仿射李代数的第一类有限阶内自同构

靳全勤 张知学

(河北大学数学系, 保定 071002)

李代数的自同构理论是李代数的重要研究课题之一. 某些作者对仿射李代数的二、三阶自同构进行了分类^[1,2]. 本文对无扭仿射李代数的第一类任意有限阶内自同构进行分类.

设 g 为无扭仿射李代数, $\dot{g}$ 为相应的有限维李代数, $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 和 $\dot{\Pi} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ (或 $\mathbf{h}$ 和 $\dot{\mathbf{h}}$) 分别为 g 和 $\dot{g}$ 的素根系 (或 Cartan 子代数); $a_0, a_1, \dots, a_n$ 为 g 的 Dynkin 图中标于各顶点的正整数 (见文献[3]). 由文献[1]中的讨论, g 的自同构只有以下3种类型: 第一类内自同构 $\sigma = e^{\text{adh}}$, 第一类外自同构 $\sigma = D e^{\text{adh}}$ 和第二类自同构 $\sigma = \omega D \gamma$, 其中 $h \in \mathbf{h}$, ω 为 Chevally 对合, $D \in \text{Aut}(A)$ 为图自同构, $\gamma \in W$, W 为 Weyl 群. 设 $\sigma_i = e^{\text{adh}_i}$ ($i = 1, 2$). 可证

命题 1 σ_1, σ_2 共轭的充要条件是: 存在自同构 $\tau \in \omega \times W \times \text{Aut}(A)$, 使 $\tau(h_1) = h_2$.

设 $\rho_i, i = 0, 1, \dots, n$ ($\dot{\rho}_j, j = 1, 2, \dots, n$) 为 g (或 $\dot{g}$) 中 $\mathbf{h} + C d$ (或 $\dot{\mathbf{h}}$) 关于 Π (或 $\dot{\Pi}$) 的对偶基, 则有 $\rho_0 = d, \rho_i = a_i d + \dot{\rho}_i, i = 1, 2, \dots, n$. 若 $\sigma = e^{\text{adh}} (h \in \mathbf{h})$ 的阶为 m , 则可设 $h = \frac{2\pi i}{m} \cdot \sum_{i=0}^n s_i \rho_i$, 其中 s_i 为非负整数. 如果 $\sum_{i=0}^n s_i a_i = m$, 则有 $h = 2\pi i d + \frac{2\pi i}{m} \sum_{i=1}^n s_i \dot{\rho}_i$. 此时 σ 实际上是 $\dot{g}$ 的 m 阶内自同构 $\sigma' = \exp(\text{ad} \frac{2\pi i}{m} \sum_{i=1}^n s_i \dot{\rho}_i)$ 在 g 上的扩充: $\sigma(t^k \times \dot{g}_\alpha) = t^k \times \sigma'(\dot{g}_\alpha)$. 这种自同构的分类本质上是 $\dot{g}$ 的 m 阶内自同构的分类, 已由 Kac^[4] 解决. 如果 $\sum_{i=0}^n s_i a_i \neq m$, 则 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2$, 其中 $\sigma_1 = \exp \left| \text{ad} \frac{2\pi i}{m} \sum_{i=0}^n s_i a_i d \right|, \sigma_2 = \exp \left| \text{ad} \frac{2\pi i}{m} \sum_{i=1}^n s_i \dot{\rho}_i \right|$. 由于 σ 为 m 阶的, σ_1, σ_2 的阶均为 m 的非平凡因子, 故可设 $0 < \sum_{i=0}^n s_i a_i \leq m$, 即 σ 对应 $(s_0, s_1, \dots, s_n)$, 它满足 $0 < \sum_{i=0}^n s_i a_i \leq m$. 反之给定一满足条件 $0 < \sum_{i=0}^n s_i a_i \leq m$ 的非负整数组 $(s_0, s_1, \dots, s_n)$, 存在一自同构 $\sigma = e^{\text{adh}}, h = \frac{2\pi i}{m} \sum_{i=0}^n s_i \rho_i$, 使 $\sigma^m = 1$. 设 $h = \frac{2\pi i}{m} \sum_{i=0}^n s_i \rho_i$ 且 $0 < \sum_{i=0}^n s_i a_i \leq m$.

定理 1 $\sigma = e^{\text{adh}}$ 的阶为 m 的充要条件是: $(s_0, s_1, \dots, s_n, m) = 1$.

这样在 m 阶内自同构 $\sigma = e^{\text{adh}}$ 与满足条件 $0 < \sum_{i=0}^n s_i a_i \leq m$ 和 $(s_0, s_1, \dots, s_n, m) = 1$ 的非负整数组 $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ 之间有一个一一对应关系. 称非负整数 $|\sum_{i=0}^n s_i a_i| \bmod(m)$ 为 σ 的水平. 可证 W 及 $\text{Aut}(A)$ 使 σ 的水平不变, 而每一水平 l 的自同构通过 ω 共轭于一个水平为 $m - l$ 的自同构. 因而只需对水平不超过 $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$ 的 m 阶内自同构分类.

定理 2 设两自同构 $\sigma_i = e^{\text{adh}_i}$ ($i = 1, 2$) 的水平为 l_i . (1) 如果 $l_1 \neq l_2$ 且 $l_1 + l_2 \neq m$, 则 σ_1 与 σ_2 不共轭. (2) 如果 $l_1 = l_2$, 则它们共轭的充要条件是存在 $\tau \in \text{Aut}(A) \times W$, 使 $\tau(h_1) = h_2$, 或 τ 将 σ_1 对应的数组 $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ 变为 σ_2 对应的数组 $(t_0, t_2, \dots, t_n)$.

致谢 本工作为国家教委博士点基金 (批准号: 97005511) 和河北省自然科学基金资助项目.

参 考 文 献

- 1 Levstein F. A classification of involutions of an affine Kac-Moody algebra. Journal of Algebra, 1988, 114: 489~ 518
<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/csb1998-43-20-2236>

- 2 靳全勤, 侯自新. 仿射李代数的三阶自同构. 科学通报, 1998, 43(13): 1 370~ 1 374
- 3 Kac V G. Infinite Dimensional Lie Algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 1985
- 4 Kac V G. Automorphism of Finite order of semisimple lie algebras. Funkcional Anal i Prilozen, 1969, 3: 94~ 96

饱和 Prey Predator 模型的稳定性和一致持久性

吴建华

(陕西师范大学数学系, 西安 710062; 西安电子科技大学六系, 西安 710071)

本文考虑如下具有饱和的 Prey_Predator 模型

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u = au - a_1 u^2 - \frac{a_2 uv}{1 + mu}, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t - d_2 \Delta v = bv - b_1 v^2 + \frac{b_2 uv}{1 + mu}, & x \in \Omega, t > 0, \\ u = v = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \neq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, \neq 0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (P)$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) 中的有界开集, 且具有充分光滑的边界 $\partial \Omega$, $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 分别表示两种生物种群 Prey, Predator 的分布, $a, b, d_1 > 0, d_2 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, b_1 > 0, b_2 > 0, m > 0$ 都是实数, 模型(P)中的反应项是 Holling-Tanner 型的. 文献[1, 2]讨论了模型(P)的平衡态方程整体分支解的存在性, 文献[3]讨论了模型(P)的长时间行为. 本文将首次研究模型(P)的稳定性和一致持久性.

对饱和的人口模型相关问题的研究, 可参见文献[4].

设 $\lambda_i(q)$ 为算子 $-d_i \Delta + q$ ($i = 1, 2$) 在 Dirichlet 边界条件下的主特征值, 当 $d_i = 1$ 时, 记 $\lambda_i(0) = \lambda_i$. 当 $a > d_1 \lambda_1$ 时, 易知模型(P)存在唯一形如 $(u, 0)$ 的非负半平凡平衡解, 记之为 $(u_a, 0)$; 而当 $b > d_2 \lambda_2$ 时, 另一非负半平凡平衡解记为 $(0, v_b)$.

引理 1 设 $(u_0, v_0) \in [C_0^+(\Omega)]^2$, 模型(P)在 $[C_0^+(\Omega)]^2$ 中存在唯一整体解 (u, v) .

定理 1 由模型(P)定义的解算子 $S(t)$ 在 $[C_0^+(\Omega)]^2$ 中存在紧的最大吸引子 A .

设 $\alpha > d_1 \lambda_1$ 且满足 $b = \lambda_1^2(-b_2 q_\alpha)$. 则有

定理 2 设 (u, v) 是模型(P)的解, 则下述结论成立:

(1) 当 $a \leq d_1 \lambda_1, b \leq d_2 \lambda_2$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} (u, v) = (0, 0)$; 当 $a \leq d_1 \lambda_1, b > d_2 \lambda_2$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} (u, v) = (0, v_b)$; 当 $a > d_1 \lambda_1, b < d_2 \lambda_2 - \frac{ab_2}{a_1 + ma}$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} (u, v) = (u_a, 0)$.

(2) 当 $d_2 \lambda_2 - \frac{ab_2}{a_1 + ma} < b < d_2 \lambda_2$ 时, 如果 $d_1 \lambda_1 < a < \alpha$, $(u_a, 0)$ 是线性稳定的; 而当 $a > \alpha$ 时, 是线性不稳定的.

(3) 当 $b \geq d_2 \lambda_2, a > d_1 \lambda_1$ 时, $(u_a, 0)$ 是线性不稳定的; 且当 $b > d_2 \lambda_2, a > \lambda_1^1(a_2 v_b)$ 时, $(0, v_b)$ 也是线性不稳定的.

定理 3 设 $b > d_2 \lambda_2, a > \lambda_1^1(a_2 v_b)$, 则模型(P)的解具有一致持久性^[5].