综 述

Darwin 模型外问题

献给林群教授 80 华诞

应隆安

北京大学数学科学学院, 北京 100871

E-mail: yingla@pku.edu.cn

收稿日期: 2014-10-10; 接受日期: 2015-01-07

摘要 本文综述有关 Darwin 模型的分析结果和数值方法, 其中包括模型的引进以及它的近似程度、适定性和数值方法, 着重讨论有关外问题的的工作.

关键词 Maxwell 方程 Darwin 模型 外问题

MSC (2010) 主题分类 35Q61

1 Darwin 模型

Darwin 模型是 Maxwell 方程的一个简化模型. 在一定条件下它能给出很好的近似结果, 从而给求解带来很大的方便. 我们在这里给出它的推导过程.

真空中的 Maxwell 方程是

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{curl} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{curl} B = \mu \left(\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + j \right), \quad (1.4)$$

其中 $E = (E_1, E_2, E_3)^T$ 是电场强度, $B = (B_1, B_2, B_3)^T$ 是磁感强度, ε 是介电常数, μ 是磁导率, ρ 是电荷密度, j 是电流密度. 以 c 记光速, 则有关系式 $c^2 \varepsilon \mu = 1$. ρ 与 j 之间的关系是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0. \quad (1.5)$$

记磁场强度为 $\hat{H} = (H_1, H_2, H_3)^T$, 它和磁感强度的关系是 $B = \mu \hat{H}$. 设 Ω 是三维或二维空间中的区域, 为简单起见, 我们设它的边界 $\partial\Omega$ 是光滑的. 我们考虑全反射边界条件

$$E \times \nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} B \cdot \nu \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.6)$$

其中 ν 是单位外法线方向向量, 初始条件

$$E|_{t=0} = E_0, \quad B|_{t=0} = B_0. \quad (1.7)$$

先讨论有界区域, 我们设 $\Gamma_i, 0 \leq i \leq m$ 是边界的若干连通分支, 并且 Γ_0 是外部边界.

为导出所要的简化模型, 先引用一些分析结果^[1].

定义空间

$$\begin{aligned} H(\text{curl}, \Omega) &= \{v \in L^2(\Omega) : \nabla \times v \in L^2(\Omega)\}, \\ S &= \{V \in H(\text{curl}, \Omega) : \nabla \cdot v = 0, v \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ T &= \{q \in H^1(\Omega) : \nabla q \times \nu|_{\partial\Omega} = 0\}. \end{aligned}$$

引理 1 设 $f \in L^2(\Omega)^3$ 满足

$$\nabla \times f = 0, \quad x \in \Omega, \quad f \times \nu = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

则 $f = \nabla\phi$, 并且 ϕ 满足

$$\Delta\phi = \nabla \cdot f, \quad \phi|_{\Gamma_i} = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq m.$$

$\alpha_i, 0 \leq i \leq m$ 满足

$$\sum_{j=0}^m c_{ij} \alpha_j = \int_{\Omega} f \cdot \nabla \chi_i dx, \quad 0 \leq i \leq m,$$

而且 ϕ 在相差一个常数的意义下唯一确定. χ_i 是问题

$$\Delta\chi_i = 0, \quad x \in \Omega, \quad \chi_i|_{\Gamma_j} = \delta_{ij}, \quad 0 \leq i \leq m$$

的解, $c_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \chi_i}{\partial \nu} ds$.

引理 2 设 $f \in L^2(\Omega)^3$ 满足

$$\nabla \cdot f = 0, \quad x \in \Omega, \quad \int_{\Gamma_i} f \cdot \nu = 0, \quad 0 \leq i \leq m,$$

当且仅当存在函数 $u \in H(\text{curl}, \Omega)$, 使得 $f = \nabla \times u$. 此外, 如果要求 $u \in S$, 则它是唯一确定的.

引理 3 设 $f \in L^2(\Omega)^3$, 则可以作分解,

$$f = \nabla \times u + \nabla\phi, \quad u \in H(\text{curl}, \Omega), \quad \phi \in H^1(\Omega).$$

如果要求 $(u, \phi) \in S \times T/\mathbb{R}x$, 则分解是唯一的.

由引理 3, 电场 E 可以分解成一个横场 E_T 和一个纵场 E_L , 使得 $E = E_T + E_L$, 并且

$$\nabla \cdot E_T = 0, \quad \nabla \times E_L = 0.$$

方程 (1.4) 成为

$$\text{curl} B = \mu \left(\varepsilon \frac{\partial E_L}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial E_T}{\partial t} + j \right).$$

为了导出 Darwin 模型, 我们略去 E_T 这一项, 得

$$\text{curl} B = \mu \left(\varepsilon \frac{\partial E_L}{\partial t} + j \right). \quad (1.8)$$

下面将证明方程组 (1.1)–(1.3) 和 (1.8) 以及全反射边界条件和部分初始条件等价于

(a) $E_L = -\nabla\phi$, 并且 ϕ 满足

$$-\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \phi|_{\Gamma_i} = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq m.$$

$\alpha = \{\alpha_i\}$ 满足

$$c \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} j \cdot \nabla \chi dx, \quad \alpha(0) = \alpha^0,$$

其中 α^0 依赖于 E_0 , $C = \{c_{ij}\}$ 是容量矩阵, $c_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \chi_i}{\partial \nu} ds$, $\chi = \{\chi_i\}$ 是问题

$$\Delta \chi_i = 0, \quad \chi_i|_{\Gamma_j} = \delta_{ij}$$

的解.

(b) B 满足

$$-\Delta B = \mu \nabla \times j, \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (1.10)$$

$$B \cdot \nu|_{\partial\Omega} = B_0 \cdot \nu|_{\partial\Omega}, \quad (1.11)$$

$$(\nabla \times B) \times \nu|_{\partial\Omega} = \mu j \times \nu|_{\partial\Omega}. \quad (1.12)$$

(c) E_T 满足

$$\Delta E_T = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times B, \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot E_T = 0, \quad (1.14)$$

$$E_T \times \nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.15)$$

$$\int_{\Gamma_i} E_T \cdot \nu ds = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (1.16)$$

这是一组拟定常问题. 它由一组椭圆型方程边值问题组成, 时间变量 t 在每个问题中是一个参数. 下面考查等价性^[2]. 先导出 (a)–(c).

由引理 3, 得到 E_L 满足的边界条件, 再由引理 1 和方程 (1.1), 就得到 (a).

以算子 curl 作用于方程 (1.8), 并利用公式 $\text{curl}(\text{curl}v) = \text{grad}(\text{div}v) - \Delta v$, 就得到 (1.9). 对方程 (1.8) 在边界 $\partial\Omega$ 上作乘积 $\times \nu$, 并利用 E_L 的边界条件, 就得到 (1.12), 从而得到 (b).

以算子 curl 作用于方程 (1.2), 得到 (1.13). 由引理 3 和 2, 得到边界条件 (1.16), 从而得到 (c).

反过来, 设 B 和 E 是问题 (a)–(c) 的解. 由 E_L 的表达式直接得到 (1.1). 由 (1.13) 得

$$\nabla \times \left(\nabla \times E_T + \frac{\partial B}{\partial t} \right) = 0.$$

再由 (1.10) 得 $\nabla \cdot (\nabla \times E_T + \frac{\partial B}{\partial t}) = 0$. 又由 (1.11) 和 (1.15) 得 $(\nabla \times E_T + \frac{\partial B}{\partial t}) \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$. 于是, $\nabla \times E_T + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$, 由此得 (1.2). 由 (1.9) 得 $\nabla \times (\nabla \times B - \mu j) = 0$. 再由 (1.12) 得 $(\nabla \times B - \mu j) \times \nu|_{\partial\Omega} = 0$. 于是, 由引理 1, $\nabla \times B - \mu j = \nabla \phi$, 其中 ϕ 是方程 $-\Delta \phi = \nabla \cdot (\nabla \times B - \mu j) = -\mu \nabla \cdot j$ 的解. 再由方程 (1.5), $-\Delta \phi = \mu \frac{\partial \rho}{\partial t}$. 再由 (a) 我们就得到了 (1.8). 最后, 由 (1.15) 和引理 3, 我们得到了 E 满足的边界条件 (1.6).

注意, 我们没有讨论所有的初始条件. 事实上, Darwin 模型是拟定常的, 它不可能对应任意的初值. 我们在下一节还要讨论这个问题.

对外部区域的讨论是完全类似的.

2 逼近性

对应于变量 E, B, ρ 和 j , 我们引进它们的特征量 $\bar{E}, \bar{B}, \bar{\rho}$ 和 $\bar{j}$, 此外, 我们再引进特征长度 $\bar{l}$, 特征时间 $\bar{t}$ 和特征速度 $\bar{v} = \bar{l}/\bar{t}$. 作无量纲量 $E' = E/\bar{E}$, $B' = B/\bar{B}$ 等. Maxwell 方程组可以写为

$$\varepsilon \frac{\bar{E}}{\bar{l}\bar{\rho}} \nabla \cdot E = \rho, \quad (2.1)$$

$$\frac{\bar{B}}{\bar{v}\bar{E}} \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\bar{v}}{c^2} \frac{\bar{E}}{\bar{B}} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \times B = -\mu \bar{l} \frac{\bar{j}}{\bar{B}} j, \quad (2.4)$$

$$\frac{\bar{\rho}\bar{v}}{\bar{j}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0. \quad (2.5)$$

这里为了符号简单起见. 我们仍使用原符号, 如 E' 仍写为 E , 其他类推.

给定 $\bar{l}, \bar{t}$ 和 $\bar{\rho}$, 取 $\bar{E}, \bar{j}$ 和 $\bar{B}$, 使得 $\varepsilon \frac{\bar{E}}{\bar{l}\bar{\rho}} = 1$, $\frac{\bar{E}}{\bar{\rho}} = \frac{\bar{B}}{\bar{E}} = c$. 再取 $\eta = \frac{\bar{v}}{c}$. Maxwell 方程组可以写成

$$\nabla \cdot E = \rho, \quad (2.6)$$

$$\eta \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (2.8)$$

$$\eta \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \times B = -j, \quad (2.9)$$

$$\eta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0. \quad (2.10)$$

边界条件是

$$E \times \nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} B \cdot \nu \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

初始条件是

$$E|_{t=0} = E_0, \quad B|_{t=0} = B_0. \quad (2.11)$$

初始条件与边界条件是相容的, 因此, $E_0 \times \nu|_{\partial\Omega} = 0$. 为区别起见, 令 B^D 和 E^D 为 Darwin 模型的解, 方程 (2.9) 是

$$\eta \frac{\partial E_L}{\partial t} + \nabla \times B = -j, \quad (2.12)$$

现在设 η 是一个小量, 并关于它作展开:

$$B = B^0 + \eta B^1 + \eta^2 B^2 + \cdots, \quad E = E^0 + \eta E^1 + \eta^2 E^2 + \cdots.$$

对于 Darwin 模型同样作展开:

$$B^D = B^{D0} + \eta B^{D1} + \eta^2 B^{D2} + \cdots, \quad E^D = E^{D0} + \eta E^{D1} + \eta^2 E^{D2} + \cdots.$$

考虑零阶近似, 在方程中取 $\eta = 0$, 我们发现方程 (2.12) 与 (2.9) 是相同的, 因此, Darwin 模型保持零阶近似不变. 一般地有如下结果:

(1) 零阶项

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E^0 &= \rho^0, \quad \nabla \times E^0 = 0, \quad \nabla \cdot B^0 = 0, \\ \nabla \times B^0 &= j^0, \quad E^0 \times \nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial B^0}{\partial t} \cdot \nu \Big|_{\partial\Omega} = 0.\end{aligned}$$

(2) 一阶项

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E^1 &= \rho^1, \quad \frac{\partial B^0}{\partial t} - \nabla \times E^1 = 0, \quad \nabla \cdot B^1 = 0, \\ \frac{\partial E^0}{\partial t} - \nabla \times B^1 &= -j^1, \quad E^1 \times \nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial B^1}{\partial t} \cdot \nu \Big|_{\partial\Omega} = 0.\end{aligned}$$

(3) 二阶项

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E^2 &= \rho^2, \quad \frac{\partial B^1}{\partial t} - \nabla \times E^2 = 0, \quad \nabla \cdot B^2 = 0, \\ \frac{\partial E^1}{\partial t} - \nabla \times B^2 &= -j^2, \quad E^2 \times \nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial B^2}{\partial t} \cdot \nu \Big|_{\partial\Omega} = 0.\end{aligned}$$

因此, Maxwell 方程的零阶近似由一组椭圆型方程构成, 只与 B 的初值有关. Darwin 模型与它一致. 由引理 3, $E_T^0 = 0$, 因此, $E_L^0 = E^0$, 一阶项也是一组 B^1 和 E^1 满足的椭圆型方程边值问题, Darwin 模型与它一致. 因此, $E^{D1} = E^1$, $B^{D1} = B^1$. 同理, $E^{D2} = E^2$. 最后得到如下定理^[1]:

定理 1 Darwin 模型的逼近阶为 $E - E^D = O(\eta^3)$, $B - B^D = O(\eta^2)$.

3 适定性

对于有界区域上 Darwin 模型的适定性, 文献 [3] 给出了证明. 下面着重讨论外问题, 设 Ω 是一个无界区域, $\bar{\Omega}$ 的余集 Ω^c 是一个有界区域, 边界 $\partial\Omega$ 是连通且光滑的. 首先考虑 $\dim(\Omega) = 2$ 时的电场模型 (c). 为了确定适当的函数类型, 我们引进一些函数空间.

空间

$$H(\text{curl}, \text{div}; \Omega) = \{u \in (L^2(\Omega))^2 : \nabla \cdot u, \nabla \times u \in L^2(\Omega)\},$$

赋以范数 $\|u\|_{0, \text{curl}, \text{div}} = (\|u\|_0^2 + \|\nabla \cdot u\|_0^2 + \|\nabla \times u\|_0^2)^{\frac{1}{2}}$ 以后, 它是一个 Hilbert 空间. 我们再定义集合 $H_0^{1,*}(\Omega)$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 关于范数 $|\cdot|_{1,*}$ 所取的闭包. 按此范数, 它是一个 Hilbert 空间, 其中

$$\|\cdot\|_{1,*} = \left(|\cdot|_1^2 + \left\| \frac{\cdot}{|x| \ln|x/R_0|} \right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

然后取一个截断函数 $\zeta \in C^\infty(\Omega)$, 它在边界 $\partial\Omega$ 附近, $\zeta \equiv 1$, 在无穷远点附近, $\zeta \equiv 0$, 并且 $0 \leq \zeta \leq 1$. 记 $\mathcal{D}'$ 为广义函数分布的空间. 定义

$$H_{0c}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}' : \|\zeta u\|_{0, \text{curl}, \text{div}} < \infty, (1 - \zeta)u \in (H_0^{1,*}(\Omega))^2, u \times \nu|_{\partial\Omega} = 0\}$$

和 $\|u\|_* = \{\|\nabla \times u\|_0^2 + \|\nabla \cdot u\|_0^2 + \langle u \cdot \nu, 1 \rangle_{\partial\Omega}^2\}^{\frac{1}{2}}$. 然而, $\|\cdot\|_*$ 并不是空间 $H_{0c}(\Omega)$ 的范数. 事实上, 我们有如下结果^[4]:

引理 4 设 $V_0 = \{u \in H_{0c}(\Omega) : \|u\|_* = 0\}$, 则

$$V_0 = \left\{ u = (u_1, u_2) : u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, u_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \phi = a(x_2 + f(x)) + b(x_1 + g(x)), (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

其中 $f, g \in H^{1,*}(\Omega)$ 分别满足

$$-\Delta \psi = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = -\frac{\partial \chi}{\partial \nu},$$

这里 $\chi = x_2, x_1$.

设 $V = \{v \in H_{0c}(\Omega) : \langle v \cdot \nu, 1 \rangle_{\partial \Omega} = 0\}$, 又设商空间 $W = V/V_0$. 还要检验它是一个 Banach 空间, 在文献 [5] 中证明了如下引理:

引理 5 在范数 $\|\cdot\|_*$ 之下 W 是一个闭空间.

为了讨论问题 (c) 的适定性, 引进一个人工变量 p . 把方程 (1.13) 改成

$$-\Delta E_T + \nabla p = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times B. \quad (3.1)$$

(3.1) 和 (1.14) 就是典型的 Stokes 方程组, 只是边界条件不同. 对于 p 引进下面的空间. 令 $\mathcal{Q} = \{p \in L^2(\Omega) : \text{supp } p \subset \subset \Omega\}$, 并赋以范数 $\|p\|_{\sharp} = (\|p\|_0^2 + |\int_{\Omega} p dx|^2)^{\frac{1}{2}}$. 然后取闭包, 得到一个 Hilbert 空间 Q . 当 $p \in Q$ 并且 $\lim p_n = p, p_n \in \mathcal{Q}$, 我们定义 $\int_{\Omega} p dx = \lim \int_{\Omega} p_n dx$. 要注意, 它不是通常意义下的积分, 而是一个广义积分. Q 的一个子空间 $\{p \in Q : \int_{\Omega} p dx = 0\}$, 记作 Q_0 . 在 $W \times W$ 和 $W \times Q_0$ 上定义如下双线性泛函:

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \int_{\Omega} (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v) dx + \int_{\Omega} (\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v) dx + \langle u \cdot \nu, 1 \rangle_{\partial \Omega} \langle v \cdot \nu, 1 \rangle_{\partial \Omega}, \quad u, v \in W, \\ b(u, p) &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) p dx, \quad u \in W, \quad p \in Q_0. \end{aligned}$$

现在, 问题的变分提法是求 $u \in W, p \in Q_0$, 使得

$$d(u, v) + b(v, p) = \int_{\Omega} B \cdot (\nabla \times v) dx, \quad \forall v \in W, \quad (3.2)$$

$$b(u, q) = 0, \quad \forall q \in Q_0, \quad (3.3)$$

有如下的存在唯一定理^[6]:

定理 2 问题 (3.2) 和 (3.3) 有唯一解 (u, p) , 并且 $p = 0$.

此结果还可以改进. 在文献 [6] 中证明了如下定理:

定理 3 $b(u, q) = 0, \forall q \in Q_0$ 当且仅当 $b(u, q) = 0, \forall q \in L^2(\Omega)$.

所以, 问题的提法可以改进为求 $u \in W, p \in Q_0$, 使得

$$d(u, v) + b(v, p) = \int_{\Omega} B \cdot (\nabla \times v) dx, \quad \forall v \in W, \quad (3.4)$$

$$b(u, q) = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega). \quad (3.5)$$

回到原空间 V , 我们得出结论: 边值问题的解存在, 但并不唯一. 齐次问题的解构成一个二维空间. 也就是说, 通解中含有两个任意常数.

其次, 我们考虑磁场模型 (b). 以下的讨论与关于电场模型的结果是平行的^[7].

先把边界条件化为齐次, 令 $\tilde{B} = B - B_0$, $f = \mu j - \nabla \times B_0$, 则由 (1.5)–(1.8) 得

$$-\Delta \tilde{B} = \nabla \times f, \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \tilde{B} = 0, \quad (3.7)$$

$$\tilde{B} \cdot \nu|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad (3.8)$$

$$(\nabla \times \tilde{B}) \times \nu|_{\partial\Omega_0} = f \times \nu|_{\partial\Omega_0}. \quad (3.9)$$

取一个截断函数 $\zeta \in C^\infty(\Omega)$, 它在边界 $\partial\Omega$ 附近, $\zeta \equiv 1$, 在无穷远点附近, $\zeta \equiv 0$, 并且 $0 \leq \zeta \leq 1$. 定义 $V_1 = \{u \in \mathcal{D}' : \|\zeta u\|_{0,\text{curl},\text{div}} < \infty, (1-\zeta)u \in (H_0^{1,*}(\Omega))^2, u \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0\}$ 和 $\|u\|_* = \{\|\nabla \times u\|_0^2 + \|\nabla \cdot u\|_0^2\}^{\frac{1}{2}}$.

引理 6 设 $V_0 = \{u \in V_1 : \|u\|_* = 0\}$, 则

$$V_0 = \left\{ u = (u_1, u_2) : u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, u_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \phi = a_0(x_2 + f(x)) + b_0(x_1 + g(x)) + b_1(\ln|x| + q(x)), \right. \\ \left. (a_0, b_0, b_1) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

其中 $f, g, q \in H^{1,*}(\Omega)$ 分别满足 $-\Delta \psi = 0$, $x \in \Omega$, $\psi|_{\partial\Omega} = -\chi$, 这里 $\chi = x_2, x_1, \ln|x|$.

因此, 通解中含有三个任意常数.

对于三维问题, 分析方法是类似的. 所不同的是, 边值问题有唯一解^[8].

4 数值方法

对于在有界区域上的 Darwin 模型, 文献 [3] 研究了有限元方法及其收敛性. 在这里着重讨论外问题, 以二维电场模型为例. 我们考虑问题 (1.13)–(1.16) 的无限元方法.

将区域 Ω 剖分为无穷多个三角形单元, 使它具有相似性^[10]. 在每个单元 $e_i, i = 1, 2, \dots$ 上对 E_T 用二次多项式插值, 对 p 用常数插值. 定义一些空间:

$$E_h(\Omega) = \{u \in (C(\bar{\Omega}))^2, u|_{e_i} \in (P_2(e_i))^2, \forall e_i \subset \Omega\},$$

$$M_h(\Omega) = \{p \in (L^2(\bar{\Omega}))^2, p|_{e_i} \in (P_0(e_i))^2, \forall e_i \subset \Omega\},$$

$$W_h(\Omega) = \{u \in E_h(\Omega) : \nabla \cdot u, \nabla \times u \in L^2(\Omega), u \times \nu|_{\partial\Omega} = 0, \langle u \cdot \nu, 1 \rangle_{\partial\Omega} = 0\},$$

其中 P_k 表示所有 k 次多项式的集合. 设 $B(O, R_1) \supset \Omega^c$ 并且 $R_2 > R_1$, 作截断函数 $\zeta \in C^\infty$, 使当 $|x| < R_1$ 时, $\zeta(x) \equiv 1$; 当 $|x| > R_2$ 时, $\zeta(x) \equiv 0$, 并且对所有的 x , 有 $0 \leq \zeta(x) \leq 1$. 我们定义集合

$$H^{1,*}(\Omega) = \{u : \zeta u \in H^1(\Omega \cap B(O, R_2)), (1-\zeta)u \in H_0^{1,*}(\Omega)\}.$$

赋以范数 $\|\cdot\|_{1,*}$, $H^{1,*}(\Omega)$ 是一个 Hilbert 空间.

在文献 [3] 证明了如下引理:

引理 7 空间 $W_h(\Omega)$ 是范数为 $\|\cdot\|_*$ 的 Hilbert 空间.

引理 8 $W_h(\Omega) \subset H^{1,*}(\Omega)$.

引理 9 在空间 $W_h(\Omega)$ 中范数 $\|\cdot\|_*$ 等价于 $\|\cdot\|_{1,*}$.

无限元方法的提法是, 求 $u_h \in W_h(\Omega)$, $p_h \in M_h(\Omega)$, 使得 $u_h \times \nu|_{\Gamma_0} = g_I$, $\int_{\Gamma_0} u_h \cdot \nu ds = 0$, 并且

$$d(u_h, v) + b(v, p_h) = \int_{\Omega} B \cdot (\nabla \times v) dx, \quad \forall v \in W_h(\Omega), \quad (4.1)$$

$$b(u_h, q) = 0, \quad \forall q \in M_h(\Omega). \quad (4.2)$$

定理 4 问题 (4.1) 和 (4.2) 有唯一解.

最后, 文献 [6] 中给出了方法的实现的途径, 无限元格式可归结为一个有限阶代数方程的求解. 对于三维问题, 数值计算的方法是类似的^[11].

5 进一步的问题

(1) 对于二维区域上的外问题, 解析解是不唯一的. 然而数值解却是唯一的. 数值实验的结果显示, 所得到的解在无穷远处的极限是零. 至今没有分析结果证明这个现象.

(2) 吸收边界条件是一个常见的条件. 在文献 [12] 中有相关的简化模型, 但它是不定常的. 要给一个类似于 Darwin 模型的简化模型, 尚有实现上的困难.

参考文献

- 1 Degond P, Raviart P A. An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations. *Forum Math*, 1992, 4: 13–44
- 2 李大潜, 秦铁虎. 物理学与偏微分方程 (上、下册). 北京: 高等教育出版社, 1997
- 3 Ciarlet Jr P, Zou J. Finite element convergence for the Darwin model to Maxwell's equations. *Math Model Numer Anal*, 1997, 31: 213–250
- 4 Ying L, Li F. Exterior problem of the Darwin model and its numerical computation. *Math Model Numer Anal*, 2003, 37: 515–532
- 5 应隆安. 偏微分方程外问题 — 理论和数值方法. 北京: 科学出版社, 2013
- 6 Ying L. *Numerical Methods for Exterior Problems*. Singapore: World Scientific, 2006
- 7 Liao C, Ying L. Exterior problem of magnetic field in Darwin model and its numerical solution. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 2008, 24: 418–434
- 8 Liao C, Ying L. An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations in 3-D unbounded domains. *Commun Math Sci*, 2008, 6: 695–710
- 9 廖才秀. 二维有界多连通区域上的达尔文模型及其数值解. 北京: 高等学校计算数学学报, 2012, 34: 97–106
- 10 应隆安. 无限元方法. 北京大学数学丛书. 北京: 北京大学出版社, 1992
- 11 Fang N, Ying L. Three dimensional exterior problem of Darwin model and its numerical computation. *Math Models Methods Appl Sci*, 2008, 18: 1673–1701
- 12 Raviart P A, Sannendricker E. A hierarchy of approximate methods for the Maxwell equations. *Numer Math*, 1996, 73: 329–372

Exterior problems of the Darwin model

YING LongAn

Abstract We summarize the analytic results and numerical methods for the Darwin model in this paper, including the introducing of the model, the rate of approximation of it, the well-posedness, and numerical methods, in which we emphasis on the work for the exterior problems.

Keywords Maxwell equation, Darwin model, exterior problem

MSC(2010) 35Q61

doi: 10.1360/N012014-00208