评述

应用 Udwadia-Kalaba 理论对开普勒定律的研究

甄圣超^{①②*}, 赵韩^①, 黄康^①, 夏晖^{①②}, CHEN YeHwa^②

① 合肥工业大学, 机械与汽车工程学院, 安徽 230009;

② Woodruff School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta 30332, USA

*联系人, E-mail: zhenshengchao@gmail.com

收稿日期: 2013-07-01; 接受日期: 2013-10-12

国家高技术研究发展计划资助项目(编号: 2012AA111711)

摘要 本文运用 Udwadia-Kalaba 理论对天体运动进行了研究(尤其针对开普勒定律和万有引力定律). 我们用一种创新的方法表明天体的运行轨道可能是圆, 椭圆, 双曲线或抛物线. 并且, 在 Udwadia-Kalaba 理论基础上, 运用运行轨道约束(椭圆, 圆环, 双曲线或抛物线)以及角动量守恒约束核对了任何天体运动都遵从万有引力定律. 基于 Udwadia-Kalaba 理论, 我们首先考虑无约束离散动态系统, 其运动方程可应用牛顿力学或拉格朗日力学以广义坐标形式写出. 然后推导各类约束的二阶约束方程. 最后将额外的广义力约束(从二阶约束方程获得)施加到无约束系统上. 对多体系统使用此建模方法, 我们总能推导出 Udwadia-Kalaba 方程的显式解析形式. Udwadia-Kalaba 方程可用于解决完整或非完整约束问题以及理想或非理想约束问题. 如果质量矩阵奇异, Udwadia-Kalaba 方程也适用.

关键词 开普勒定律, 轨道运动, Udwadia-Kalaba 理论, 运动方程

PACS: 11.10.Ef, 45.20.df, 45.50.Pk, 95.10.Ce, 96.12.Fe

doi: 10.1360/132013-407

如何获取受约束多体系统的运动方程这一般性的问题已经激起科学家和工程师们的广泛兴趣. 其也是多体动力学核心问题之一. 自 Lagrange^[1]描述约束运动之后, 许多科学家、工程师和数学家开始持续积极地从事此问题的研究. Lagrange 提出了处理约束运动的 Lagrange 乘子法. 但是, 此方法需要针对具体问题去确定 Lagrange 乘子, 而且对于拥有大自由度和不可积分约束的系统, 其 Lagrange 乘子更不易获得. Gauss^[2]提出了新的理论用以处理约束运动问题. 他通过最小化系统质点加速度函数清晰地描述了约

束运动的本质.

Pars 高度评价了 Gibbs-Appell 方程^[3,4]: “probably the most comprehensive equations of motion”^[5]. 然而, Gibbs-Appell 方程需要明确具体的准坐标且同样具有对大自由度和非完整约束系统难以处理的问题. Dirac^[6]使用 Poisson brackets 发展出了针对奇异 Hamiltonian 系统如何获取 Lagrange 乘子的方法. 在这些系统中, 约束不随时间改变.

Udwadia 和 Kalaba^[7,8]提出了一种简明的有助于理解 Lagrangian 力学的多体系统运动方程. 基于

引用格式: 甄圣超, 赵韩, 黄康, 等. 应用 Udwadia-Kalaba 理论对开普勒定律的研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2014, 44: 24–31

Zhen S C, Zhao H, Huang K, et al. On Kepler's law: Application of the Udwadia-Kalaba theory (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2014, 44: 24–31, doi: 10.1360/132013-407

Gauss 原理, 他们推导出了描述约束系统动力学性能的基本运动方程. 与 Lagrange, Hamilton, Gibbs 和 Appell 原理相比, Udwadia-Kalaba 理论还不太为众人所知. 此基本运动方程可应用于可积分和不可积分约束系统. Udwadia 和 Kalaba^[9,10]发现以往的全部研究都基于达朗贝尔原理假定约束力是理想的, 约束力做的虚功为零. 虽然达朗贝尔原理适用于大多数情况, 但在非理想约束情况下是不适用的. 因此, Udwadia 和 Kalaba 针对约束系统提出了可能不满足达朗贝尔原理的基本运动方程. 经典力学中含有奇异质量矩阵的非约束系统并不常见. Pars^[5]提出如果使用最少的坐标来描述非约束运动, 所得到运动方程的质量矩阵肯定是非奇异、对称且正定的. 然而, 当对复杂系统进行建模时, 我们通常需要使用较多的广义坐标数以简化问题, 此时就可能产生奇异质量矩阵. 因此, Udwadia 和 Phohomsiri^[11]提出新的运动方程用来解决奇异质量矩阵问题. 我们称以上这些发现为 Udwadia-Kalaba 理论.

Udwadia-Kalaba 理论的发现已经过去 20 年了, 但由于它的抽象性, 我们很少能意识到其重要性. Udwadia-Kalaba 理论能够被简单且清楚地应用在约束离散机械系统上. 众所周知, 力学理论发展至今已经相当成熟, 想创造出一个完全不同的动态系统理论是不可能的. 但是, Udwadia-Kalaba 理论提供了一个理解自然法则的新视角. 运用 Udwadia-Kalaba 理论, 我们可三步得到 Udwadia-Kalaba 方程: 首先, 考虑不受约束离散动态系统, 其运动方程由拉格朗日力学以广义坐标形式写出; 然后, 导出二阶约束方程; 最后, 将额外的广义约束力加到不受约束系统上. 具体来说就是将约束产生的力施加到不受约束系统上.

开普勒于 17 世纪早期, 基于对其导师 Brahe 的天文观测数据的分析, 公布了三定律. 那时大家都认为天体的运行轨道是圆形的, 因此开普勒定律受到极大地质疑. 然而, 开普勒详细地计算出了火星椭圆轨道并得出了其他天体也拥有相同椭圆轨道的结论. 开普勒三定律如下:

- (i) 每一个行星都沿着各自的椭圆轨道环绕太阳运行, 而太阳则处在椭圆的一个焦点上;
- (ii) 在相等时间内, 太阳和运动着的行星的连线所扫过的面积相等;
- (iii) 各个行星绕太阳公转周期的平方和它们的

椭圆轨道半长轴的立方成正比.

大半世纪以后, 开普勒定律启发了牛顿并促成了牛顿万有引力定律的发现. 经典力学和万有引力定律可用来证明开普勒定律. 万有引力定律(指出天体的运行轨道也可能是双曲线或抛物线, 例如彗星)比开普勒定律更普适.

开普勒第一定律仅限于运行轨道是椭圆的行星. 其不适用于运行轨道可能是双曲线或抛物线的其他天体. 众所周知, 一个受向心力影响的运动质点满足角动量守恒定律. 开普勒第二定律实际上就是表示角动量守恒. 开普勒第三定律帮助牛顿建立其理论并能被万有引力定律证明.

我们应用 Udwadia-Kalaba 理论, 基于万有引力定律简单地推导出天体的运行轨道总是二次曲线形的. 同时通过运用 Udwadia-Kalaba 理论我们也证明了天体运行遵循万有引力定律.

1 Udwadia-Kalaba 理论

首先, 我们考虑不受约束系统, 并用 n 个广义坐标 $\mathbf{q} := [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ 来表述. 运用拉格朗日力学得到运动方程为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (1)$$

其中, $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \in R^{n \times n}$ 为惯性矩阵(对称且正定), $\dot{\mathbf{q}} \in R^n$ 为速度, $\ddot{\mathbf{q}} \in R^n$ 为加速度, $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \in R^n$ 为施加在不受约束系统上的力. 施加的力可能包括离心力, 引力和控制输入. 不受约束系统的广义加速度 $\mathbf{a}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 为

$$\mathbf{a}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}, t) \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (2)$$

然后, 我们考虑系统中出现的约束. 假设系统具有可积分约束

$$\varphi_i(\mathbf{q}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, h, \quad (3)$$

和不可积分约束

$$\varphi_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad i = h+1, h+2, \dots, m. \quad (4)$$

在拉格朗日力学中, 约束方程通常以 pfaffian 形式存在. 我们可以对此类约束方程进行微分处理. 也就是说, 假设有充足的光滑度, 我们对不可积分约束求一次时间导数, 对可积分约束求两次时间导数, 得矩阵形式的约束方程为

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (5)$$

其中 $A(q, \dot{q}, t) \in R^{m \times n}$ 为约束矩阵, $b(q, \dot{q}, t)$ 是一个 m 维矢量.

最后一步是求得 Udwadia-Kalaba 方程(有约束的显示运动方程). 将额外的“广义约束力”施加到不受约束的系统上, 所得运动方程为如下形式:

$$M(q, t)\ddot{q} = Q(q, \dot{q}, t) + Q^c(q, \dot{q}, t). \quad (6)$$

其中, $Q^c(q, \dot{q}, t) \in R^n$ 为施加于系统的额外约束力, 由可积分和不可积分约束产生. 在拉格朗日力学中, $Q^c(q, \dot{q}, t)$ 只是理想约束力, 符合常见的达朗贝尔原理(此原理表明约束力做的虚功为零). 然而, 约束也可以是非理想约束. 理想约束产生符合达朗贝尔原理的理想约束力, 而非理想约束产生非理想约束力, 例如摩擦力, 电磁力等. 当理想约束和非理想约束同时存在于系统中时, Udwadia 把 $Q^c(q, \dot{q}, t)$ 表达为如下形式:

$$Q^c(q, \dot{q}, t) = Q_{id}^c(q, \dot{q}, t) + Q_{nid}^c(q, \dot{q}, t). \quad (7)$$

其中, $Q_{id}^c(q, \dot{q}, t)$ 为理想约束力, $Q_{nid}^c(q, \dot{q}, t)$ 为非理想性约束力.

Udwadia 推广了达朗贝尔原理, 使其约束力可以做正、负或零虚功. 换言之, 他拓展了达朗贝尔原理的拉格朗日形式, 使之包括非理想约束. 现在我们将约束力表示为 $c(q, \dot{q}, t) \in R^n$. 约束力做的功为 $W = v^T c$ (同 $Q^c(q, \dot{q}, t)$ 所做的功), 在任何情况下 v 的约束条件为 $A(q, \dot{q}, t)v = 0$. 我们将它表示为

$$W = v^T Q^c = v^T c. \quad (8)$$

此为达朗贝尔原理的拉格朗日拓展式. Q_{id}^c 做的虚功

$$v^T Q_{id}^c = 0. \quad (9)$$

Q_{nid}^c 做的虚功

$$v^T Q_{nid}^c \neq 0. \quad (10)$$

Udwadia 和 Kalaba 已证明 Q_{id}^c 可表示为

$$Q_{id}^c = M^{1/2} B^+ (b - A M^{-1} Q). \quad (11)$$

非理想约束力 Q_{nid}^c 表示为

$$Q_{nid}^c = M^{1/2} (I - B^+ B) M^{-1/2} c. \quad (12)$$

其中, $B = A M^{-1/2}$, 上标 ‘+’ 表示 M-P 逆(Moore^[12]; Penrose^[13]).

由方程(6), (7), (11)和(12)知 Udwadia-Kalaba 方程(包括理想和非理想约束)为

$$M \ddot{q} = Q + M^{1/2} B^+ (b - A M^{-1} Q) + M^{1/2} (I - B^+ B) M^{-1/2} c. \quad (13)$$

其中, 矢量 c 可通过实验或观察获得.

当 c 为 0 时, 式(13)即符合达朗贝尔原理, 意味着总虚功为 0, 约束力为

$$Q^c = Q_{id}^c = M^{1/2} B^+ (b - A M^{-1} Q). \quad (14)$$

约束运动方程(仅包括理想约束)为

$$M \ddot{q} = Q + M^{1/2} B^+ (b - A M^{-1} Q). \quad (15)$$

因此, 约束力 $F^c(t)$ 为

$$F^c(t) = M^{1/2} B^+ (b - A M^{-1} Q). \quad (16)$$

当矩阵 M 是一个常对角阵时, 此时 $M = mI$, 式(16)可简化为

$$F^c(t) = mA^+ (b - A M^{-1} Q). \quad (17)$$

当非约束加速度 $M^{-1}Q$ 为零时, 式(17)变为

$$F^c(t) = mA^+ b. \quad (18)$$

对于公式(13), 如果质量矩阵奇异, 我们应用 U-P 方程(Udwadia&Phohomsiri 2006)取代 U-K 方程(Udwadia&Kalaba 2000). U-P 运动方程为

$$\ddot{q} = \left[\begin{array}{c} [I - A^+ A] M \\ A \end{array} \right]^+ \left[\begin{array}{c} Q \\ b \end{array} \right]. \quad (19)$$

此方程在矩阵 $[M|A]^T$ 满秩才有效(Udwadia and Phohomsiri^[11]). 这一满秩条件可用于检查我们是否建立正确的模型.

2 天体的二次曲线轨道

开普勒第一定律指出每个行星轨道都是一个椭圆, 而牛顿万有引力定律和经典力学表示任何天体的轨道都是二次曲线(包括椭圆). 本节我们将创新性地运用 Udwadia-Kalaba 理论以详细阐述天体的二次曲线轨道(同时也基于牛顿万有引力定律). 推理过程简单直接易懂.

牛顿万有引力定律可表示为

$$F = \frac{mh}{r^2} \Leftrightarrow V = \frac{-mh}{r} = \frac{-k}{r}. \quad (20)$$

其中, F 为两个天体间的万有引力, m 为质量, h 和 $k = mh$ 为常数, r 为两天体中心之间的距离, V 为势能. 我们将上述引力方程改写为如下矩阵形式

$$\mathbf{F} = \frac{mh}{r^2} \begin{bmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

其中, x, y 表示天体的坐标并且 $\sqrt{x^2 + y^2} = r$.

由于天体本身无外加力, 所以不受约束加速度 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}$ 为零. 为获得天体的轨道, 应先求得轨道约束. 可通过公式(18)将万有引力表示为

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{A}^+\mathbf{b}. \quad (22)$$

假设 $A = [A_1 \quad A_2]$, 则得

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} = \frac{1}{A_1^2 + A_2^2} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

因此, 公式(22)可改写为

$$\mathbf{F}(t) = \frac{m}{A_1^2 + A_2^2} \begin{bmatrix} A_1 b \\ A_2 b \end{bmatrix}. \quad (24)$$

比较方程(21)和(24), 得知 $A_1 = fx$, $A_2 = fy$, $b = fh/r$, f 可以为任意非零常数或函数. 将 A_1 , A_2 和 b 代入约束方程 $A\ddot{q} = b$ 得

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} = \frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (25)$$

然后用极坐标取代 x 和 y (i.e. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$), 并且使用角动量 $L = mr^2 \omega$, 得

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r = \frac{mh}{r^2} \Leftrightarrow m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{dV}{dr}. \quad (26)$$

其中, $\omega = \dot{\theta}$ 为角速度. 将变量 t 变换为 θ 得

$$\frac{d}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (27)$$

新方程为

$$\frac{L}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{mr^3} = -\frac{dV}{dr}. \quad (28)$$

通过 $u \equiv \frac{1}{r}$ 及等式两边同时乘以 $\frac{mr^2}{I^2}$, 方程成准线性

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{d}{du} V(1/u). \quad (29)$$

对于牛顿万有引力定律, 电势为 $V(r) = -ku \cdot u(\theta)$ (轨道) 由如下方程确定

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{d}{du} V(1/u) = \frac{km}{L^2}. \quad (30)$$

其解为

$$u = \frac{1}{r} = \frac{km}{L^2} [1 + e \cos(\theta - \theta_0)]. \quad (31)$$

其中, e 为离心率, θ_0 为相位差. 它们都是积分常数. 此方程为一个二次曲线公式(图 1). 若 $e=0$, 二次曲线为圆形; 若 $e<1$, 二次曲线为椭圆; 若 $e=1$, 二次曲线为抛物线; 若 $e>1$, 二次曲线则为双曲线.

假如开普勒通过观察发现了足够多的彗星双曲线或抛物线轨道和月球的圆形轨道，他或许会将其第一定律改为“每个行星，彗星或月球的轨道都是一个二次曲线(包括椭圆，圆，双曲线和抛物线)，恒星或行星在其焦点或中心。”

3 运用 U-K 理论验证万有引力定律

3.1 二次曲线运动方程

二次曲线运动方程表示如下:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \varepsilon x + p. \quad (32)$$

其中, x 和 y 为坐标, 其坐标原点位于焦点处或中心位置(恒星或行星所处位置), 参数 ε 为离心率, p 为一个常数, 接下来我们详细地讨论此方程.

(i) 当坐标原点位于左边焦点时, 运动方程为一椭圆(图 2). 此时参数 ε 小于 1 且常数 p 等于短半轴的平方

图 1 二次曲线
Figure 1 Conic.

图 2 椭圆形运动轨道
Figure 2 Motion orbit is an ellipse.

图 3 双曲线运动轨道
Figure 3 Motion orbit is a hyperbola.

图 4 抛物线运动轨道
Figure 4 Motion orbit is a parabola.

图 5 圆环形运动轨道
Figure 5 Motion orbit is a circle.

除以长半轴.

(ii) 当坐标原点位于右边焦点时, 运动方程为一双曲线(图 3). 此时参数 ϵ 大于 1 且常数 p 等于虚半轴的平方除以实半轴.

(iii) 当坐标原点位于 x 轴正方向上的焦点时, 运动方程为一个抛物线(图 4). 此时参数 ϵ 等于 1 且常数 p 为焦点和准线间的距离.

(iv) 当坐标原点位于中心位置时, 运动方程为圆(图 5). 此时参数 ϵ 等于 0 且常数 p 为半径.

3.2 离心率与总能量的关系

离心率 ϵ 与总能量 E 相关可通过 Laplace-Runge-Lenz 矢量得以证明. 我们提出了另一种可得到两者间关系的简明普遍的方法.

对方程(32)两边开平方并关于时间求导得

$$x\dot{x} + y\dot{y} = (\epsilon x + p)\epsilon\dot{x}. \quad (33)$$

通过使用符号 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和考虑方程式(32), 方程(33)变为

$$(x - r\epsilon)\dot{x} + y\dot{y} = 0. \quad (34)$$

众所周知, 承受向心力的运动天体满足角动量守恒定律. 所以, 我们得到

$$m\dot{x}y - m\dot{y}x = L. \quad (35)$$

其中, L (角动量)为一常数. 从方程(34)和(35)我们得到

$$\dot{x} = \frac{L}{m} \frac{y}{-r^2 + r\epsilon x}, \dot{y} = \frac{L}{m} \frac{x - r\epsilon}{r^2 - r\epsilon x}. \quad (36)$$

宇宙中所有的天体都在守恒场中移动. 它们遵守能量(等于动能与势能之和)守恒定律. 因此得到

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{-k}{r} = E. \quad (37)$$

其中, $(1/2)m\dot{x}^2 + (1/2)m\dot{y}^2$ 是动能, $-k/r$ 为势能, E 为总能量. 将方程(36)代入(37)并考虑由方程(32)得出的 $r - \varepsilon x = p$ 得

$$\frac{L^2}{2m} \left(\frac{-1}{p^2} + \frac{2}{rp} + \frac{\varepsilon^2}{p^2} \right) + \frac{-k}{r} = E. \quad (38)$$

因为总能量 E 是守恒的, 得到

$$\frac{L^2}{2m} \frac{2}{rp} + \frac{-k}{r} = 0, \quad \frac{L^2}{2m} \left(\frac{-1}{p^2} + \frac{\varepsilon^2}{p^2} \right) = E. \quad (39)$$

因此得

$$p = \frac{L^2}{km}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2m}}. \quad (40)$$

从方程(40)得出: 总能量 $E = -k^2m/2L^2$ 表示为圆形轨道, $E = 0$ 为抛物线, $E < 0$ 为椭圆, $E > 0$ 为双曲线. 因为总能量依赖于速度以及天体离开原点(恒星或行星所在位置)的距离, 所以速度和天体离原点的距离决定运动轨道是圆, 椭圆, 双曲线还是抛物线. 这也表明, 对天体来说, 角动量守恒实际上等价于总能量守恒.

3.3 约束力

考虑一个质量为 m 不受外力作用的天体. 此天体被迫沿着一个二次曲线轨道运动. 我们应用 Udwadia-Kalaba 理论得出约束力, 此约束力必须被施加在天体上以使其走出二次曲线轨道.

由于该天体不受外力影响, 不受约束加速度 $\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}$ 为零. 质量矩阵 $\mathbf{M}$ 是一个常对角矩阵, 所以约束力 $\mathbf{F}^c$ 为

$$\mathbf{F}^c = m\mathbf{A}^+\mathbf{b}. \quad (41)$$

3.3.1 二次曲线轨道约束

首先, 仅考虑二次曲线轨道约束. 对方程(33)再次求导后得

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} = (\varepsilon x + p)\varepsilon\ddot{x} + \varepsilon^2\dot{x}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2. \quad (42)$$

通过用方程(32)可简化为

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} - r\varepsilon\ddot{x} = \varepsilon^2\dot{x}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2. \quad (43)$$

由方程(33), 考虑 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \varepsilon x + p$ 得

$$\varepsilon^2\dot{x}^2 = \left(\frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\varepsilon x + p} \right)^2 = \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{r^2}. \quad (44)$$

通过使用方程(43)中的关系求得二次曲线轨道约束的二阶方程如下

$$(x - r\varepsilon)\ddot{x} + y\ddot{y} = -\frac{(y\dot{x} - x\dot{y})^2}{r^2}. \quad (45)$$

因此, 约束矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (x - r\varepsilon) & y \end{bmatrix}. \quad (46)$$

$\mathbf{b}$ 为标量 $-(y\dot{x} - x\dot{y})^2/r^2$. 然后得到

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} = \frac{1}{[y^2 + (x - r\varepsilon)^2]} \begin{bmatrix} x - r\varepsilon \\ y \end{bmatrix}, \quad (47)$$

约束力为

$$\mathbf{F}^c = m\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \frac{m(y\dot{x} - x\dot{y})^2}{r^2[y^2 + (x - r\varepsilon)^2]} \begin{bmatrix} x - r\varepsilon \\ y \end{bmatrix}. \quad (48)$$

我们发现约束力指向与二次曲线垂直的方向而不是指向原点(不包括圆). 而且, 约束力为天体速度 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 的函数.

3.3.2 二次曲线轨道约束和角动量守恒约束

现在我们将二次曲线轨道约束和角动量守恒约束一起考虑. 得到能和这两种约束兼容的约束力.

我们注意到约束方程(45)表明轨道为二次曲线. 因此二次曲线约束需满足方程(45). 而且, 角动量守恒约束需满足方程(35). 对此方程求导得

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0. \quad (49)$$

考虑两约束方程(45)和(49)得矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (x - r\varepsilon) & y \\ y & -x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = -\begin{bmatrix} \frac{L^2}{m^2r^2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (50)$$

由于 $\mathbf{A}$ 为满秩阵且

$$(x^2 + y^2) - rx\varepsilon = r(r - x\varepsilon) = rp,$$

得到

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(x^2 + y^2) - rx\varepsilon} \begin{bmatrix} x & y \\ y & -(x - r\varepsilon) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{rp} \begin{bmatrix} x & y \\ y & -(x - r\varepsilon) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (51)$$

因此有

$$\mathbf{F}^c = m\mathbf{A}^+\mathbf{b} = -\frac{m}{p} \begin{bmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \end{bmatrix} \frac{L^2}{m^2r^2} = -\frac{1}{mp} \begin{bmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \end{bmatrix} \frac{L^2}{r^2}. \quad (52)$$

此时, 作用在天体上的约束力指向原点并且和 r^2 成反比.

为了更加清晰地阐述该问题, 我们分别对椭圆, 圆, 双曲线和抛物线的约束力进行说明.

(i) 若该二次曲线为一椭圆, 坐标原点位于左焦点且常数 p 等于短半轴的平方除以长半轴. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为天体距离椭圆左焦点的距离.

(ii) 若该二次曲线为圆, 坐标原点位于圆心且常数 p 为半径 r . 角动量 $L = mvr$, v 是天体的速度. 因此, 约束力可表示为

$$\mathbf{F}^c = -\frac{mv^2}{r} \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \end{pmatrix}. \quad (53)$$

该式为教科书中的经典方程.

(iii) 若该二次曲线为一双曲线, 坐标原点位于右焦点且常数 p 等于虚半轴的平方除以实半轴. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为天体与双曲线右焦点的距离.

(iv) 若该二次曲线为一抛物线, 坐标原点位于 x 轴正方向的焦点上且常数 p 为焦点和准线间的距离. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为天体与抛物线焦点的距离.

3.3.3 约束力结果的评论

将二次曲线轨道约束的约束力与二次曲线轨道约束和角动量守恒约束的约束力进行比较, 我们发现添加角动量守恒约束不仅导致约束力为向心力(即指向焦点或中心), 并且它与离开焦点或中心的距离平方成反比. 因此, 向心力场(此处天体所受的力与它和焦点或中心的距离的平方成反比)为特殊的约束力场, 其使天体能够满足二次曲线轨道约束和角动量守恒约束.

牛顿运用开普勒第一和第二定律(即椭圆轨道约束和角动量守恒约束)得到著名的万有引力定律. 我们通过使用二次曲线轨道约束(包括椭圆, 圆, 双曲线和抛物线)和角动量守恒约束以及应用 Udwadia-Kalaba 理论, 也推导出了万有引力定律.

在“离心率和总能量的关系”这一部分, 我们说明了对于天体来说, 角动量守恒实际上等于总能量守恒. 所以, 如果用总能量守恒约束替换上述的角动量守恒约束, 所得约束力应保持不变. 在运用 Udwadia-Kalaba 方程后, 我们发现结果相同. 通过运用

Udwadia-Kalaba 理论得出约束力的过程是类似的, 因此我们在这就不做介绍.

4 结论

Udwadia-Kalaba 理论提出了一个明确清晰的运动方程, 适用于可积分或不可积分约束系统、理想或非理想约束系统, 也适用于奇异质量矩阵系统. Udwadia-Kalaba 方程是非耦合的且不受拉格朗日乘子限制. 它帮助我们以一种新的思维理解约束运动并为多体动力学提供了新方向. 同时有助于我们理解各类系统的动态性能(如机器人学, 生物力学, 多体动力学和天文学). 此方程可能是进行进一步动态分析最适合的形式.

Udwadia-Kalaba 理论的优势显而易见. 和拉格朗日乘子法相比, 此新方法无需确定乘子, 乘子对于具有不可积约束和大自由度的系统不易得到. 跟 Volterra, Appell, Boltzmann 和 Gibbs 得到的方程不同的是我们不需要费力去找合适的准坐标.

Udwadia 和 Kalaba 的新理论主要有三层优点. 第一, 可以使用较多广义坐标来描述系统, 这可以加快及减化得到复杂系统运动方程的过程. 第二, 它可应用于奇异质量矩阵系统、可积分或不可积分约束系统以及理想或非理想约束系统. 第三, 新理论提出了复杂系统建模的新方法. 它允许将复杂系统分解为运动方程已知的子系统, 然后直接合并子系统的运动方程得到复杂系统运动方程.

在 Udwadia-Kalaba 方程中, 没有坐标的转换或消除操作, 这大大简化了解析方程. Moore-Penrose 广义逆在方程中也起着重要的作用. 为求得 Udwadia-Kalaba 方程, 无需知道约束矩阵的秩.

在 Udwadia-Kalaba 方程中, 用二阶形式描述约束. 由于二阶(约束)和加速度(系统动力学)之间在数学形式上一致, 因此方程的操作具有更多的灵活性. 因此, 二阶约束可用于许多其他的建模技术中(Chen^[14]).

我们主要应用 Udwadia-Kalaba 理论^[15]去研究天体运动(尤其是对开普勒定律和万有引力定律). 运用一个较为创新的方法, 我们阐述了天体的运行轨迹可能是圆, 椭圆, 抛物线或双曲线. 而且, 通过运用 Udwadia-Kalaba 理论, 我们用运行轨道约束(椭圆, 圆, 双曲线或抛物线)以及角动量守恒约束较为容易地验证了任何天体的运动都遵行万有引力定律.

参考文献

- 1 Lagrange J L. *Mechanique Analytique*. Paris: Mme ve Courcier, 1787
- 2 Gauss C F. *Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik*. *J die reine und angewandte Mathematik*, 1829, 4: 232–235
- 3 Gibbs J W. *On the fundamental formulae of dynamics*. *Am J Math*, 1879, 2: 49–64
- 4 Appell P. *Sur une Forme Generale des Equations de la Dynamique*. *Comptes rendus de l'Academie des sciences*, 1899, 129: 459–460
- 5 Pars L A. *A Treatise on Analytical Dynamics*. Connecticut: Ox Bow Press, 1965
- 6 Dirac P A M. *Lectures in Quantum Mechanics*. New York: Yeshiva University, 1964
- 7 Udwadia F E, Kalaba R E. *A new perspective on constrained motion*. *Proc Royal Societ*, 1992, 439: 407–410
- 8 Udwadia F E, Kalaba R E. *Analytical Dynamics: A New Approach*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996
- 9 Udwadia F E, Kalaba R E. *Explicit equations of motion for mechanical systems with non-ideal constraints*. *J Appl Mech*, 2001, 68: 462–467
- 10 Udwadia F E, Kalaba R E. *On constrained motion*. *Appl Math Comput*, 2005, 164: 313–320
- 11 Udwadia F E, Phohomsiri P. *Explicit equations of motion for constrained mechanical systems with singular mass matrices and applications to multi-body dynamics*. *Proc Royal Soci*, 2006, 462: 2097–2117
- 12 Moore E H. *On the reciprocal of the general algebraic matrix*. *Bull Am Math Soci*, 1920, 26: 294–395
- 13 Penrose R. *A generalized inverse of matrices*. *Proc Cambridge Philosophical Soci*, 1955, 51: 404–413
- 14 Chen Y H. *Second-order constraints for equations of motion of constrained systems*. *IEEE/ASME Trans Mech*, 1998, 3: 240–248
- 15 Zhao H, Zhen S C, Chen Y H. *Dynamical modeling and simulation of multi-body systems by using Udwadia-Kalaba theory*. *Chin J Mech Eng*, 2013, 26(5): 839–850

On Kepler's law: Application of the Udwadia-Kalaba theory

ZHEN ShengChao^{1,2*}, ZHAO Han¹, HUANG Kang¹, XIA Hui^{1,2} & CHEN YeHwa²

¹ *School of Mechanical and Automotive Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China;*

² *Woodruff School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta 30332, USA*

We apply the Udwadia-Kalaba theory to study the movement of heavenly bodies (especially Kepler's law and the inverse square law of gravitation). In an alternative way, we show that the orbital motion of a heavenly body may be a circle, an ellipse, a hyperbola or parabola. Also, by applying the Udwadia-Kalaba theory, we use the constraint of orbital motion (ellipse, circle, hyperbola or parabola) and the conservation of angular momentum constraint to easily verify that any heavenly body's motion complies with the inverse square law of gravitation. Using the Udwadia-Kalaba theory, we first consider the unconstrained discrete dynamic system whose equation of motion is written by applying Newtonian or Lagrangian mechanics in terms of generalized coordinates. Next, we derive the constraint equations of different kinds of constraints. Finally, we impose the additional generalized forces of constraint (obtained from the second-order constraint equations) on the unconstrained system. By using this modeling methodology for multi-body systems, we can always derive the Udwadia-Kalaba equation in an explicit analytic form. The Udwadia-Kalaba equation can be used to solve holonomic or nonholonomic constraint problems, and ideal or non-ideal constraint problems. It is also applicable to systems regardless of their mass matrices' singularity.

Kepler's law, orbital motion, Udwadia-Kalaba theory, equations of motion

PACS: 11.10.Ef, 45.20.df, 45.50.Pk, 95.10.Ce, 96.12.Fe

doi: 10.1360/132013-407