, σ' 的余集序列为 $\sigma' = \{1, 2, \dots, m\} \setminus \sigma$. 设 $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$ 是一类局部可积函数, 对所有的 $1 \leq k \leq m$ 和任意的 $\sigma = \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\} \in \mathcal{C}_k^m$, 我们记 $\vec{b}_\sigma = (b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(k)})$, $b_\sigma = b_{\sigma(1)} \cdots b_{\sigma(k)}$. 对任意的向量 $(r_{\sigma(1)}, \dots, r_{\sigma(k)})$, 我们记 $\|\vec{b}_\sigma\|_{Osc_{\exp L} r_\sigma} = \|b_{\sigma(1)}\|_{Osc_{\exp L} r_{\sigma(1)}} \cdots \|b_{\sigma(k)}\|_{Osc_{\exp L} r_{\sigma(k)}}$.

对每一个 $\sigma = \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\} \in \mathcal{C}_k^m$, 定义 $g_{\lambda, \vec{b}_\sigma}^*$ 的第 k 个多线性交换子为:

$$g_{\lambda, \vec{b}_\sigma}^*(f)(x) = \left\| \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_t(y-z) \left[\prod_{j=1}^k (b_{\sigma(j)}(x) - b_{\sigma(j)}(z)) \right] f(z) dz \right\|_{\mathcal{H}}.$$

若 $\sigma = \{1, \dots, m\}$ ($m \in \mathbb{N}$), 很明显 $g_{\lambda, \vec{b}_\sigma}^* = g_{\lambda, \vec{b}}^*$.

引理 2.5. 设 $b \in \text{BMO}$, $0 < \rho < \eta < 1$, $\lambda > 2$. 则存在正常数 C , 使得对所有有界紧支集的函数 f 下面不等式成立:

$$M_\rho^\sharp(g_{\lambda, \vec{b}}^*(f))(x) \leq C \|\vec{b}\| \left[M_{L(\log L)^{1/\eta}}(f)(x) + \sum_{j=1}^m \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_j^m} \|\vec{b}_\sigma\|_{Osc_{\exp L} r_\sigma} M_\eta(g_{\lambda, \vec{b}_\sigma}^*(f))(x) \right].$$

证明 首先, 我们考虑 $m = 1$ 的情况. 在此情况下, 记 $\vec{b} = b$, $r_\sigma = r$, $S_{\vec{b}} = S_b$ 和 $\|\vec{b}\| = \|b\|_{Osc_{\exp L} r}$. 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 令 $B = B(x_0, d)$ 为以 x_0 为中心的任意一个包含 x 的以 d 为半径的球. 分解 $f = f_1 + f_2$, 其中 $f_1 = f \chi_{8nB} := f \chi_{B^*}$. 这样我们可以写成:

$$\begin{aligned} &b(x) \psi_{t,y}(f)(x) - \psi_{t,y}(bf)(x) \\ &= (b(x) - b_{B^*}) \psi_{t,y}(f)(x) - \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_t(y-z) (b(z) - b_{B^*}) f(z) dz \\ &= (b(x) - b_{B^*}) \psi_{t,y}(f)(x) - \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_t(y-z) (b(z) - b_{B^*}) f_1(z) dz \\ &\quad - \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_t(y-z) (b(z) - b_{B^*}) f_2(z) dz, \end{aligned} \quad (*)$$

其中 $b_B = \frac{1}{|B|} \int_B b(y) dy$.

对 $b \in \text{BMO}$, 记 $c_B = \frac{1}{|B|} \int_B g_\lambda^*((b - b_{B^*}) f_2)(x) dx$. 为了证明引理 2.5, 首先考虑 $(\frac{1}{|B|} \int_B |g_{\lambda, b}^*$

$(f)(y') - c_B|^\rho dy')^{1/\rho}$ 并按照 (*) 将其分成三部分, 得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |g_{\lambda,b}^*(f)(y') - c_B|^\rho dy' \right)^{1/\rho} &\leq C \left(\frac{1}{|B|} \int_B |(b(y') - b_{B^*})g_{\lambda}^*(f)(y')|^\rho dy' \right)^{1/\rho} \\ &\quad + C \left(\frac{1}{|B|} \int_B |g_{\lambda}^*((b - b_{B^*})f_1)(y')|^\rho dy' \right)^{1/\rho} \\ &\quad + C \left(\frac{1}{|B|} \int_B |g_{\lambda}^*((b - b_{B^*})f_2)(y') - c_B|^\rho dy' \right)^{1/\rho} \\ &:= C(\text{I} + \text{II} + \text{III}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

对 I, 限制 $1 < r < \eta/\rho$, 由 Hölder 不等式并注意到 $\|b\|_* \leq C\|b\|_{\text{osc}_{\exp L^r}}$, 我们得

$$\begin{aligned} \text{I} &\leq \left(\frac{1}{|B|} \int_B |b(y') - b_{B^*}|^{\rho r'} dy' \right)^{1/(\rho r')} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |g_{\lambda}^*(f)(y')|^{\rho r} dy' \right)^{1/(\rho r)} \\ &\leq C\|b\|_* M_{\eta}(g_{\lambda}^*(f))(x) \leq C\|b\|_{\text{osc}_{\exp L^r}} M_{\eta}(g_{\lambda}^*(f))(x). \end{aligned} \quad (2.7)$$

因为 $g_{\lambda}^*: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ (注意到我们在证明定理 1.1 时没有用引理 2.5) 和 $0 < \rho < 1$, 结合引理 2.1, 得到

$$\begin{aligned} \text{II} &\leq \frac{C}{|B|} \int_B |(b(y') - b_{B^*})f_1(y')| dy' \leq C\|b\|_{\exp L^r, B^*} \|f\|_{L(\log L)^{1/r}, B^*} \\ &\leq C\|b\|_{\text{osc}_{\exp L^r}} M_{L(\log L)^{1/r}}(f)(x). \end{aligned} \quad (2.8)$$

对 III, 用 Jensen 不等式推出

$$\begin{aligned} \text{III} &\leq \frac{C}{|B|} \int_B |g_{\lambda}^*((b - b_{B^*})f_2)(y') - c_B| dy' \\ &\leq \frac{C}{|B|^2} \int_B \int_B |g_{\lambda}^*((b - b_{B^*})f_2)(y') - g_{\lambda}^*((b - b_{B^*})f_2)(u)| dy' du. \end{aligned}$$

在 (2.2) 的证明中用 $f_2(b(z) - b_{B^*})$ 替换 f_2 , 用球 B 替换 Q , B^* 替换 Q^* 得

$$|g_{\lambda}^*((b - b_{B^*})f_2)(y') - g_{\lambda}^*((b - b_{B^*})f_2)(u)| \leq C d^\varepsilon \int_{(B^*)^c} \frac{|b(z) - b_{B^*}| |f(z)|}{|z - x|^{n+\varepsilon}} dz.$$

因此,

$$\text{III} \leq C d^\varepsilon \int_{(B^*)^c} \frac{|b(z) - b_{B^*}| |f(z)|}{|z - x|^{n+\varepsilon}} dz. \quad (2.9)$$

由事实 $|z - x| \sim |z - x_0|$ 和 $\|b - b_{B^*}\|_{\exp L^r, 2^{j+1}B} \leq Cj\|b\|_{\text{osc}_{\exp L^r}}$ (参见 (3.6), [4, p. 683]), 我们得到

$$\begin{aligned} \text{III} &\leq C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j\varepsilon}} \|b - b_{B^*}\|_{\exp L^r, 2^{j+1}B} \cdot \|f\|_{L(\log L)^{1/r}, 2^{j+1}B} \\ &\leq C\|b\|_{\text{osc}_{\exp L^r}} M_{L(\log L)^{1/r}} f(x). \end{aligned} \quad (2.10)$$

从 (2.7)–(2.10) 式的估计知, 引理 2.5 对 $m = 1$ 成立.

现在考虑 $m \geq 2$ 时的情形. 对每个向量 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, 由 [4, pp. 683–684], 得到

$$\begin{aligned} \psi_{t,y,\vec{b}}(f)(x) &= \left[\prod_{j=1}^m (b_j(x) - \gamma_j) \right] \psi_{t,y}(f)(x) + (-1)^m \psi_{t,y} \left(\left[\prod_{j=1}^m (b_j - \gamma_j) \right] f \right)(x) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_j^m} C_{m,j} \left[\prod_{i=1}^j (b_{\sigma(i)}(x) - \gamma_i) \right] \psi_{t,y,\vec{b}_{\sigma'}}(f)(x), \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中 $\psi_{t,y}(f)(x) = \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n/2} \int \psi_t(y-z) f(z) dz$, $C_{m,j}$ 是只依赖于 m 和 j 的绝对常数.

对固定的 $x \in \mathbb{R}^n$, 设 B, B^*, f_1 和 f_2 和前面定义的一样. 选择 $\gamma_j = (b_j)_{B^*} = \frac{1}{|B^*|} \int_{B^*} b_j(x) dx$ 和 $c_{B^*} = (g_\lambda^*((b_1 - \gamma_1) \cdots (b_m - \gamma_m) f_2))_{B^*}$. 因为 $0 < \rho < 1$,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|B|} \int_B |g_{\lambda, \vec{b}}^*(f)(y') - c_B|^\rho dy' \right)^{1/\rho} \\ & \leq C \left(\frac{1}{|B|} \int_B \left| \left[\prod_{j=1}^m (b_j(y') - \gamma_j) \right] g_{\lambda, b}^*(f)(y') \right|^\rho dy' \right)^{1/\rho} \\ & \quad + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_j^m} \left(\frac{1}{|B|} \int_B \left| \left[\prod_{i=1}^j (b_{\sigma_i}(y') - \gamma_i) \right] g_{\lambda, \vec{b}_{\sigma'}}^*(f)(y') \right|^\rho dy' \right)^{1/\rho} \\ & \quad + C \left(\frac{1}{|B|} \int_B \left| g_\lambda^* \left(\left[\prod_{j=1}^m (b_j - \gamma_j) \right] f_1 \right)(y') \right|^\rho dy' \right)^{1/\rho} \\ & \quad + C \left(\frac{1}{|B|} \int_B \left| g_\lambda^* \left(\left[\prod_{j=1}^m (b_j - \gamma_j) \right] f_2 \right)(y') - c_{B^*} \right|^\rho dy' \right)^{1/\rho} \\ & := C(\text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

与 (2.7) 及 (2.8) 式类似, 我们得到

$$\begin{aligned} \text{I} & \leq C \left[\prod_{j=1}^m \|b_j\|_{\text{Osc}_{\exp L^{r_j}}} \right] M_\varepsilon(g_\lambda^*(f))(x), \\ \text{II} & \leq C \left[\prod_{j=1}^m \|b_j\|_{\text{Osc}_{\exp L^{r_j}}} \right] M_{L(\log L)^{1/r}}(g_\lambda^*(f))(x), \\ \text{III} & \leq C \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_j^m} [\|\vec{b}_\sigma\|_{\text{Osc}_{\exp L^{r_\sigma}}}] M_\varepsilon(g_{\lambda, \vec{b}_{\sigma'}}^*(f))(x). \end{aligned}$$

对最后一部分 IV, 在 (2.2) 式的证明中用 $[\prod_{j=1}^m (b_j - \gamma_j)] f_2$ 来替换 f_2 , 用球 B 替换 Q , B^* 替换 Q^* 得

$$\left| g_\lambda^* \left(\left[\prod_{j=1}^m (b_j(z) - \gamma_j) \right] f_2 \right)(y') - c_{B^*} \right| \leq C d^\varepsilon \int_{(B^*)^c} \frac{|\prod_{j=1}^m (b_j(z) - \gamma_j)| |f(z)|}{|z - x|^{n+\varepsilon}} dz. \quad (2.13)$$

用处理 (2.9) 的同样的步骤, 更一般化的 Hölder 不等式和 (2.13) 式, 我们可以得到

$$\text{IV} \leq C \left[\prod_{j=1}^m \|b_j\|_{\text{Osc}_{\exp L^{r_j}}} \right] M_{L(\log L)^{1/r}}(f)(x).$$

从对 I, II, III 和 IV 的估计知引理对 $m \geq 2$ 成立.

引理 2.6 若 $\text{supp } f \subset B(0, R)$, $|x| > 2R$. 则对有界函数 $b_j(x)$ ($j = 1, \dots, m$), 下面的不等式成立

$$g_{\lambda, \vec{b}}^*(f)(x) \leq CM(f)(x), \quad \lambda > 2. \quad (2.14)$$

证明 记 $\Psi_t(x, y, z) = \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}}$. 因为 $|t^{-n} \psi(\frac{y-z}{t})| \leq \frac{t^\delta}{(t+|y-z|)^{n+\delta}}$. 由 b_j 的 L^∞ 有界性和 Minkowski 不等式, 我们得

$$\begin{aligned} g_{\lambda, \vec{b}}^*(f)(x) & \leq C \int_{B(0, R)} |f(z)| \left(\iint_{|x-y| \leq t} \Psi_t(x, y, z) \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \\ & \quad + C \int_{B(0, R)} |f(z)| \left(\iint_{|x-y| > t} \Psi_t(x, y, z) \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz := J + K. \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$J \leq C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\iint_{\max\{|x-y|, |y-z|\} \leq t} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \\ + C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\iint_{|x-y| \leq t < |y-z|} \Psi_t(x, y, z) \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz := C(J_1 + J_2). \quad (2.16)$$

由 Minkowski 不等式

$$J_1 \leq C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\iint_{\substack{\max\{|x-y|, |y-z|\} \leq t \\ y \in B(0, 3/2R)}} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \\ + C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\iint_{\substack{\max\{|x-y|, |y-z|\} \leq t \\ y \in B^c(0, 3/2R)}} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \\ := J_{1,1} + J_{1,2} \quad (2.17)$$

现在我们首先考虑 $J_{1,1}$. 因为 $t \geq |x-y| > |x| - |y| \geq |x|/4$, 因此

$$J_{1,1} \leq C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\int_{|x|/4}^{\infty} \frac{1}{t^{2n+1}} dt \right)^{1/2} dz \\ \leq C \frac{1}{|2x|^n} \int_{B(0, 2|x|)} |f(z)| dz \leq CM(f)(x). \quad (2.18)$$

其次, 我们将估计 $J_{1,2}$. 考虑三种情形: 情形 1, $t < |y| + 2R$; 情形 2, $t \geq |y| + 2R$, $|x| \leq 2|y|$; 情形 3, $t \geq |y| + 2R$, $|x| > 2|y|$.

对情形 1, 很容易看出 $|x| \leq 4|y|$, $|y| - R < t < |y| + 2R$ 以及 $|y| - R \sim |y| + 2R \sim |y - z| \sim |y|$, 则

$$J_{1,2} \leq C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\int_{\substack{y \in B^c(0, 3/2R) \\ |x| \leq 4|y|}} \frac{1}{|y-z|^{2n}} \frac{R}{|y|^{n+1}} dy \right)^{1/2} dz \\ = C \frac{1}{|x|^n} \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\int_{y \in B^c(0, 3/2R)} \frac{R}{|y|^{n+1}} dy \right)^{1/2} dz \leq CM(f)(x). \quad (2.19)$$

最后的不等式是重复和我们处理 $J_{1,1}$ 时相同的步骤得到的.

情形 2. 为了估计 $J_{1,2}$, 注意到 $|x| \leq 2|y| < 2t$, 因而

$$J_{1,2} \leq C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\int_{|x|/2}^{\infty} \int_{|y-z| < t} \frac{1}{t^{3n+1}} dydt \right)^{1/2} dz \leq CM(f)(x). \quad (2.20)$$

最后, 来考虑情形 3. 若 $2|y| < |x|$, 则 $|y-z| \leq |y| + R \leq |x|$ 及 $t > |y-x| > |x| - |y| \geq |x|/2 > R$. 因此

$$J_{1,2} \leq C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\int_{|x|/2}^{\infty} \int_{|y-z| < |x|} \frac{1}{t^{3n+1}} dydt \right)^{1/2} dz \leq CM(f)(x). \quad (2.21)$$

下面, 我们来考虑 J_2 .

$$J_2 \leq C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\iint_{\substack{|x-y| \leq t < |y-z| \\ y \in B(0, 3/2R)}} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \\ + C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\iint_{\substack{|x-y| \leq t < |y-z| \\ y \in B^c(0, 3/2R)}} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz := J_{2,1} + J_{2,2}.$$

对 $J_{2,1}$, 注意到 $R/2 < |x| - \frac{3}{2}R \leq |x| - |y| \leq t < 3R$, 则 $2R < |x| < 3R + \frac{3}{2}R = 9R/2$. 故

$$J_{2,1} \leq C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\int_{R/2}^{3R} \int_{|y-z| \leq 3R} \frac{1}{R^{2n}} \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz$$

$$\leq C \frac{1}{(9R)^n} \int_{B(0,9R)} |f(z)| dz \leq CM(f)(x). \quad (2.22)$$

对 $J_{2,2}$, 我们分别考虑 $|y| > 2|x|$ 和 $|y| \leq 2|x|$ 两种情形. 注意到若 $|y| > 2|x|$ 则

$$\begin{aligned} J_{2,2} &\leq C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\int_{|y|>2|x|} \left(\int_{|y|/2}^{|y|+R} \frac{1}{t^{3n+1}} dt \right) dy \right)^{1/2} dz \\ &\leq \frac{C}{|x|^n} \int_{B(0,R)} |f(z)| dz \leq CM(f)(x). \end{aligned} \quad (2.23)$$

若 $|y| \leq 2|x|$, 注意到 $t < |y-z| \leq |y|+|z| < 2|x|+R < 3|x|$, $t+|y-z| > |y-x|+|y-z| \geq |x-z|$ 和 $|x-z| \sim |x|$, 再加上 $\varepsilon < \delta$ 的事实, 我们得

$$J_{2,2} \leq C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\int_0^{3|x|} \left(\int_{|y-x|<t} \frac{t^{2\varepsilon}}{|x-z|^{2n+2\varepsilon}} dy \right) \frac{dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \leq CM(f)(x). \quad (2.24)$$

下面我们给出 K 的估计. 和前面类似, 我们把 K 分成两部分,

$$\begin{aligned} K &\leq C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\iint_{\substack{|x-y|>t \\ y \in B(0,3/2R)}} \Psi_t(x, y, z) \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \\ &\quad + C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\iint_{\substack{|x-y|>t \\ y \in B^c(0,3/2R)}} \Psi_t(x, y, z) \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz := L + N. \end{aligned} \quad (2.25)$$

首先, 考虑 L . 因 $x \in B^c(0, 2R)$, $y \in B(0, 3/2R)$ 和 $z \in B(0, R)$, 因此 $|x-y| > |x|-|y| \geq |x|/4 \geq R/2$, $|y-z| < 3R$. 进一步,

$$\begin{aligned} \Psi_t(x, y, z) &\leq \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{2n+2\varepsilon} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} \\ &\leq \begin{cases} \frac{C t^{2n+2\varepsilon}}{|x|^{2n+2\varepsilon}} \frac{1}{|y-z|^{n-\varepsilon}} \frac{1}{t^{n+\varepsilon}}, & \text{若 } t > |y-z|, \\ \frac{C t^{2n+2\varepsilon}}{|x|^{2n+2\varepsilon}} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}}, & \text{若 } t \leq |y-z|. \end{cases} \end{aligned}$$

我们得

$$\begin{aligned} L &\leq C \int_{B(0,R)} \frac{|f(z)|}{|x|^{n+\varepsilon}} \left(\int_{|y-z|<3R} \frac{1}{|y-z|^{n-\varepsilon}} \int_0^{|x|+2R} \frac{t^\varepsilon}{t} dt \right)^{1/2} dz \\ &\quad + C \int_{B(0,R)} \frac{|f(z)|}{|x|^{n+\varepsilon}} \left(R^\varepsilon \int_0^{3R} \frac{t^{2n+2\varepsilon}}{t^{n+1}} \int_{|y-z|>t} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}} dy dt \right)^{1/2} dz \\ &\leq CM(f)(x). \end{aligned} \quad (2.26)$$

下面, 我们将给出 N 的一个比较精细的估计.

分别考虑三种情形 $|y-z| \leq t < |y|+2R$, $\max\{|y-z|, |y|+2R\} \leq t$ 和 $|y-z| > t$.

对第一种情形 $|y-z| \leq t < |y|+2R$. 若 $2|y| > |x|$, 注意到 $y \in B^c(0, 3/2R)$ 和 $z \in B(0, R)$, 因此 $|y-z| \sim |y|$, $|y|-R \leq |y|-|z| \leq |y-z| < t \leq |y|+2R$. 则我们推出

$$N \leq C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\int_{\max\{3R, |x|\} \leq 2|y|} \left(\int_{|y|-R}^{|y|+2R} \frac{1}{t^{3n+1}} dt \right) dy \right)^{1/2} dz \leq CM(f)(x).$$

如果 $2|y| \leq |x|$, 由下面事实 $|x-y| > |x|-|y| \geq |x|/2$ 和 $t < |x|$ 我们得

$$N \leq C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\int_0^{|x|} \int_{|y-z|<t} \frac{2^{2n+2\varepsilon}}{|x|^{2n+2\varepsilon}} \frac{t^{2\varepsilon}}{t^{n+1}} dy dt \right)^{1/2} dz \leq CM(f)(x).$$

现在我们给出第二种情形 $\max\{|y-z|, |y|+2R\} \leq t$ 的估计. 若此时还有 $|x| \leq 2|y|$, 很容易看出 $|y-z| \sim |y|$ 和 $\frac{1}{|y-z|} \leq \frac{C}{|x|}$, 注意到 $t > |y|+2R > |x|/2$, 由这些并结合我们处理 (2.23)

的步骤, 我们很容易得到 $N \leq CM(f)(x)$. 若此时 $|x| > 2|y|$, 因为 $R/2 < |y - z| \leq |y| + R \leq |x|/2 + R \leq |x|$, $t + |x - y| \geq t + |x| - |y| > t + |x|/2 - R > |x|/2 - R$ 和 $0 < t < 3|x|$. 取 ε 和前面的一样, 我们得到 $\Psi_t(x, y, z) \leq \frac{t^{2\varepsilon}}{|x|^{2n+2\varepsilon}}$, 则

$$N \leq C \int_{B(0,R)} \frac{|f(z)|}{|x|^n} \left(\int_0^{3|x|} \frac{1}{|x|^{2\varepsilon}} \left(\int_{|y-z|<t} dy \right) \frac{dt}{t^{n+1-2\varepsilon}} dy \right)^{1/2} dz \leq CM(f)(x).$$

最后, 我们需要来估计第三种情形, 在 N 中 $|y - z| > t$. 若此时 $|x - y| > 2|x - z|$, 很容易看出 $|y - z| \geq |x - y|/2 > |x - z|$, 则

$$\begin{aligned} N &\leq C \int_{B(0,R)} |f(z)| \left(\iint_{\substack{t < |y-z|, |x-y| > 2|x-z| \\ |y-z| > |x-z|}} \left(\frac{t}{t + |x - y|} \right)^{2n-2\varepsilon} \frac{t^{2\delta}}{(t + |y - z|)^{2n+2\delta}} \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \\ &\leq C \int_{B(0,R)} \frac{|f(z)|}{|x - z|^{n-\varepsilon}} \left(\int_{|y-z|>|x-z|} \left(\int_0^{|y-z|} t^{n-2\varepsilon-1} dt \right) \frac{dy}{|y - z|^{2n}} \right)^{1/2} dz \leq CM(f)(x). \end{aligned}$$

若此时 $|x - y| \leq 2|x - z|$, 另外 $|x - z|/2 < |x - y|$, 我们得

$$N \leq C \int_{B(0,R)} \frac{|f(z)|}{|x - z|^{n+\varepsilon}} \left(\int_0^{2|x-z|} \int_{|y-z|>t} \frac{t^{n+2\varepsilon}}{(t + |y - z|)^{2n}} \frac{dy dt}{t} \right)^{1/2} dz \leq CM(f)(x).$$

若此时 $|y - x| \leq |x - z|/2$, 则 $|y - z| \sim |x - z|$,

$$N \leq C \int_{B(0,R)} \frac{|f(z)|}{|x - z|^{n+\varepsilon}} \left(\int_0^{|x-z|} \int_{|x-y|>t} \left(\frac{t}{t + |x - y|} \right)^{\lambda n} \frac{t^{2\varepsilon}}{t^{n+1}} dy dt \right)^{1/2} dz \leq CM(f)(x).$$

这样我们就得到了 N 的如下估计:

$$N \leq CM(f)(x). \quad (2.27)$$

把上述 (2.15)–(2.27) 式估计综合起来, 我们便完成了对此引理的证明.

3 定理 1.1 的证明

让我们现在转向定理 1.1 的证明.

对 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 和任意的 $\beta > 0$, 由 Calderón-Zygmund 分解 (参见 [13]), 我们得到下面的结论:

- (i) $\mathbb{R}^n = F \cup E$, $F \cap E = \emptyset$;
- (ii) $E = \bigcup_k Q_k$, 其中 $\{Q_k\}$ 是内部不交的方体序列;
- (iii) $|f| \leq \beta$ a.e. $x \in F$;
- (iv) $\beta < \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |f| dx \leq 2^n \beta$ 对每个 k 成立;
- (v) $|E| \leq \frac{C}{\beta} \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx$.

记

$$u(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F, \\ \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(y) dy, & x \in Q_k, \end{cases}$$

并令 $b = f - u$, 则当 $x \in F$ 时 $b(x) = 0$ 且 $\int_{Q_k} b(x) dx = 0$ 对每个 k 成立. 因此我们得到

$$|\{x : g_\lambda^*(f)(x) > \beta\}| \leq |\{x : g_\lambda^*(u)(x) > \beta/2\}| + |\{x : g_\lambda^*(b)(x) > \beta/2\}|. \quad (3.1)$$

由 g_λ^* 的 L^2 有界性 [3, 9] 和 (iii)–(v), 很容易看出

$$\left| \left\{ x : g_\lambda^*(u)(x) > \frac{\beta}{2} \right\} \right| \leq \frac{C}{\beta} \|f\|_1. \quad (3.2)$$

另一方面, 我们记 x_k 和 a_k 分别为 Q_k 的中心和边长且对每个 k , 取 B_k 为一中心在 x_k 半径为 $r_k = \frac{\sqrt{n}}{2}a_k$ 的球, 则

$$\left| \left\{ x : g_\lambda^*(b)(x) > \frac{\beta}{2} \right\} \right| \leq \left| \left\{ x : g_\lambda^*(b)(x) > \frac{\beta}{2} \right\} \cap 2E^* \right| + \left| \left\{ x : g_\lambda^*(b)(x) > \frac{\beta}{2} \right\} \cap (2E^*)^c \right|,$$

这里 $E^* = \bigcup_k (8B_k)$. 由 (ii) 和 (v) 得

$$\left| \left\{ x : g_\lambda^*(b)(x) > \frac{\beta}{2} \right\} \cap 2E^* \right| \leq |2E^*| \leq C \sum_k |B_k| \leq C_n |E| \leq \frac{C_n}{\beta} \|f\|_1. \quad (3.3)$$

注意到 $|\{x : g_\lambda^*(b)(x) > \beta/2\} \cap (2E^*)^c| \leq \frac{C}{\beta} \int_{(2E^*)^c} g_\lambda^*(b)(x) dx$ 和 $\int_{\mathbb{R}^n} |b(x)| dx \leq C \|f\|_1$. 因此, 由 (3.1)–(3.3) 式, 为了完成定理 1.1 的证明, 只需要验证

$$\int_{(2E^*)^c} g_\lambda^*(b)(x) dx \leq C \|b\|_1. \quad (3.4)$$

记

$$b_k(x) = \begin{cases} b(x), & \text{当 } x \in Q_k, \\ 0, & \text{当 } x \notin Q_k, \end{cases}$$

则由 Minkowski 不等式和 $b(x)$ 在 Q_k 上的消失条件, 我们得

$$\begin{aligned} \int_{(2E^*)^c} g_\lambda^*(b) dx &\leq \int_{(2E^*)^c} \sum_k \int_{Q_k} |b_k(z)| \left(\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n} |\psi_t(y-z) \right. \\ &\quad \left. - \psi_t(y-x_k)|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz dx \\ &\leq C \sum_k \int_{Q_k} |b_k(z)| (G+F) dz, \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中

$$G = \int_{(2E^*)^c} \left(\iint_{|y-x_k| > 2|x_k-z|} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n} |\psi_t(y-z) - \psi_t(y-x_k)|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dx$$

以及

$$F = \int_{(2E^*)^c} \left(\iint_{|y-x_k| \leq 2|x_k-z|} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n} |\psi_t(y-z) - \psi_t(y-x_k)|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dx.$$

对 F , 仍记 $\Psi_t(x, y, z) = \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n} \frac{t^{2\delta}}{(t+|y-z|)^{2n+2\delta}}$, 与引理 2.6 记号一样. 容易看出, 若 $t \leq 4r_k$, 则 $|x-y| > |x-x_k| - 2r_k$, $|x-y| > t$. 并且,

$$\frac{\Psi_t(x, y, z)}{t^{n+1}} \leq \frac{1}{|x-x_k|^{2n+2\epsilon}} \frac{1}{|y-z|^{n-\epsilon}} \frac{t^\epsilon}{t}.$$

另一方面, 若 $t > 4r_k$, 则 $\frac{\Psi_t(x, y, z)}{t^{n+1}} \leq \frac{1}{|x-x_k|^{2n+2\epsilon}} \frac{t^{2\epsilon}}{t^{n+1}}$. 因而,

$$\begin{aligned} F &\leq C \int_{(2E^*)^c} \left(\int_0^{4r_k} \int_{|y-x_k| \leq 2r_k} \frac{1}{|x-x_k|^{2n+2\epsilon}} \frac{1}{|y-z|^{n-\epsilon}} \frac{t^\epsilon}{t} dydt \right)^{1/2} dx \\ &\quad + C \int_{(2E^*)^c} \left(\int_{|y-x_k| \leq 2r_k} \int_{4r_k}^\infty \frac{1}{|x-x_k|^{2n+2\epsilon}} \frac{t^{2\epsilon}}{t^{n+1}} dt dy \right)^{1/2} dx \leq C. \end{aligned}$$

故我们只要考虑 G . 记 $\Psi_t(x, y) = \left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{\lambda n} \frac{t^{2\delta} r_k^{2\gamma}}{(t+|y-x_k|)^{2n+2\gamma+2\delta}}$, 由对 ψ 的条件假设 (c) 得

$$\begin{aligned} G &\leq C \int_{(2E^*)^c} \left(\iint_{|y-x_k|>2|x_k-z|} \Psi_t(x, y) \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dx \\ &\leq C \int_{(2E^*)^c} \left(\iint_{\substack{|y-x_k|>2|x_k-z| \\ \max\{|y-x|, |y-z|\} \leq t}} \Psi_t(x, y) \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dx \\ &\quad + C \int_{(2E^*)^c} \left(\iint_{\substack{|y-x_k|>2|x_k-z| \\ |y-x|<t<|y-z|}} \Psi_t(x, y) \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dx \\ &\quad + C \int_{(2E^*)^c} \left(\iint_{\substack{|y-x_k|>2|x_k-z| \\ |y-x| \geq t, y \in 4B_k}} \Psi_t(x, y) \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dx \\ &\quad + C \int_{(2E^*)^c} \left(\iint_{\substack{|y-x_k|>2|x_k-z| \\ |y-x| \geq t, y \in (4B_k)^c}} \Psi_t(x, y) \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dx := G_1 + G_2 + G_3 + G_4. \end{aligned}$$

对 G_1, G_2 , 与我们处理 J_1 和 J_2 时类似, 可以得到 $G_1 \leq C, G_2 \leq C$. 同处理 L 和 N 时类似, 我们可以分别得到 $G_i \leq C$ 当 $i = 3, 4$ (在估计 L 和 N 的某些地方, 用 $\varepsilon - \gamma$ 替换 ε). 这里我们略去细节.

由 (3.5) 式和 $G + F \leq \sum_{j=1}^4 G_j + F \leq C$, 我们便完成了定理 1.1 的证明.

4 定理 1.3 的证明

现在, 我们给出定理 1.3 的证明. 我们可以假设

$$\int_{\mathbb{R}^n} [Mf(x)]^p w(x) dx < \infty, \quad (4.1)$$

否则 (1.3) 式就没什么可以证明的了. 首先, 对 $0 < p < \infty, w \in A_\infty, 0 < \rho < 1$, 我们验证下面的不等式对所有有界紧支集 f 成立:

$$\int_{\mathbb{R}^n} [M_\rho(g_\lambda^*(f))(x)]^p w(x) dx < \infty. \quad (4.2)$$

因 $w \in A_\infty$, 则存在 $p_0 > 1$, 使得 $w \in A_{p_0}$. 我们可以取 $\rho > 0$ 充分小且 $p/\rho > p_0$ 使得 $w \in A_{p/\rho}$. 则 M 的 $L^{p/\rho}$ 有界性给出

$$\int_{\mathbb{R}^n} [M_\rho(g_\lambda^*(f))(x)]^p w(x) dx \leq \|g_\lambda^*(f)\|_{L^{p/\rho}(w)}^p. \quad (4.3)$$

故为了证明 (4.2) 式, 只要证明对 $0 < p < \infty, w \in A_\infty, \int_{\mathbb{R}^n} [g_\lambda^*(f)(x)]^p w(x) dx < \infty$ 对所有有界紧支集函数成立即可.

首先, 我们考虑权函数 w 是有界函数的这一特殊情形. 如前, 我们假定 $\text{supp} f \subset B(0, R) := B$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} [g_\lambda^*(f)(x)]^p w(x) dx \leq \int_{2B} [g_\lambda^*(f)(x)]^p w(x) dx + \int_{(2B)^c} [g_\lambda^*(f)(x)]^p w(x) dx.$$

因为 $p/\rho > 1, 0 < \rho < 1$, Hölder 不等式和 g_λ^* 的 $L^{p/\rho}$ 有界性给出

$$\begin{aligned} \int_{2B} [g_\lambda^*(f)(x)]^p w(x) dx &\leq \left(\int_{2B} w(x)^{1/(1-\rho)} dx \right)^{1-\rho} \left(\int_{2B} [g_\lambda^*(f)(x)]^{p/\rho} w(x) dx \right)^\rho \\ &\leq CR^{n(1-\rho)} \|w\|_\infty \|f\|_{L^{p/\rho}(w)}^p < \infty. \end{aligned}$$

由引理 2.6 我们知道, 如果 $|x| > 2R$ 和 $\text{supp} f \subset B(0, R)$, 则 $g_\lambda^*(f)(x) \leq CM(f)(x)$. 因此

$$\int_{(2B)^c} [g_\lambda^*(f)(x)]^p w(x) dx \leq C \int_{(2B)^c} [Mf(x)]^p w(x) dx < \infty.$$

对一般情形, 记 $w_N = \inf\{w, N\}$, 则 $[w_N]_{A_\infty} \leq C[w]_\infty$. 我们证明了

$$\int_{\mathbb{R}^n} [g_\lambda^*(f)(x)]^p w_N(x) dx \leq C[w_N]_{A_\infty}^p \int_{\mathbb{R}^n} [Mf(x)]^p w_N(x) dx.$$

因为当 $N \rightarrow \infty$ 时 $|g_\lambda^* f(x)|^p w_N(x)$ 几乎处处收敛到 $|g_\lambda^* f(x)|^p w(x)$, 故由 Fatou 引理和 (4.1) 式, 我们便完成了对一般情形的证明.

5 定理 1.4 的证明

现在转向定理 1.4 的证明. 我们可以假定

$$\int_{\mathbb{R}^n} [M_{L(\log L)^{1/r}} f(x)]^p w(x) dx < \infty, \quad (5.1)$$

否则就没什么可以证明的了. 先认为下面不等式正确:

$$\|M_\rho(g_{\lambda, \vec{b}}^*(f))\|_{L^p(w)} < \infty, \quad (5.2)$$

其验证将放在后面.

首先, 我们考虑权函数 w 和函数 b_j 在 (1.4) 中都有界, 将对 m 进行归纳.

对 $m = 1$, 记 $\vec{b} = b$, $r_\sigma = r$. 则由引理 2.5 和定理 1.3, 对 $p/\eta > 1$,

$$\begin{aligned} \|g_{\lambda, b}^*(f)\|_{L^p(w)} &\leq \|M_\rho(g_{\lambda, b}^*(f))\|_{L^p(w)} \leq \|M_\rho^\sharp(g_{\lambda, b}^*(f))\|_{L^p(w)} \\ &\leq C\|b\|_{Osc_{\exp L^r}} [\|M_\eta(g_\lambda^*(f))\|_{L^p(w)} + \|M_{L(\log L)^{1/r}} f\|_{L^p(w)}] \\ &\leq C\|b\|_{Osc_{\exp L^r}} [\|g_\lambda^*(f)\|_{L^p(w)} + \|M_{L(\log L)^{1/r}} f\|_{L^p(w)}] \\ &\leq C\|b\|_{Osc_{\exp L^r}} [\|M(f)\|_{L^p(w)} + \|M_{L(\log L)^{1/r}} f\|_{L^p(w)}] \\ &\leq C\|b\|_{Osc_{\exp L^r}} \|M_{L(\log L)^{1/r}} f\|_{L^p(w)}, \end{aligned}$$

这里最后一个不等式用到了 $M(f) \leq M_{L(\log L)^{1/r}}(f)^{[10]}$ 对任意的 $r > 0$ 成立.

现在我们假定定理 1.4 当 $m - 1$ 时是成立的, 我们需要证明对 m 也是成立的.

用 (4.3) 式同样的讨论可以得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} [M_\eta(g_{\lambda, \vec{b}_{\sigma'}}^*(f))(x)]^p w(x) dx \leq \|g_{\lambda, \vec{b}_{\sigma'}}^*(f)\|_{L^p(w)}^p. \quad (5.3)$$

由归纳和如下事实 $M_{L(\log L)^{1/r_\sigma}}(f) \leq CM_{L(\log L)^{1/r}}(f)^{[4]}$, 我们得

$$\begin{aligned} \|g_{\lambda, \vec{b}}^*(f)\|_{L^p(w)} &\leq \|M_\rho(g_{\lambda, \vec{b}}^*(f))\|_{L^p(w)} \leq \|M_\rho^\sharp(g_{\lambda, \vec{b}}^*(f))\|_{L^p(w)} \\ &\leq C\|\vec{b}\| \|M_{L(\log L)^{1/r}}(f)\|_{L^p(w)} + C \sum_{j=1}^m \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_j^m} \|\vec{b}_\sigma\|_{Osc_{\exp L^{r_\sigma}}} \|M_\eta(g_{\lambda, \vec{b}_{\sigma'}}^*(f))\|_{L^p(w)} \\ &\leq C\|\vec{b}\| \|M_{L(\log L)^{1/r}}(f)\|_{L^p(w)} + C \sum_{j=1}^m \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_j^m} \|\vec{b}_\sigma\|_{Osc_{\exp L^{r_\sigma}}} \|g_{\lambda, \vec{b}_{\sigma'}}^*(f)\|_{L^p(w)} \\ &\leq C\|\vec{b}\| \|M_{L(\log L)^{1/r}}(f)\|_{L^p(w)} \\ &\quad + C \sum_{j=1}^m \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_j^m} \|\vec{b}_\sigma\|_{Osc_{\exp L^{r_\sigma}}} \|\vec{b}_\sigma\|_{Osc_{\exp L^{r_{\sigma'}}}} \|M_{L(\log L)^{1/r_{\sigma'}}}(f)\|_{L^p(w)} \\ &\leq C\|\vec{b}\| \|M_{L(\log L)^{1/r}}(f)\|_{L^p(w)}. \end{aligned}$$

现在我们来验证 (5.2) 式成立. 由 (5.3) 式, 我们只需要证明 $\|g_{\lambda, \vec{b}}^*(f)\|_{L^p(w)} < \infty$. 设 w 和 b_j

是有界函数, 记

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g_{\lambda, \vec{b}}^*(f)(x)|^p w(x) dx = \int_{|x| \leq 2R} |g_{\lambda, \vec{b}}^*(f)(x)|^p w(x) dx + \int_{|x| > 2R} |g_{\lambda, \vec{b}}^*(f)(x)|^p w(x) dx. \quad (5.4)$$

因为 $w \in A_\infty$, 存在 $q > 1$ 使得 $w \in A_q$. 选取实数 $\rho > 0$ 充分小, 使得 $p/\rho > q$. 对 (5.4) 式中的第一部分, 注意到 w 和 b_j 是 L^∞ 有界的, g_λ^* 的 L^q 有界性很容易得到.

对于第二部分, 因 $|x| > 2R$, 以及 $\text{supp} f \subset B(0, R)$, 由引理 2.6 和 (5.1) 式得

$$g_{\lambda, \vec{b}}^*(f)(x) \leq CM(f)(x) \leq CM_{L(\log L)^{1/r}} f(x).$$

则

$$\int_{|x| > 2R} |g_{\lambda, \vec{b}}^*(f)(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{|x| > 2R} |M_{L(\log L)^{1/r}}(f)(x)|^p w(x) dx < \infty.$$

对一般情形, 利用 w 和 $\vec{b}$ 的截断: $\vec{b}^N = (b_1^N, \dots, b_m^N)$ 和 $w_N = \inf\{w, N\}$, 其中

$$b_j^N = \begin{cases} N, & b_j(x) > N, \\ b_j(x), & |b_j(x)| \leq N, \\ -N, & b_j(x) < -N, \end{cases}$$

则定理 1.4 对 $g_{\lambda, \vec{b}^N}^*(f)$ 成立并且

$$\int_{\mathbb{R}^n} [g_{\lambda, \vec{b}^N}^*(f)(x)]^p \omega_N(x) dx \leq C \|\vec{b}^N\|^p \int_{\mathbb{R}^n} [M_{L(\log L)^{1/r}} f(x)]^p \omega(x) dx.$$

利用和 [4, p. 687] 一样的讨论和上面的估计我们可以得到 (5.2) 式, 从而完成一般情形的证明, 这里我们省略此过程.

6 定理 1.2 的证明

下面的引理在定理 1.2 的证明中起到了关键作用.

引理 6.1 若 $w \in A_\infty$ 及 $\Phi(t) = t \log^{1/r}(e+t)$, 则存在正常数 C 使得对每一个光滑的具有紧支集的函数 f 和 $0 < \rho < 1$,

$$\begin{aligned} & \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} w(\{x \in \mathbb{R}^n : |M_\rho^\sharp(g_{\lambda, \vec{b}}^*(f))(x)| > t\}) \\ & \leq C \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} w(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\Phi(\|\vec{b}\|f)(x) > t\}). \end{aligned} \quad (6.1)$$

证明 首先, 我们注意到

$$\sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} w(\{x \in \mathbb{R}^n : |M_\eta(g_{\lambda, \vec{b}}^*(f))(x)| > t\}) < \infty, \quad 0 < \eta < 1. \quad (6.2)$$

这是由于引理 2.6 和利用 [4, p. 688] 中同样的步骤得到.

为了证明 (6.1) 式, 由齐次性, 我们可以假定 $\|\vec{b}\| = 1$. 对 $m = 1$, 只要证明下面不等式就足够了.

$$\begin{aligned} & \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} w(\{x \in \mathbb{R}^n : |M_\rho^\sharp(g_{\lambda, b}^*(f))(x)| > t\}) \\ & \leq C \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} w(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{L(\log L)^{1/r}}(f)(x) > t\}). \end{aligned} \quad (6.3)$$

由引理 2.5 ($m = 1$)、引理 2.4 和 [4, p. 689] 中同样的步骤, 我们得到了不等式 (6.3) 在 $m = 1$ 时成立. 由引理 2.5, 重复 [4, pp. 689–690] 中的步骤并对 m 做归纳, 我们很容易证明 $m \geq 2$ 时的一般情形.

由引理 2.3 和引理 6.1 重复 [4, p. 691] 中的步骤, 便得到了定理 1.2.

致谢 作者对审稿专家仔细审阅和给出的评论使得本文更具可读性表示衷心的感谢.

参考文献

- 1 Stein E M. On some functions of Littlewood-Paley and Zygmund. *Bull Amer Math Soc*, **67**: 99–101 (1961)
- 2 Fefferman C. Inequalities for strongly singular convolution operators. *Acta Math*, **124**: 9–36 (1970)
- 3 Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. New York: Academic Press, 1986
- 4 Pérez C, Trujillo-González R. Sharp weighted estimates for multilinear commutators. *J London Math Soc*, **65** (2): 672–692 (2002)
- 5 Tolsa X. A proof of the weak (1,1) inequality for singular integrals with non-doubling measures based on a Calderon-Zygmund decomposition. *Publ Mat*, **45**: 163–174 (2001)
- 6 Hu G, Meng Y, Yang D. Multilinear commutators of singular integrals with non-doubling measures. *Integral Equations Operator Theory*, **51**: 235–255 (2005)
- 7 Muckenhoupt B, Wheeden R. Norm inequalities for the Littlewood-Paley function g_λ^* . *Trans Amer Math Soc*, **191**: 95–111 (1974)
- 8 Liu L. A sharp endpoint estimate for a multilinear Littlewood-Paley operators. *Georgian Math J*, **11**: 361–370 (2004)
- 9 Torchinsky A, Wang S. A note on the Marcinkiewicz integral. *Colloq Math*, **60-61**: 235–243 (1990)
- 10 Sakamoto M, Yabuta K. Boundedness of Marcinkiewicz functions. *Studia Math*, **135**: 103–142 (1999)
- 11 Pérez C. Endpoint estimate for commutators of singular integral operators. *J Funct Anal*, **128**: 163–185 (1995)
- 12 Garcia-Cuerva J, Rubio de Francia J L. Weighted Norm Inequalities Related Topics. Amsterdam: North-Holland, 1985
- 13 Stein E M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton NJ: Princeton University Press, 1970