综 述

多四元变量的 k -Cauchy-Fueter 算子

献给史济怀教授 80 华诞

王伟

浙江大学数学科学学院, 杭州 310027

E-mail: wwang@zju.edu.cn

收稿日期: 2015-03-28; 接受日期: 2015-07-28

国家自然科学基金 (批准号: 11171298) 资助项目

摘要 本文综述了多四元变量的 k -Cauchy-Fueter 算子的研究进展, 讨论了 k -Cauchy-Fueter 复形、非齐次 k -Cauchy-Fueter 方程、Hartogs 扩张现象、Bochner-Martinelli 积分表示公式、Penrose 积分变换和 k 正则函数的级数展开、四元 Hardy 空间与 Cauchy-Szegö 核、0-Cauchy-Fueter 算子及与四元 Monge-Ampère 算子的关系、四元闭正流及其 Lelong 数、Lelong-Jessen 型公式, 以及切向 k -Cauchy-Fueter 算子与复形.

关键词 k -Cauchy-Fueter 算子与复形 k 正则函数 四元多重位势论 切向 k -Cauchy-Fueter 算子与复形

MSC (2010) 主题分类 32A30, 30G35, 35N05, 32U15

1 引言

四元数自发现之日起, 就与物理学有很深的联系. 特别是 20 世纪 80 年代以来, 在理论物理学中发现一些物理模型的背景流形必须具有四元结构时, 其理论才是自洽的. 例如, 具有 $(4, 0)$ 超对称的 σ 模型的场必须约束在一个 hyperKähler 流形上, 才会有所要求的超对称结构^[1]. HyperKähler 流形是具有三个满足四元关系的复结构, 且对每个复结构都是 Kähler 的 Riemann 流形. 如果模型要求有称为 Wess-Zumino 的物理项, 那么背景流形必须是 HKT^[2] (hyperKähler with torsion) 的. 当进一步耦合 $(4, 0)$ 超引力 (supergravity), 则背景流形必须是 QKT^[3] (quaternionic Kähler with torsion) 的. 在这些发现的刺激下, 四元流形的微分几何及分析的研究成为了一个非常活跃的方向, 参见文献 [4–8] 及其参考文献.

多四元变量理论研究 n 维四元空间 $\mathbb{H}^n$ 上的正则函数. 四元数代数 $\mathbb{H}$ 的元素记为 $x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$, 其中 $x_l \in \mathbb{R}$,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k.$$

对于点 $q = (q_0, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{H}^n$, 我们记

$$q_l = x_{4l} + x_{4l+1}i + x_{4l+2}j + x_{4l+3}k, \quad (1.1)$$

$l = 0, \dots, n-1$. 在 $\mathbb{H}^n$ 中区域 Ω 上, Cauchy-Fueter 算子 $\mathcal{D} : C^1(\Omega, \mathbb{H}) \rightarrow C(\Omega, \mathbb{H}^n)$ 定义为

$$\mathcal{D}f = \begin{pmatrix} \bar{\partial}_{q_0} f \\ \vdots \\ \bar{\partial}_{q_{n-1}} f \end{pmatrix},$$

其中 $f \in C^1(\Omega, \mathbb{H})$,

$$\bar{\partial}_{q_l} = \partial_{x_{4l}} + i\partial_{x_{4l+1}} + j\partial_{x_{4l+2}} + k\partial_{x_{4l+3}}.$$

一个函数 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ 称作 Ω 上左正则的, 如果对于任意的 $q \in \Omega$ 有 $\mathcal{D}f(q) = 0$.

类似于多复变函数论, 为了探讨多变量四元左正则函数, 对给定的 $\psi \in C(\Omega, \mathbb{H}^n)$, 解非齐次 Cauchy-Fueter 方程组

$$\mathcal{D}f = \psi \quad (1.2)$$

是非常重要的. 这是一个超定的方程组, 为了使它有解, ψ 必须满足相容性条件. 从 20 世纪 90 年代开始, 一些欧洲和美国的数学家们开始研究这个问题. 他们利用 Fourier 变换, 将问题转化为一个交换代数的问题, 即求一个线性映射 $\mathcal{R}^{4n} \rightarrow \mathcal{R}^4$ 的消解 (resolution) (将它扩充为正合列), 这里 $\mathcal{R}$ 是 $\mathbb{R}^{4n}$ 上的多项式环, 这个线性映射是 Cauchy-Fueter 算子的 Fourier 变换的共轭. 正合列的存在性由 Hilbert 的 Syzygies 定理保证, 其对偶即为 Cauchy-Fueter 复形. 而且交换代数有计算机程序计算这个正合列. 文献 [9–13] 利用计算机程序计算出了相容性条件, 即

$$\mathcal{D}_1\psi = 0.$$

与多复变函数论中的 $\bar{\partial}$ 算子和 Dolbeault 复形不同, $\mathcal{D}_1 : C^2(\Omega, \mathbb{H}^n) \rightarrow C(\Omega, \Lambda^3 \mathbb{H}^n)$ 是一个二阶微分算子. 他们还导出了部分的 Hartogs 现象. 但由于计算量太大, 并未实际计算 Cauchy-Fueter 复形的其他算子.

Wang^[14] 证明了当 ψ 具有紧支集时, 非齐次 Cauchy-Fueter 方程组 (1.2) 有紧支集解. 这导致了左正则函数的 Hartogs 扩张现象. 意大利数学家 Pertici^[15] 是第一个研究多四元变量正则函数及其 Hartogs 现象的人. Cauchy-Fueter 算子是多复变函数论中 $\bar{\partial}$ 算子的对应物. 但事实上, 在四元分析中存在着一族与 $\bar{\partial}$ 对应的算子, 即 k -Cauchy-Fueter 算子

$$D_0^{(k)} : C^\infty(\mathbb{R}^{4n}, \mathbb{C}^{k+1}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{4n}, \mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Cauchy-Fueter 算子恰好是 1-Cauchy-Fueter 算子. 这是因为复数域只有一个不可约表示, 即 $\mathbb{C}$ 自己, 而四元可除代数 $\mathbb{H}$ (单位四元数全体 $\cong SU(2)$) 有一族互不等价的不可约表示 $\mathbb{C}^{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. 在一维四元数空间上, k -Cauchy-Fueter 算子是物理学中 helicity 为 $k/2$ 的无质量场算子的椭圆版本. $k = 0$, 对应于波动方程; $k = 1$, 对应于中微子的 Weyl-Dirac 方程; $k = 2$, 对应于 Maxwell 方程; $k = 3$, 对应于线性化 Einstein 方程; ... (参见文献 [16]).

第 2 节介绍了全纯 k -Cauchy-Fueter 算子和 k -Cauchy-Fueter 算子的定义, 以及 k -Cauchy-Fueter 复形. 这个复形的第一个算子是 k -Cauchy-Fueter 算子, 而第二个算子给出了非齐次 k -Cauchy-Fueter 方程组 $D_0^{(k)}f = \psi$ 可解的相容性条件. 当 ψ 具有紧支集时, 方程组有紧支集解, 这导致了 k -正则函数 (即满足 $D_0^{(k)}f = 0$ 的函数) 的 Hartogs 扩张现象. 我们还讨论了 Bochner-Martinelli 积分表示公式.

我们利用复几何中的 twistor 变换构造了 k -Cauchy-Fueter 复形^[18]. 这个构造的一个推论是 twistor 空间上某个线丛的第一 Cech 上调类一一对应于 k -Cauchy-Fueter 方程组的解. 第 3 节讨论了这个对应, 它可以用推广的 Penrose 积分变换公式实现. 这样, 我们得到了所有的 k -正则函数及其级数展开式. 我们还讨论了四元 Siegel 上半空间上左正则函数的 Hardy 空间及其再生核: Cauchy-Szegö 核的精确表达式.

第 4 节利用 0-Cauchy-Fueter 算子及其复形的精确表达式, 我们写出了四元 Monge-Ampère 算子的实变量形式. 我们引入了四元版本的微分形式, 定义了类似于复多重位势论中的 ∂ 和 $\bar{\partial}$ 算子的 d_0 和 d_1 算子, 并发展一套闭正流 (closed positive currents) 的理论: 定义了闭正流及其 Lelong 数, 证明了 Lelong-Jessen 型公式等.

第 5 节讨论了平坦的四元 Heisenberg 群上的切向 k -Cauchy-Fueter 复形, 其第一个算子是切向 k -Cauchy-Fueter 算子. 与多复变函数论不同, 四元强拟凸域边界的四元结构, 一般情形下并不能用四元 Heisenberg 群逼近. 我们讨论了最简单的 $\mathbb{H}^2$ 中二次超曲面上的切向 k -Cauchy-Fueter 算子. 利用二步幂零 Lie 群上的非交换 Fourier 变换, 我们构造了切向 Laplace 算子的相对基本解及 Szegö 投影.

2 k -Cauchy-Fueter 算子与 k -Cauchy-Fueter 复形

2.1 全纯 k -Cauchy-Fueter 算子

四元代数 $\mathbb{H}$ 可以用映射

$$x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + \mathbf{i}x_1 & -x_2 - \mathbf{i}x_3 \\ x_2 - \mathbf{i}x_3 & x_0 - \mathbf{i}x_1 \end{pmatrix}$$

嵌入到 $\mathbb{C}^{2 \times 2}$. 我们将使用共轭嵌入

$$\begin{aligned} \tau: \mathbb{H}^n &\simeq \mathbb{R}^{4n} \hookrightarrow \mathbb{C}^{2n \times 2} \cong \mathbb{C}^{4n}, \\ (q_0, \dots, q_{n-1}) &\mapsto \mathbf{z} = (z^{A\alpha}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$A = 0, 1, \dots, 2n-1$, $\alpha = 0, 1$. 当 q_j 由 (1.1) 给出时, $\mathbf{z}$ 由下式定义,

$$\begin{pmatrix} z^{00} & z^{01} \\ z^{10} & z^{11} \\ \vdots & \vdots \\ z^{(2l)0} & z^{(2l)1} \\ z^{(2l+1)0} & z^{(2l+1)1} \\ \vdots & \vdots \\ z^{(2n-2)0} & z^{(2n-2)1} \\ z^{(2n-1)0} & z^{(2n-1)1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_0 - \mathbf{i}x_1 & -x_2 + \mathbf{i}x_3 \\ x_2 + \mathbf{i}x_3 & x_0 + \mathbf{i}x_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{4l} - \mathbf{i}x_{4l+1} & -x_{4l+2} + \mathbf{i}x_{4l+3} \\ x_{4l+2} + \mathbf{i}x_{4l+3} & x_{4l} + \mathbf{i}x_{4l+1} \\ \vdots & \vdots \\ x_{4n-4} - \mathbf{i}x_{4n-3} & -x_{4n-2} + \mathbf{i}x_{4n-1} \\ x_{4n-2} + \mathbf{i}x_{4n-1} & x_{4n-4} + \mathbf{i}x_{4n-3} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

我们先考虑 $\mathbb{C}^{2n \times 2}$ 上的全纯算子. 记 $\mathbb{C}^{4n}$ 上关于变量 $\mathbf{z}^{A\alpha}$ 的全纯偏导数为

$$\nabla_{A\alpha} := \partial_{z^{A\alpha}}, \quad (2.3)$$

其中 $A = 0, 1, \dots, 2n-1$, $\alpha = 0, 1$. $\mathbb{C}^2$ 中的元素记为 (v_0, v_1) , 而对称幂 $\odot^k \mathbb{C}^2$ 的元素可写为 $(v_{\alpha_1 \dots \alpha_k})$, 其中 $v_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \in \mathbb{C}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k = 0, 1$, 这里 $v_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ 在下标置换下不变, 所以,

$$\odot^k \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^{k+1}, \quad (2.4)$$

且 $\odot^k \mathbb{C}^2$ 的一个元素 v 可写作 $v = (v_{0\dots 0}, v_{10\dots 0}, \dots, v_{1\dots 1})^T$, 这里 T 是转置.

对于复向量空间 V , $\mathbb{C}^{4n}$ 上 V - 值全纯函数的全体记为 $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{4n}, V)$. 对于 $k = 1, 2, \dots$, 定义全纯 k -Cauchy-Fueter 算子

$$\begin{aligned} D_0^{(k)} : \mathcal{H}(\mathbb{C}^{4n}, \mathbb{C}^{k+1}) &\rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C}^{4n}, \mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^k), \\ \phi &\mapsto D_0^{(k)} \phi, \end{aligned}$$

其中对于 $\phi = (\phi_{\alpha_1 \dots \alpha_k})$,

$$(D_0^{(k)} \phi)_{A\alpha_2 \dots \alpha_k} := \nabla_A^{\alpha_1} \phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k = 0, 1$, $A = 0, 1, \dots, 2n-1$, 这里用了同构 (2.4). 而当 $k = 0$ 时, 全纯 0-Cauchy-Fueter 算子 $D_0^{(k)} : \mathcal{H}(\mathbb{C}^{4n}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C}^{4n}, \wedge^2 \mathbb{C}^{2n})$ 是一个二阶算子:

$$(D_0^{(0)} \phi)_{A_1 A_2} = \nabla_{A_1 \alpha} \nabla_{A_2}^{\alpha} \phi - \nabla_{A_2 \alpha} \nabla_{A_1}^{\alpha} \phi, \quad (2.6)$$

这里使用了对重复的指标求和的 Einstein 记号. 我们用矩阵

$$(\epsilon_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

来升降指标. 例如, $\nabla_A^{\alpha_1} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2} = \nabla_{A\alpha_2}$. 一般地,

$$\nabla_A^0 = \nabla_{A1}, \quad \nabla_A^1 = -\nabla_{A0}.$$

全纯 k -Cauchy-Fueter 方程 $D_0^{(k)} \phi = 0$ ($k > 0$) 可写作

$$\nabla_{A1} \phi_{0\alpha_2 \dots \alpha_k} - \nabla_{A0} \phi_{1\alpha_2 \dots \alpha_k} = 0,$$

$A = 0, 1, \dots, 2n-1$, $\alpha_2, \dots, \alpha_k = 0, 1$. 特别地, 全纯 1-Cauchy-Fueter 方程 $D_0^{(1)} \phi = 0$ 可写作

$$D_0^{(1)} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{01} & -\nabla_{00} \\ \vdots & \vdots \\ \nabla_{(2n-1)1} & -\nabla_{(2n-1)0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{z^{01}} & -\partial_{z^{00}} \\ \vdots & \vdots \\ \partial_{z^{(2n-1)1}} & -\partial_{z^{(2n-1)0}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = 0,$$

其中 $\phi = (\phi_0, \phi_1)^T \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{4n}, \mathbb{C}^2)$.

2.2 k -Cauchy-Fueter 算子

通过嵌入 τ 将全纯偏导数拉回到四元空间 $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n}$, 我们定义 $\mathbb{R}^{4n}$ 上一阶微分算子

$$\begin{pmatrix} \nabla_{00} & \nabla_{01} \\ \nabla_{10} & \nabla_{11} \\ \vdots & \vdots \\ \nabla_{(2l)0} & \nabla_{(2l)1} \\ \nabla_{(2l+1)0} & \nabla_{(2l+1)1} \\ \vdots & \vdots \\ \nabla_{(2n-2)0} & \nabla_{(2n-2)1} \\ \nabla_{(2n-1)0} & \nabla_{(2n-1)1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \partial_{x_0} + i\partial_{x_1} & -\partial_{x_2} - i\partial_{x_3} \\ \partial_{x_2} - i\partial_{x_3} & \partial_{x_0} - i\partial_{x_1} \\ \vdots & \vdots \\ \partial_{x_{4l}} + i\partial_{x_{4l+1}} & -\partial_{x_{4l+2}} - i\partial_{x_{4l+3}} \\ \partial_{x_{4l+2}} - i\partial_{x_{4l+3}} & \partial_{x_{4l}} - i\partial_{x_{4l+1}} \\ \vdots & \vdots \\ \partial_{x_{4n-4}} + i\partial_{x_{4n-3}} & -\partial_{x_{4n-2}} - i\partial_{x_{4n-1}} \\ \partial_{x_{4n-2}} - i\partial_{x_{4n-1}} & \partial_{x_{4n-4}} - i\partial_{x_{4n-3}} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

注意这里用了与 (2.3) 中全纯偏导数 $\nabla_{j\alpha}$ 一样的符号. 这个定义的好处是, 我们有 $\nabla_{j\alpha} z^{k\beta} = 2\delta_j^k \delta_\alpha^\beta$ (参见文献 [19, 引理 3.1]), 即由 (2.2) 给出的 $z^{k\beta}$ 表现得像独立变量, 而 $\nabla_{j\alpha}$ 是关于这些变量的偏导数.

对于 $k = 1, 2, \dots, \mathbb{R}^{4n}$ 上 k -Cauchy-Fueter 算子 (1.3) 为: 对于 $\phi = (\phi_{\alpha_1 \dots \alpha_k})$, 有

$$(D_0^{(k)} \phi)_{A\alpha_2 \dots \alpha_k} := \nabla_A^{\alpha_1} \phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}, \quad (2.8)$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k = 0, 1, A = 0, 1, \dots, 2n-1$. 0-Cauchy-Fueter 算子由 (2.6) 定义, 只是将 $\nabla_{j\alpha}$ 换作 (2.7) 中的算子. 一个 $\mathbb{C}^{k+1}$ -值函数 $\phi: \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$ 称作 k -正则的, 如果它在 $\mathbb{R}^{4n}$ 上满足 k -Cauchy-Fueter 方程

$$D_0^{(k)} \phi = 0. \quad (2.9)$$

特别地, 1-Cauchy-Fueter 方程 $D_0^{(1)} \phi = 0$ 可写作

$$\begin{aligned} D_0^{(1)} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \nabla_{01} & -\nabla_{00} \\ \vdots & \vdots \\ \nabla_{(2n-1)1} & -\nabla_{(2n-1)0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\partial_{x_2} - i\partial_{x_3} & -\partial_{x_0} - i\partial_{x_1} \\ \partial_{x_0} - i\partial_{x_1} & -\partial_{x_2} + i\partial_{x_3} \\ \vdots & \vdots \\ -\partial_{x_{4l+2}} - i\partial_{x_{4l+3}} & -\partial_{x_{4l}} - i\partial_{x_{4l+1}} \\ \partial_{x_{4l}} - i\partial_{x_{4l+1}} & -\partial_{x_{4l+2}} + i\partial_{x_{4l+3}} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中 $\phi = (\phi_0, \phi_1)^T \in C^\infty(\mathbb{R}^{4n}, \mathbb{C}^2)$.

对 $\mathbb{R}^{4n}$ 上 $\mathbb{H}$ -值函数 $F = F_0 + F_1 i + F_2 j + F_3 k$, 令 $\phi_0 := F_2 - iF_3$, $\phi_1 := -F_0 - iF_1$, 则 $F = -\phi_1 + j\phi_0$. 那么, Cauchy-Fueter 方程 $\mathcal{D}F = 0$ 可写作

$$\nabla_A^\alpha \phi_\alpha = 0, \quad A = 0, 1, \dots, 2n-1,$$

这正好是 1-Cauchy-Fueter 方程. $\mathbb{C}^2$ -值函数 $(\phi_0, \phi_1)^T$ 是 1-正则的当且仅当 $F = -\phi_1 + j\phi_0$ 是左正则的.

20 世纪 70 年代末, 为了研究物理学中螺旋度 (helicity) 为 $k/2$ 的无质量场算子, 文献 [16, 17] 利用复几何中 Penrose 的 twistor 变换构造了 $\mathbb{C}^4$ 上的一族正合列. 在 20 世纪 80 年代末, Baston [20] 将这一方法推广到弯曲的高维流形, 证明了在复的四元流形 (对应于实解析的四元 Kähler 流形) 上存在一族微分复形. Bures 等人 [21] 和 Colombo 等人 [22] 证明了 Cauchy-Fueter 复形等价于 Baston [20] 构造的一个复形. 对于平坦的四元空间, Wang [18] 详细研究了 twistor 变换的每个步骤, 从而写出了 k -Cauchy-Fueter ($k = 0, 1, \dots$) 复形的每个微分算子. 当 $k = 1$ 时, 即为 Cauchy-Fueter 复形. 这样, 我们不需要使用计算机就可以较为简单且完整地写出整个 k -Cauchy-Fueter 复形.

定理 2.1 [18, 推论 1.1] 序列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{R}(\mathbb{R}^{4n}, \odot^k \mathbb{C}^2) \xrightarrow{D_0^{(k)}} \mathcal{R}(\mathbb{R}^{4n}, \odot^{k-1} \mathbb{C}^2 \otimes \Lambda^1 \mathbb{C}^{2n}) \xrightarrow{D_1^{(k)}} \dots \xrightarrow{D_{k-1}^{(k)}} \mathcal{R}(\mathbb{R}^{4n}, \Lambda^k \mathbb{C}^{2n}) \\ \xrightarrow{D_k^{(k)}} \mathcal{R}(\mathbb{R}^{4n}, \Lambda^{k+2} \mathbb{C}^{2n}) \xrightarrow{D_{k+1}^{(k)}} \dots \xrightarrow{D_{2n-2}^{(k)}} \mathcal{R}(\mathbb{R}^{4n}, \odot^{2n-k-2} \mathbb{C}^2 \otimes \Lambda^{2n} \mathbb{C}^{2n}) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

除了第一项以外是正合的, 其中 $\mathcal{R}(\mathbb{R}^{4n}, \odot^k \mathbb{C}^2 \otimes \Lambda^j \mathbb{C}^{2n})$ 是 $\mathbb{R}^{4n}$ 上 $\odot^k \mathbb{C}^2 \otimes \Lambda^j \mathbb{C}^{2n}$ 值多项式构成的环. 当 $j = 0, \dots, k-1$ 时, 算子 $D_j^{(k)}$ 为

$$(f_{A_1 \dots A_j \alpha_1 \dots \alpha_{k-j}}) \mapsto (\nabla_{[A_0}^{\alpha_1} f_{A_1 \dots A_j] \alpha_1 \dots \alpha_{k-j}}); \quad (2.11)$$

而当 $j = k+1, \dots, 2n-2$ 时, 算子 $D_j^{(k)}$ 为

$$(f_{A_1 \dots A_{j+1}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{j-k-1}}) \mapsto (\nabla_{[A_0}^{(\alpha_0} f_{A_1 \dots A_{j+1}] \alpha_1 \dots \alpha_{j-k-1}}); \quad (2.12)$$

算子 $D_k^{(k)} = \Delta$ 为

$$(f_{A_1 \dots A_k}) \mapsto (\nabla_{\alpha[A_{k+1}} \nabla_{A_{k+2}}^{\alpha} f_{A_1 \dots A_k]}), \quad (2.13)$$

其中 $\nabla_{\alpha A} := \nabla_{A\alpha}$, 括号 $[\dots]$ 意味着对应指标的反对称化, 而括号 $(\dots)$ 意味着对应指标的对称化.

对于 $\mathbb{R}^{4n}$ 中的区域 Ω , 我们有 k -Cauchy-Fueter 复形:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow C^\infty(\Omega, \odot^k \mathbb{C}^2) \xrightarrow{D_0^{(k)}} C^\infty(\Omega, \odot^{k-1} \mathbb{C}^2 \otimes \Lambda^1 \mathbb{C}^{2n}) \xrightarrow{D_1^{(k)}} \dots \xrightarrow{D_{k-1}^{(k)}} C^\infty(\Omega, \Lambda^k \mathbb{C}^{2n}) \\ \xrightarrow{D_k^{(k)}} C^\infty(\Omega, \Lambda^{k+2} \mathbb{C}^{2n}) \xrightarrow{D_{k+1}^{(k)}} \dots \xrightarrow{D_{2n-2}^{(k)}} C^\infty(\Omega, \odot^{2n-k-2} \mathbb{C}^2 \otimes \Lambda^{2n} \mathbb{C}^{2n}) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

这是一个椭圆复形 (参见文献 [18, 性质 4.1]). 当 Ω 是凸区域时, 由 Ehrenpreis-Malgrange-Palamodov 的一个定理知, 序列 (2.14) 除了第一项以外是正合的 (参见文献 [18, 推论 4.1]).

记

$$r_{k;j} := \begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} \odot^{k-j} \mathbb{C}^2 \otimes \Lambda^j \mathbb{C}^{2n}, & j = 0, \dots, k, \\ \dim_{\mathbb{C}} \odot^{j-k-1} \mathbb{C}^2 \otimes \Lambda^{j+1} \mathbb{C}^{2n}, & j = k+1, \dots, 2n-1. \end{cases}$$

定理 2.2 [18, 定理 5.3] 设 $f \in L^2(\mathbb{R}^{4n}, \mathbb{C}^{r_{k+1}})$ 在分布意义下满足相容性条件 $D_1^{(k)} f = 0$, 则非齐次 k -Cauchy-Fueter 方程组 $D_0^{(k)} u = f$ 存在解 $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^{4n}, \mathbb{C}^{k+1})$ (如果 $k = 0$, $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^{4n}, \mathbb{C})$). 进一步, 若 $f \in C_0(\mathbb{R}^{4n}, \mathbb{C}^{r_{k+1}})$, 则方程组存在紧支集解 $u \in C_0(\mathbb{R}^{4n}, \mathbb{C}^{k+1}) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}^{4n}, \mathbb{C}^{k+1})$ (如果 $k = 0$, $u \in C_0(\mathbb{R}^{4n}, \mathbb{C}) \cap W^{2,2}(\mathbb{R}^{4n}, \mathbb{C})$), 且 f 在 $\mathbb{R}^{4n} \setminus \text{supp} f$ 的无界连通分支上恒为零.

非齐次 Cauchy-Fueter 方程组的紧支集解导致了如下 k -正则函数的 Hartogs 扩张现象.

定理 2.3 [18, 定理 1.2] 设 Ω 是 $\mathbb{R}^{4n}$ 的一个开子集, $n > 1$, 而 K 是 Ω 的一个紧子集使得 $\Omega \setminus K$ 是连通的, 则对于任意的 $\Omega \setminus K$ 上的 k -正则函数 u , 我们可以找到 Ω 上的 k -正则函数 U 使得在 $\Omega \setminus K$ 上 $U = u$.

通常的函数论讨论被一个一阶矩阵微分算子零化的函数. 而 0-正则函数被一个二阶矩阵微分算子零化, 且具有以上非平凡的函数论性质. 这是一种新的现象.

我们还得到了相应的 Bochner-Martinelli 积分表示公式.

定理 2.4 [18, 定理 5.2] 设 Ω 是 $\mathbb{R}^{4n}$ 中具有 C^2 光滑边界的区域, $\nu(x)$ 是曲面 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, dS 是曲面的面积元.

(1) 设 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$ 是属于 Sobolev 空间 $W^{1,2}(U)$ 的连续函数, 其中 U 是满足 $\bar{\Omega} \subset U \subset \mathbb{R}^{4n}$ 的区域, 则存在在 Ω 外光滑的 $1 - 4n$ 次齐次 $(r_{k;0} \times r_{k;1})$ -矩阵值函数 $H(\cdot)$ 使得公式

$$f(x) = \int_{\partial\Omega} H(x-x') P_0^{(k)}(\nu) f(x') dS(x') - \int_{\Omega} H(x-x') D_0^{(k)} f(x') dV(x') \quad (2.15)$$

对所有这样的 f 成立, 其中 $P_0^{(k)}(\nu)$ 是 k -Cauchy-Fueter 算子 $D_0^{(k)}$ 的象征在 ν 的值, f 是 $\mathbb{C}^{k+1}$ -值函数, $D_0^{(k)} f$ 是 $\mathbb{C}^{r_{k;1}}$ 值函数.

(2) $k = 0$. 设 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 及其一阶偏导数是属于 Sobolev 空间 $W^{2,2}(U)$ 的连续函数, 则存在在 Ω 外光滑的 $2 - 4n$ 次齐次 $(1 \times r_{0;1})$ -矩阵值函数 $H_1(\cdot)$ 和在 Ω 外光滑的 $1 - 4n$ 次齐次标量函数 $H_2(\cdot)$ 使得公式

$$\begin{aligned} f(x) = & \int_{\partial\Omega} H_2(x-x') f(x') dS(x') + \int_{\partial\Omega} H_1(x-x') \tilde{P}_0 f(x') dS(x') \\ & - \int_{\Omega} H_1(x-x') D_0^{(0)} f(x') dV(x') \end{aligned} \quad (2.16)$$

对所有这样的 f 成立, 其中 $\tilde{P}_0 f$ 是 $\wedge^2 \mathbb{C}^{2n}$ -值函数

$$(\tilde{P}_0 f)_{BC} = 2(\nu_{C1} \nabla_{B0} f - \nu_{C0} \nabla_{B1} f), \quad (2.17)$$

而 $\nu_{C\alpha}$ 是 ν 在 (2.2) 中嵌入 τ 下的像.

这里的积分核是通过 Fourier 变换得到的, 只知道是一个齐次函数, 并不知道具体的表达式. Ren 和 Wang [23] 利用 Clifford 分析中处理非交换算子的技巧, 找到了 k -Cauchy-Fueter 算子的 Bochner-Martinelli 核的精确表达式.

定理 2.5 [23, 定理 4.2] 当 $k = 1, 2, \dots$ 时, k -Cauchy-Fueter 算子的 Bochner-Martinelli 核有精确表达式:

$$\frac{\mathcal{Y}}{\omega_{4n}|y|^{4n}} d\Sigma_y,$$

其中 $((k+1) \times 2nk)$ -矩阵 $\mathcal{Y}$ 和 $(2nk \times (k+1))$ -矩阵值面积元 $d\Sigma_y$ 的具体形式参见文献 [23].

他们的方法不能直接推广到 0-Cauchy-Fueter 算子, 因为这是一个二阶矩阵微分算子. 他们还研究了多个 Clifford 变量的理论 [24].

在多维四元数空间上也可以定义多次调和函数的概念 [25], 即在每条右四元数线上次调和的上半连续函数. 我们将多次调和 (plurisubharmonic) 函数的全体记为 PSH. 我们有了四元多次调和函数的概念, 就可以定义四元 (强) 拟凸域和 Levi 型等 [26]. 类似于多复变函数论, Hartogs 现象导致了 k -

正则域的概念. 与多复变函数论中 Cauchy-Riemann 算子相对应, 一个重要的问题是 k -Cauchy-Fueter 方程可解的域是否一定是 k -正则域? 在什么样的区域上 k -Cauchy-Fueter-Neumann 问题可解? 有 k -Cauchy-Fueter 算子的 L^2 估计吗?

在一维四元空间中的光滑有界域上, k -Cauchy-Fueter-Neumann 问题是正则的椭圆边值问题, 因此是可解的^[27].

3 k -正则函数

3.1 Penrose 积分变换和 k -正则函数的级数展开

我们用 $[z_0, \dots, z_{2n+1}]$ 表示复射影空间 $\mathbb{CP}_{2n+1}$ 点的齐次坐标. 记

$$\begin{aligned}\pi_\alpha &= (\pi_0, \pi_1) := (z_0, z_1), \\ \omega^A &= (\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{2n-1}) := (z_2, z_3, \dots, z_{2n+1}).\end{aligned}$$

与 $\mathbb{C}^{2n \times 2}$ 对应的 twistor 空间是

$$\mathbb{P}^I := \mathbb{CP}_{2n+1} - I,$$

其中 $I := \{[\pi_\alpha, \omega^A] \in \mathbb{CP}_{2n+1}; \pi_0 = 0, \pi_1 = 0\}$. $\mathbb{P}^I$ 有以下仿射 (Stein) 覆盖:

$$\mathcal{U} := \{\mathbb{P}_0^I, \mathbb{P}_1^I\},$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0^I &:= \{[\pi_\alpha, \omega^A] \in \mathbb{CP}_{2n+1}; \pi_0 \neq 0\}, \\ \mathbb{P}_1^I &:= \{[\pi_\alpha, \omega^A] \in \mathbb{CP}_{2n+1}; \pi_1 \neq 0\}.\end{aligned}$$

这是一个仿射覆盖, 因为 $\mathbb{P}_0^I$ 和 $\mathbb{P}_1^I$ 双全纯等价于 $\mathbb{C}^{2n+1}$, 而且 $\mathbb{P}_0^I \cap \mathbb{P}_1^I \cong \mathbb{C}^1 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^{2n}$. 我们将 $\mathbb{P}^I$ 上 m 次齐次全纯函数芽层记为 $\mathcal{O}(m)$. 我们有 Penrose 对应:

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(-k-2)) \rightarrow \{\phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{4n}, \mathbb{C}^{k+1}); D_0^{(k)} \phi = 0\}, \quad (3.1)$$

即线丛 $\mathcal{O}(-k-2)$ 的第一 Čech 上同调类一一对应于全纯 k -Cauchy-Fueter 方程组的解^[18].

对于 $\mathbb{P}^I$ 的开子集 U , $\mathcal{O}(m)(U)$ 是 U 上 m 次齐次全纯函数空间. 由 Laurent 展开式, 我们知道 $\mathcal{O}(-k-2)(\mathbb{P}_0^I \cap \mathbb{P}_1^I)$ 的元素有以下表达式:

$$\frac{h^j(\omega^0/\pi_0, \dots, \omega^{2n-1}/\pi_0)}{\pi_0^{k+2-j} \pi_1^j},$$

其中 h^j 关于 ω^A/π_0 全纯, $A = 0, 1, \dots, 2n-1$, $j \in \mathbb{Z}$. 我们有 Penrose 积分变换公式^[28]

$$\begin{aligned}\mathcal{P} : \mathcal{O}(-k-2)(\mathbb{P}_0^I \cap \mathbb{P}_1^I) &\rightarrow C^\infty(\mathbb{C}^{4n}, \odot^k \mathbb{C}^2), \\ f &\mapsto \mathcal{P}f,\end{aligned}$$

这里

$$(\mathcal{P}f)_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}(z) := \oint_{\Gamma} \pi_{\alpha_1} \dots \pi_{\alpha_k} f(\pi_\alpha, \omega^A) \cdot (\pi_0 d\pi_1 - \pi_1 d\pi_0), \quad z = (z^{A\alpha}) \in \mathbb{C}^{4n}. \quad (3.2)$$

这里对于固定的 $z = (z^{A\alpha})$, Γ 是复曲线 $\{(\omega^A, \pi_\alpha); \omega^A = z^{A\alpha} \pi_\alpha\}$ 中围绕被积函数奇点的光滑闭曲线. 积分与 Γ 的具体选取无关.

Penrose 对应 (3.1) 可以由推广的 Penrose 积分变换公式实现.

定理 3.1 [28, 定理 1.1] (1) 若 $f \in \mathcal{O}(-k-2)(\mathbb{P}_0^I \cap \mathbb{P}_1^I)$, 由 $\phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} = (\mathcal{P}f)_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}$ 定义的 $\mathbb{C}^{k+1}$ -值全纯函数 ϕ 满足 $\mathbb{C}^{4n}$ 上全纯 k -Cauchy-Fueter 方程

$$\nabla_A^{\alpha_1} \phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} = 0, \quad (3.3)$$

$A = 0, 1, \dots, 2n-1$, $\alpha_2 \dots \alpha_k = 0, 1$. 积分只依赖于 f 在 Cech 上同调群 $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(-k-2))$ 中的等价类.

反之, 对于任何满足全纯 k -Cauchy-Fueter 方程 (3.3) 的全纯解 ϕ , 存在 $\mathcal{O}(-k-2)(\mathbb{P}_0^I \cap \mathbb{P}_1^I)$ 中元素 f 使得 $\phi = \mathcal{P}f$.

(2) $\mathbb{C}^{k+1}$ -值全纯函数 $\phi = (\phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k})$ 是全纯 k -Cauchy-Fueter 方程 (3.3) 的全纯解当且仅当存在复数 $C_{\mathbf{m}}^j$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{2n}$, 使得

$$\phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}(z) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{2n}} \sum_{j=1}^{|\mathbf{m}|+a+1} C_{\mathbf{m}}^j P_{a,j}^{\mathbf{m}}(z), \quad z = (z^{A\alpha}) \in \mathbb{C}^{4n}, \quad (3.4)$$

级数在 $\mathbb{C}^{4n}$ 的任何紧子集上一致收敛, 其中 $a = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$,

$$P_{a,j}^{\mathbf{m}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|r|=1} r^{a-j} \prod_{A=0}^{2n-1} (z^{A0} + z^{A1} r)^{m_A} dr \quad (3.5)$$

是 $\mathbb{C}^{4n}$ 上 k -全纯正则多项式, 这个多项式是 $|\mathbf{m}| = m_0 + \dots + m_{2n-1}$ 次齐次的.

多项式 $P_{a,j}^{\mathbf{m}}$ 的精确形式参见文献 [28].

由此定理和 (2.1) 中的嵌入 τ , 我们得到了 $\mathbb{R}^{4n}$ 所有的 k -正则函数.

定理 3.2 [28, 定理 1.2] $\mathbb{C}^{k+1}$ -值函数 $\phi = (\phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k})$ 是 k -正则的当且仅当存在复数 $C_{\mathbf{m}}^j$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{2n}$, 使得

$$\phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{2n}} \sum_{j=1}^{|\mathbf{m}|+a+1} C_{\mathbf{m}}^j P_{a,j}^{\mathbf{m}}(\tau(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4n}, \quad (3.6)$$

级数在 $\mathbb{R}^{4n}$ 的任何紧子集上一致收敛.

由于复流形上 Cech 上同调与 Dolbeault 上同调是同构的, Penrose 对应 (3.1) 能由另外一种积分公式实现 [29].

3.2 Cauchy-Szegö 核

最简单的四元强拟凸域是四元 Siegel 上半空间

$$\mathcal{U}_n := \{q = (q_1, \dots, q_n) = (q_1, q') \in \mathbb{H}^n | \operatorname{Re} q_1 > |q'|^2\},$$

其中 $q' = (q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{H}^{n-1}$. 它的边界 $\partial \mathcal{U}_n$ 是由

$$\operatorname{Re} q_1 = |q'|^2$$

定义的二次超曲面. 由四元 Cayley 变换^[30], 它同构于 $\mathbb{H}^n$ 中的单位球. 四元 Heisenberg 群是空间 $\mathbb{R}^{4n-1} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{4(n-1)}$, 并赋予乘法

$$p \cdot q = (w, p') \cdot (v, q') = (w + v + 2\text{Im}\langle p', q' \rangle, p' + q'),$$

其中 $p = (w, p'), q = (v, q') \in \text{Im}\mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n-1}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 $\mathbb{H}^{n-1}$ 上内积.

投影

$$\begin{aligned} \pi: \partial\mathcal{U}_n &\rightarrow \text{Im}\mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n-1}, \\ (|q'|^2 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k}, q') &\mapsto (x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k}, q'). \end{aligned}$$

将四元 Siegel 上半空间的边界与四元 Heisenberg 群等同. 令 $d\beta(\cdot)$ 为四元 Heisenberg 群上 Haar 测度用以上投影拉回到 $\partial\mathcal{U}_n$ 上的测度.

对于任何函数 $F: \mathcal{U}_n \rightarrow \mathbb{H}$, 我们把 F 的“垂直平移”记为 F_ε . 这里垂直方向是 $\text{Re}q_1$ 的正向: $F_\varepsilon(q) = F(q + \varepsilon\mathbf{e})$, 其中 $\mathbf{e} = (1, 0, 0, \dots, 0)$. 若 $\varepsilon > 0$, F_ε 在 $\partial\mathcal{U}_n$ 上有定义. 四元 Hardy 空间 $H^2(\mathcal{U}_n)$ 由 $\mathcal{U}_n$ 上满足

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{\partial\mathcal{U}_n} |F_\varepsilon(q)|^2 d\beta(q) < \infty \quad (3.7)$$

的左正则函数 F 构成. F 的范数 $\|F\|_{H^2(\mathcal{U}_n)}$ 是 (3.7) 左边的平方根. 一个 $H^2(\mathcal{U}_n)$ 函数 F 一定有边值 F^b , 属于 $L^2(\partial\mathcal{U})$. Chang 等人^[31] 找到了 Cauchy-Szegö 核的表达式.

定理 3.3^[31, 定理 1.1] Cauchy-Szegö 核为

$$S(q, p) = s \left(q_1 + \bar{p}_1 - 2 \sum_{k=2}^n \bar{p}'_k q'_k \right), \quad (3.8)$$

其中 $p = (p_1, p') = (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{U}_n$, $q = (q_1, q') = (q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{U}_n$,

$$s(\sigma) = c_n \frac{\partial^{2n}}{\partial x_1^{2n}} \frac{\bar{\sigma}}{|\sigma|^4}, \quad \sigma = x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k} \in \mathbb{H}, \quad (3.9)$$

这里

$$c_n = \frac{1}{2^{2n+5} \pi^{2n+1} ((2n)!)^2 K(n)} \frac{4n-1}{(n+2)(2n+3)}, \quad (3.10)$$

常数

$$K(n) = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k \sum_{l=0}^k C_k^{2l} \sum_{m=0}^l (-1)^{k+m} C_l^m \sum_{s=0}^{k-2m} \frac{C_{k-2m}^s}{2^{k-2m-s+1}} \frac{(-1)^s (2(k-2m-s+1))!}{(k-2m-s+1)!(4n+5+k-2m-s)!}$$

只依赖维数 n , 且 $\alpha_k = \frac{(2n+1-k)(2n+2-k)(4n+3+k)}{6}$.

Cauchy-Szegö 满足以下再生公式:

$$F(q) = \int_{\partial\mathcal{U}_n} S(q, Q) F^b(Q) d\beta(Q), \quad q \in \mathcal{U}_n, \quad (3.11)$$

其中 $F \in H^2(\mathcal{U}_n)$, F^b 是它在 $\partial\mathcal{U}_n$ 的边值.

k -Cauchy-Fueter 算子是一类非常自然的算子, 是 n 维四元数空间上在群 $\text{Sp}(n, 1)$ 作用下协变的微分算子. 在表示论中, Liu 和 Zhang^[32] 研究了四元双曲空间 ($\mathbb{H}^n$ 中的单位球) 上的 Schmidt 算子

的核空间作为 $\mathrm{Sp}(n, 1)$ 的无穷维表示. 此时, Schmidt 算子即为四元双曲空间上的 k -Cauchy-Fueter 算子, 而其核空间是相应的 k -正则函数空间. 他们还找到了 Bergman 核.

k -Cauchy-Fueter 算子与表示论和物理的另一个联系是 Frenkel 和 Libine^[33] 研究的. 他们研究了一维四元空间 $\mathbb{H}$ 上 $k = 0, 1, 2$ 时的 k -Cauchy-Fueter 算子, 即 Laplace 算子、Cauchy-Fueter 算子和 Maxwell 算子. 他们应用这些算子的基本解研究了这些算子的零空间作为 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{H})$ 的无穷维表示, 及它们张量积的分解. 而到最高不可约分量的投影积分算子的核正好是量子场论中单圈 Feynman 积分. 对一般情形, 他们有个猜想. 当四元数换作分裂四元数时 (参见文献 [34, 35]), 对应的算子变成群 $\mathrm{SU}(2, 2)$ 下的协变的微分算子, 可以被用来研究群 $\mathrm{SU}(2, 2)$ 的表示.

4 四元多重位势论

多四元变量理论的另一个来源是四元 Monge-Ampère 方程

$$\det \left[\frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial \bar{q}_k}(q) \right] = f,$$

其中 $[\frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial \bar{q}_k}(q)]$ 是实函数 u 的四元 Hesse 矩阵, $\det$ 是 Moore 行列式. Alesker^[25, 36] 发展了四元 Monge-Ampère 方程的理论, 证明了相应的 Chern-Levine-Nireberg 估计, 从而对仅仅连续的 PSH 函数 u 都可以定义 $\det[\frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial \bar{q}_k}(q)]$ 为 Monge-Ampère 测度. 四元 Monge-Ampère 方程能应用于凸体的赋值理论^[37]. 另外一个动力来自于四元流形上的 Calabi-Yau 猜想的研究^[38]. 在平坦的 hyperKähler 流形上猜想已被 Alesker^[39] 解决. 这引导人们去发展四元流形上的多重位势理论, 探索流形上四元 Monge-Ampère 方程和闭正流的定义^[40, 41].

为了在一般的四元流形上定义四元 Monge-Ampère 算子, Alesker^[42] 应用复几何中 twistor 变换理论证明了 Baston 算子 Δ 的某个外积是四元 Monge-Ampère 算子. Baston 算子是四元复形的第一个算子. 当空间平坦时, 四元复形即为 k -Cauchy-Fueter 复形, 而 Baston 算子即为 0-Cauchy-Fueter 复形

$$0 \rightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{C}) \xrightarrow{\Delta = D_0^{(0)}} C^\infty(\Omega, \wedge^2 \mathbb{C}^{2n}) \xrightarrow{D_1^{(0)}} C^\infty(\Omega, \mathbb{C}^2 \otimes \wedge^3 \mathbb{C}^{2n}) \rightarrow \dots \quad (4.1)$$

的第一个算子, 即 0-Cauchy-Fueter 算子. Baston 算子 Δ 实际上是 (2.7) 中矩阵算子的 (2×2) -子行列式. 由于已经知道 0-Cauchy-Fueter 算子及其复形的精确表达式, 四元 Monge-Ampère 算子可以写成

$$\Delta_n u = \sum_{i_1, j_1, \dots} \delta_{01 \dots (2n-1)}^{i_1 j_1 \dots i_n j_n} \nabla_{i_1 0} \nabla_{j_1 1} u \dots \nabla_{i_n 0} \nabla_{j_n 1} u, \quad (4.2)$$

其中当 $\{i_1, j_1, \dots, i_n, j_n\} = \{0, 1, \dots, 2n-1\}$ 时,

$$\delta_{01 \dots (2n-1)}^{i_1 j_1 \dots i_n j_n} := (i_1, j_1, \dots, i_n, j_n) \text{ 到 } (0, 1, \dots, 2n-1) \text{ 的置换的符号}, \quad (4.3)$$

而对于其他情形, $\delta_{01 \dots (2n-1)}^{i_1 j_1 \dots i_n j_n} = 0$. 表达式 (4.2) 比通过 Moore 行列式定义的四元 Monge-Ampère 算子方便得多. 我们有以下非凡的恒等式^[19]:

$$\begin{aligned} \Delta_n u &= \sum_{i_1, j_1, \dots} \nabla_{i_1 0} [\delta_{01 \dots (2n-1)}^{i_1 j_1 \dots i_n j_n} \nabla_{j_1 1} u \dots \nabla_{i_n 0} \nabla_{j_n 1} u] \\ &= \sum_{i_1, j_1, \dots} \nabla_{i_1 0} \nabla_{j_1 1} [\delta_{01 \dots (2n-1)}^{i_1 j_1 \dots i_n j_n} u \nabla_{i_2 0} \nabla_{j_2 1} u \dots \nabla_{i_n 0} \nabla_{j_n 1} u]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

这个恒等式非常类似于文献 [43] 中 k -Hesse 算子的恒等式 (2.9). 基于文献 [43] 中恒等式 (2.9), Wan 和 Zhang^[43] 对 k -凸函数和 k -Hesse 算子建立了许多多重位势论的结论. 证明了 (4.4) 之后, 我们认识到许多复多重位势论的结论可以像文献 [43] 中那样推广到四元情形. 稍后, 通过引入四元版本的微分形式, 得到了这些结果的简化版本. 我们定义了类似于复多重位势论中的 ∂ 和 $\bar{\partial}$ 算子的 d_0 和 d_1 算子, 非常简单地证明了四元 Monge-Ampère 方程的 Chern-Levine-Nireberg 估计, 推广了 Bedford-Taylor 理论, 并发展一套闭正流 (closed positive currents) 的理论: 定义了闭正流、闭正流的 Lelong 数, 证明了 Lelong-Jessen 型公式等. Wan 和 Zhang^[44] 将这些结果应用于四元多次调和函数的拟连续性和极大性的研究. 而这些结果用原来通过 Moore 行列式定义的四元 Monge-Ampère 算子是很难证明的.

更一般地, Harvey 和 Lawson 对每种 Calibrated 几何都定义了相应的多次调和函数和正流等 (参见文献 [45–48]). 人们希望对每种 Calibrated 几何发展一套多重位势论, 并应用于几何结构的研究. 但现在只有在实的、复的、四元和八元^[49] 的情形, 我们知道有相应的 Monge-Ampère 算子, 可以得到更为深刻的多重位势论的结论.

4.1 d_0 和 d_1 算子、四元闭正流

令 $\wedge^{2k}\mathbb{C}^{2n}$ 为 $\mathbb{C}^{2n}$ 的复外代数, $0 \leq k \leq n$. 固定 $\mathbb{C}^{2n}$ 的一组基 $\{\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{2n-1}\}$. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^{4n}$ 中的一个区域. 我们定义算子 $d_0, d_1: C_0^\infty(\Omega, \wedge^p \mathbb{C}^{2n}) \rightarrow C_0^\infty(\Omega, \wedge^{p+1} \mathbb{C}^{2n})$:

$$\begin{aligned} d_0 F &:= \sum_{k,I} \nabla_{k0} f_I \omega^k \wedge \omega^I, \\ d_1 F &:= \sum_{k,I} \nabla_{k1} f_I \omega^k \wedge \omega^I, \\ \Delta F &:= d_0 d_1 F, \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中 $F = \sum_I f_I \omega^I \in C_0^\infty(\Omega, \wedge^p \mathbb{C}^{2n})$, $I = (i_1, \dots, i_p)$ 是多重指标, $\omega^I := \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p}$, d_0 和 d_1 的定义依赖于坐标 $\{x_j\}$ 及基 $\{\omega^j\}$ 的选取. 由定理 2.1, 我们知道 0-Cauchy-Fueter 复形 (4.1) 的第二个算子 $D_1^{(0)}$ 可以写作

$$D_1^{(0)} F := \begin{pmatrix} d_0 F \\ d_1 F \end{pmatrix},$$

其中 $F \in C_0^\infty(\Omega, \wedge^2 \mathbb{C}^{2n})$. 虽然算子 d_0 和 d_1 不是外微分, 但它们非常类似于外微分.

性质 4.1 ^[19, 性质 2.2] (1) $d_0 d_1 = -d_1 d_0$;

(2) $d_0^2 = d_1^2 = 0$;

(2) 对于 $F \in C_0^\infty(\Omega, \wedge^p \mathbb{C}^{2n})$, $G \in C_0^\infty(\Omega, \wedge^q \mathbb{C}^{2n})$, 我们有

$$d_\alpha(F \wedge G) = d_\alpha F \wedge G + (-1)^p F \wedge d_\alpha G, \quad \alpha = 0, 1. \quad (4.6)$$

从性质 4.1 立刻可以推出

$$d_0 \Delta = d_1 \Delta = 0. \quad (4.7)$$

(4.1) 是一个复形, 因为 $D_1^{(0)} \Delta = 0$.

我们称形式 F 是闭的, 如果

$$d_0 F = d_1 F = 0, \quad \text{即 } D_1^{(0)} F = 0. \quad (4.8)$$

如果 $u_1, \dots, u_n \in C^2$, 我们可以证明 $\Delta u_1 \wedge \dots \wedge \Delta u_k$ ($k = 1, \dots, n$) 是闭的. 进一步, 从 (4.6) 和 (4.7) 可以直接得到 $\Delta u_1 \wedge \dots \wedge \Delta u_n$ 满足以下恒等式:

$$\begin{aligned}\Delta u_1 \wedge \Delta u_2 \wedge \dots \wedge \Delta u_n &= d_0(d_1 u_1 \wedge \Delta u_2 \wedge \dots \wedge \Delta u_n) \\ &= d_0 d_1(u_1 \Delta u_2 \wedge \dots \wedge \Delta u_n) = \Delta(u_1 \Delta u_2 \wedge \dots \wedge \Delta u_n).\end{aligned}\quad (4.9)$$

这等价于恒等式 (4.4), 是 Alesker 的等式^[42] (即上式得左边等于右边) 的改进版本.

类似于 Alesker^[42], 我们将 $\wedge^{2k} \mathbb{C}^{2n}$ 所有实元素的子空间记为 $\wedge_{\mathbb{R}}^{2k} \mathbb{C}^{2n}$. 它们是多复变函数论中 (k, k) - 形式的四元对应物. 在空间 $\wedge_{\mathbb{R}}^{2k} \mathbb{C}^{2n}$ 中, 我们定义 $\wedge_{\mathbb{R}+}^{2k} \mathbb{C}^{2n}$ 和 $\mathrm{SP}^{2k} \mathbb{C}^{2n}$ 分别是由正元素或强正元素构成的凸锥. 我们将 $\wedge^{2k} \mathbb{C}^{2n}$ - 值 $C_0^\infty(\Omega)$ 函数的全体记为 $\mathcal{D}^{2k}(\Omega)$. $\mathcal{D}^{2k}(\Omega)$ 中的元素称作测试 $2k$ - 形式. $\eta \in \mathcal{D}^{2k}(\Omega)$ 称作正形式 (或强正形式), 如果对任意的 $q \in \Omega$, $\eta(q)$ 是正元素 (或强正元素). 在平坦空间上, 这种形式正是 Alesker^[42] 引入的某个线丛的截面. 但我们的闭形式的定义是新的.

性质 4.2^[19, 推论 1.2] 如果 $u \in \mathrm{PSH} \cap C^2(\Omega)$, 则 Δu 是闭的强正 2 - 形式.

对偶空间 $(\mathcal{D}^{2n-p}(\Omega))'$ 的元素称作一个 p - 流 (p -current). 一个 $2k$ - 流 T 称作正的, 如果对于任何的强正形式 $\eta \in \mathcal{D}^{2n-2k}(\Omega)$ 都有 $T(\eta) \geq 0$. 虽然 $2n$ - 形式不是真正的微分形式且不能积分, 但可以定义

$$\int_{\Omega} F := \int_{\Omega} f dV,$$

如果 $F = f \Omega_{2n} \in L^1(\Omega, \wedge^{2n} \mathbb{C}^{2n})$, 其中 dV 是 Lesbesgue 测度,

$$\Omega_{2n} := \omega^0 \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{2n-2} \wedge \omega^{2n-1}.$$

对于系数为测度 μ 的 $2n$ - 流 $F = \mu \Omega_{2n}$, 我们定义

$$\int_{\Omega} F := \int_{\Omega} \mu.$$

对于一个 p - 流 F , 我们用如下等式定义 $(p+1)$ - 流 $d_{\alpha} F$:

$$(d_{\alpha} F)(\eta) := -F(d_{\alpha} \eta), \quad \alpha = 0, 1$$

对于任意的测试 $(2n-p-1)$ - 形式 η 成立. 我们称流 F 是闭的, 如果

$$d_0 F = d_1 F = 0, \quad \text{即 } D_1^{(0)} F = 0.$$

对任意的 $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, Δu 闭正 2 - 流.

Alesker^[42], Harvey 和 Lawson^[46] 研究了正流, 而 Alesker 和 Verbitsky^[40] 用普通的外微分讨论了闭流. 我们定义的闭流与正性很好地组合在一起, 使得多复变函数论中闭正流的许多结论可以扩展到四元情形. 类似于复的情形, 一般我们不能定义两个流的外积. 但我们能将复多重位势论中的 Bedford-Taylor 理论^[50] 推广到四元情形.

若 u 是一个局部有界的 PSH 函数, T 是一个闭正 $2k$ - 流. 定义

$$\Delta u \wedge T := \Delta(uT),$$

即 $(\Delta u \wedge T)(\eta) := uT(\Delta \eta)$ 对于任意的测试 $(n-2k-2)$ - 形式 η 成立. 可以证明 $\Delta u \wedge T$ 是一个闭正 $(2k+2)$ - 流. 当 $u_1, \dots, u_p \in \mathrm{PSH} \cap L_{\mathrm{loc}}^\infty(\Omega)$, 归纳地定义

$$\Delta u_1 \wedge \dots \wedge \Delta u_p := \Delta(u_1 \Delta u_2 \wedge \dots \wedge \Delta u_p).$$

这是一个闭正 $2p$ -流.

定理 4.3 [19, 定理 3.1] 令 $v^1, \dots, v^k \in \text{PSH} \cap L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$. 假设 $\{v_j^1\}_{j \in \mathbb{N}}, \dots, \{v_j^k\}_{j \in \mathbb{N}}$ 是 Ω 上单调递减的 PSH 函数列, 且对每个 t 逐点地有 $\lim_{j \rightarrow \infty} v_j^t = v^t$. 那么, 当 $j \rightarrow \infty$, 闭正流 $\Delta v_j^1 \wedge \dots \wedge \Delta v_j^k$ 弱收敛到 $\Delta v^1 \wedge \dots \wedge \Delta v^k$.

4.2 Lelong 数和 Lelong-Jensen 型公式

令

$$\beta_n := \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{2l} \wedge \omega^{2l+1} \in \wedge_{\mathbb{R}^+}^2 \mathbb{C}^{2n}.$$

β_n 起到复分析中标准 Kähler 形式的作用. 对于一个闭正 $(2n-2p)$ -流 T , $T \wedge \beta_n^p$ 为一个闭正 $2n$ -流. 对于小的正实数 r , 定义

$$\sigma_T(a, r) := \int_{B(a, r)} T \wedge \beta_n^p. \quad (4.10)$$

性质 4.4 [19, 性质 4.2] 设 Ω 是一个区域, $a \in \Omega$, $B(a, R) \Subset \Omega$, 而 T 是一个闭正 $(2n-2p)$ -流, 那么, 对于 $0 < r_1 < r_2 < R$,

$$\int_{B(a, r_2) \setminus \overline{B(a, r_1)}} T \wedge \left(\Delta \left(-\frac{1}{\|q\|^2} \right) \right)^p = \frac{\sigma_T(a, r_2)}{r_2^{4p}} - \frac{\sigma_T(a, r_1)}{r_1^{4p}}. \quad (4.11)$$

这样 $\frac{\sigma_T(a, r)}{r^{4p}}$ 是 r 的增函数, 其极限

$$\nu_a(T) := \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{\sigma_T(a, r)}{r^{4p}} \quad (4.12)$$

存在且是非负的. 这个数称作闭正流 T 在 a 点的 Lelong 数.

我们知道 $-\frac{1}{\|q\|^2}$ 是 $\mathbb{R}^{4n}$ 上 PSH 函数 (参见文献 [19, 性质 4.1]). 从而, $\Delta(-\frac{1}{\|q\|^2})$ 是闭的强正 2-形式.

设 Ω 是四元拟凸域, 即 Ω 存在严格 PSH 穷竭函数. 设 φ 是 Ω 上连续的 PSH 函数. 令

$$B_\varphi(r) := \{q \in \Omega; \varphi(q) < r\}, \quad S_\varphi(r) := \{q \in \Omega; \varphi(q) = r\}.$$

φ 的四元边界测度 (quaternionic boundary measure) 是定义在边界上的非负的 Borel 测度

$$\mu_{\varphi, r} := \Delta_n(\varphi_r) - \chi_{\Omega \setminus B_\varphi(r)} \Delta_n \varphi, \quad (4.13)$$

其中 $\varphi_r := \max\{\varphi, r\}$, $\Delta_n \varphi$ 是闭正 $2n$ -流 $(\Delta \varphi)^n$ 的系数测度, 即

$$(\Delta \varphi)^n = \Delta_n \varphi \Omega_{2n}.$$

边界测度 $\mu_{\varphi, r}$ 的支集包含在边界 $S_\varphi(r)$ 中. 我们证明了 Lelong-Jensen 型公式 (参见文献 [19, 定理 5.1]): 局部有界的 PSH 函数 V 满足

$$\mu_{\varphi, r}(V) - \int_{B_\varphi(r)} V(\Delta \varphi)^n = \int_{-\infty}^r dt \int_{B_\varphi(t)} \Delta V \wedge (\Delta \varphi)^{n-1}.$$

在复分析中, 边界测度和这种形式的 Lelong-Jensen 型公式是由 Demailly [51–53] 给出的. 对于 k -凸函数和 k -Hesse 算子, 对应的 Lelong 数和 Lelong-Jensen 型公式参见文献 [43].

5 切向 k -Cauchy-Fueter 算子

在多复变函数论中, 在光滑拟凸域上解非齐次 $\bar{\partial}$ 方程的一个方法是解边界上的 $\bar{\partial}_b$ 方程. 边界上存在自然的 $\bar{\partial}_b$ -复形. 这导致我们考虑切向 k -Cauchy-Fueter 算子和切向 k -Cauchy-Fueter 复形.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^{4n}$ 的一个光滑区域, ρ 是 Ω 的定义函数. 我们称向量场 $\bar{Z} = \sum_{l=0}^{n-1} a_l \bar{\partial}_{q_l}$ 是边界 $\partial\Omega$ 上的四元切向量场, 如果 $\bar{Z}\rho \equiv 0$. 假设 $\partial_{q_{n-1}}\rho \neq 0$ 局部地成立, 那么,

$$\bar{Z}_l = \bar{\partial}_{q_l} - \bar{\partial}_{q_l}\rho(\bar{\partial}_{q_{n-1}}\rho)^{-1}\bar{\partial}_{q_{n-1}}, \quad l = 0, \dots, n-2$$

是四元切向量场. 切向 Cauchy-Fueter 算子局部地定义为 $f \mapsto (\bar{Z}_0 f, \dots, \bar{Z}_{n-2} f)^T$. 边界 $\partial\Omega$ 上 $\mathbb{H}$ -值分布称作 CF (Cauchy-Fueter) 的, 如果对每个四元切向量场 $\bar{Z}$, $\bar{Z}f = 0$ 在分布意义下成立. 在边界 $\partial\Omega$ 附近有定义的左正则函数在边界上的限制一定是 CF 的. 所以, CF 函数是非常丰富的. CF 函数在研究四元 Heisenberg 群上最佳 Sobolev 常数和四元切触 Yamabe 问题^[30] 中有重要应用.

5.1 四元 Heisenberg 群上的切向 k -Cauchy-Fueter 复形

考虑更一般的四元 Siegel 上半空间的边界

$$\mathcal{S}_\kappa = \left\{ q = (q_0, \dots, q_n) \in \mathbb{H}^{n+1}; \operatorname{Re} q_n - \sum_{l=0}^{n-1} \kappa_l |q_l|^2 = 0 \right\},$$

其中 $\kappa_l = \pm 1$. $\mathcal{S}_\kappa$ 可等同于一一般的四元 Heisenberg 群 $\mathcal{H}_\kappa = \mathbb{R}^{4n} \times \mathbb{R}^3$, 其乘法由下式给出:

$$(x, t) \cdot (y, s) = \left(x + y, t_\beta + s_\beta + 2 \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i,j=1}^4 \kappa_l b_{ij}^\beta x_{4l+i} y_{4l+j} \right), \quad (5.1)$$

其中 $\beta = 1, 2, 3$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_{4n}) \in \mathbb{R}^{4n}$, $t = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$, y 和 s 类似定义. b^1, b^2 和 b^3 分别是如下反对称矩:

$$b^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

满足四元交换关系:

$$(b^1)^2 = (b^2)^2 = (b^3)^2 = -\operatorname{id}, \quad b^1 b^2 = b^3.$$

群 $\mathcal{H}_\kappa$ 上的向量场

$$X_{4l+j} = \partial_{x_{4l+j}} + 2\kappa_l \sum_{\beta=1}^3 \sum_{i=1}^4 b_{ij}^\beta x_{4l+i} \partial_{t_\beta}, \quad l = 0, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, 4$$

是左不变的, 满足交换关系:

$$[X_{4l+i}, X_{4l'+j}] = 4\kappa_l \delta_{ll'} \sum_{\beta=1}^3 b_{ij}^\beta \partial_{t_\beta}.$$

切向 Cauchy-Fueter 算子 $Q : C^1(\mathcal{H}_\kappa, \mathbb{H}) \rightarrow C(\mathcal{H}_\kappa, \mathbb{H}^n)$ 为 $Qf = (Q_0f, \dots, Q_{n-1}f)^T$, 其中

$$Q_l = X_{4l+1} + iX_{4l+2} + jX_{4l+3} + kX_{4l+4},$$

$l = 0, \dots, n-1$. 更一般地, 令

$$\begin{pmatrix} \widehat{\nabla}_{(2l)0} & \widehat{\nabla}_{(2l)1} \\ \widehat{\nabla}_{(2l+1)0} & \widehat{\nabla}_{(2l+1)1} \end{pmatrix} := \kappa_l \begin{pmatrix} X_{4l+1} + iX_{4l+2} & -X_{4l+3} - iX_{4l+4} \\ X_{4l+3} - iX_{4l+4} & X_{4l+1} - iX_{4l+2} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

切向 k -Cauchy-Fueter 算子定义为

$$\begin{aligned} Q_0^{(k)} : C^\infty(\mathbb{R}^{4n+3}, \odot^k \mathbb{C}^2) &\rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{4n+3}, \odot^{k-1} \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2n}), \\ \phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} &\mapsto \widehat{\nabla}_A^{\alpha_1} \phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

这个定义将 k -Cauchy-Fueter 算子定义中的关于坐标的偏导数换成群 $\mathcal{H}_\kappa$ 上的左不变向量场.

利用广义的 twistor 变换, 我们构造了四元 Heisenberg 群上的切向 k -Cauchy-Fueter 复形.

定理 5.1 [54, 定理 1.0.1] 设 $V^{(j)}$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ 的最高权为第 j 个基本权的不可约表示. 如果 $0 \leq k \leq n-2$, 序列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{R}(\mathbb{R}^{4n+3}, \odot^k \mathbb{C}^2) &\xrightarrow{Q_0^{(k)}} \mathcal{R}(\mathbb{R}^{4n+3}, \odot^{k-1} \mathbb{C}^2 \otimes V^{(1)}) \xrightarrow{Q_1^{(k)}} \dots \rightarrow \mathcal{R}(\mathbb{R}^{4n+3}, V^{(k)}) \\ &\xrightarrow{Q_k^{(k)}} \mathcal{R}(\mathbb{R}^{4n+3}, V^{(k+2)}) \xrightarrow{Q_{k+1}^{(k)}} \dots \rightarrow \mathcal{R}(\mathbb{R}^{4n+3}, \odot^{n-k-2} \mathbb{C}^2 \otimes V^{(n)}) \\ &\xrightarrow{Q_{n-1}^{(k)}} \mathcal{R}(\mathbb{R}^{4n+3}, \odot^{n-k} \mathbb{C}^2 \otimes V^{(n)}) \xrightarrow{Q_n^{(k)}} \dots \xrightarrow{Q_{2n-1}^{(k)}} \mathcal{R}(\mathbb{R}^{4n+3}, \odot^{2n-k} \mathbb{C}^2) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

除了第一项以外是正合的, 其中 $\mathcal{R}(\mathbb{R}^{4n+3}, \odot^s \mathbb{C}^2 \otimes V^{(t)})$ 是 $\mathbb{R}^{4n+3}$ 上 $\odot^s \mathbb{C}^2 \otimes V^{(t)}$ -值多项式构成的环. 算子 $Q_j^{(k)}$ 的精确定义参见文献 [54].

广义的 twistor 变换还可以用来构造单 Lie 群 $G_{2(2)}$ 作用下协变的微分算子 [55].

5.2 二次超曲面上的切向 k -Cauchy-Fueter 算子

二次超曲面是一般的超曲面的模型. 我们考虑 $\mathbb{H}^2$ 中一般的二次超曲面 $\mathcal{S} = \{q \in \mathbb{H}^2; \rho(q) = 0\}$, 其中

$$\rho = \text{Re} q_2 - \phi(q_1), \quad \phi(q_1) = \sum_{1 \leq j \leq k \leq 4} s_{jk} x_j x_k.$$

这个二次超曲面等价于二步幂零 Lie 群 $\mathcal{N}_S = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3$, 其乘法由下式给出:

$$(y, s) \cdot (y', s') = \left(y + y', s_\beta + s'_\beta + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^4 B_{jk}^\beta y_j y'_k, \right), \quad (5.6)$$

其中 $\beta = 1, 2, 3$, $y, y' \in \mathbb{R}^4$, $s, s' \in \mathbb{R}^3$,

$$B^\beta = b^\beta S + S b^\beta \quad (5.7)$$

是反对称的矩阵, b^β 由 (5.2) 给出, 而 $S = (s_{jk})$ 是对称矩阵. 群 $\mathcal{N}_S$ 上的向量场

$$Y_j := \partial_{y_j} + \sum_{\beta=1}^3 \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2} B_{kj}^\beta y_k \partial_{s_\beta}$$

是左不变的. 切向 k -Cauchy-Fueter 算子定义为

$$Q := Y_1 + iY_2 + jY_3 + kY_4,$$

这里考虑 $\mathbb{H}^2$ 的原因是, 此时切向 k -Cauchy-Fueter 算子是标量算子. 切向 Laplace 算子定义为

$$\square_b = Q^*Q, \quad (5.8)$$

其中 Q^* 是 Q 的形式共轭.

对于 $\lambda \in \mathbb{R}^3$, 定义反对称矩阵

$$B^\lambda = \sum_{\beta=1}^3 \lambda_\beta B^\beta.$$

$|B^\lambda| := [(B^\lambda)^T B^\lambda]^{\frac{1}{2}}$ 是对称矩阵. 我们称二次超曲面 $\mathcal{S}$ 非退化的, 如果对于任意的 $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}^3$, B^λ 是非退化的. 定义 $\mathbb{R}^3$ 上二次多项式 $\Delta(\lambda) := -B_{12}^\lambda B_{34}^\lambda + B_{13}^\lambda B_{24}^\lambda - B_{14}^\lambda B_{23}^\lambda$. 这是刻画 $\mathcal{N}_S$ 上四元结构的重要多项式.

令 J^1, J^2 和 J^3 是表示左乘 i, j 和 k 的 (4×4) - 矩阵. 定义其线性组合

$$J^\lambda = \sum_{\beta=1}^3 \lambda_\beta J^\beta, \quad \lambda \in \mathbb{R}^3.$$

令 P_-^λ 和 P_+^λ 分别是到 iJ^λ 的正和负的特征子空间的投影.

利用二步幂零 Lie 群 $\mathcal{N}_S$ 上的非交换 Fourier 变换, 我们构造了切向 Laplace 算子的相对基本解.

定理 5.2 ^[56, 定理 1.1] 设二次超曲面 $\mathcal{S}$ 是非退化的. 对于固定的 $(x, t) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3$, 我们有

$$\square_b K_{(x,t)} = \delta_{(x,t)} \otimes I_{4 \times 4} - C_{(x,t)}, \quad \square_b C_{(x,t)} = 0, \quad (5.9)$$

其中 $K_{(x,t)}$ 和 $C_{(x,t)}$ 是 $\mathcal{N}_S$ 上的分布. 当 $y \neq 0$, 我们有

$$\begin{aligned} C(y, s) &= \frac{\Gamma(5)}{(2\pi)^5} \int_{S^2} d\lambda \frac{\Delta(\lambda)}{\omega(y, s; \lambda)^5} P_+^\lambda, \\ K(y, s) &= \frac{\Gamma(4)}{(2\pi)^5} \int_{\mathbb{R}^3} d\lambda \left\{ \det \left[\frac{|B^\lambda|}{2 \sinh |B^\lambda|} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{g(y, s; \lambda)^4} (e^{-\Lambda|\lambda|} P_-^\lambda + e^{\Lambda|\lambda|} P_+^\lambda) - \frac{\Delta(\lambda) P_+^\lambda}{\omega(y, s; \lambda)^4} \right\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

是绝对收敛的.

(ii) 如果 Δ 是负定的, 则 $C(y, s) \equiv 0$ 且

$$K(y, s) := \frac{\Gamma(4)}{(2\pi)^5} \int_{\mathbb{R}^3} d\lambda \det \left[\frac{|B^\lambda|}{2 \sinh |B^\lambda|} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{g(y, s; \lambda)^4} (e^{-\Lambda|\lambda|} P_-^\lambda + e^{\Lambda|\lambda|} P_+^\lambda) \quad (5.11)$$

是绝对收敛的. 这里

$$\begin{aligned} \omega(y, s; \lambda) &:= \frac{1}{4} \langle |B^\lambda| y, y \rangle - i\lambda(s), \\ g(y, s; \lambda) &:= \frac{1}{4} \langle |B^\lambda| \coth(|B^\lambda|) y, y \rangle - i\lambda(s), \end{aligned} \quad (5.12)$$

其中对于 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda(s) := \lambda \cdot s = \sum_{j=1}^3 \lambda_j s_j$, $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$, 而 $\coth(|B^\lambda|)$ 是自然定义的矩阵函数.

八元 Heisenberg 群上的切向算子、正则函数和 Szegő 投影参见文献 [57].

为了研究四元强拟凸域, 有必要研究其边界的微分几何. 微分几何学家 Biquard [58] 出于别的动机, 已经引进了一类流形, 称为四元切触流形 (quaternionic contact manifolds). 这是多复变函数论中 CR (Cauchy-Riemann) 流形的对应物. Biquard 构造了这种流形上的正则联络, 现在称为 Biquard 联络. 7 维时的构造由 Duchemin [59] 完成. 这是 CR 流形上 Tanaka-Webster 联络的对应物. 类似于 CR 几何, 在四元切触流形上也有共形变换的概念、Yamabe 方程和 Yamabe 问题等. Wang [60] 解决了非临界情形的四元 Yamabe 问题. 临界的情形 [61] 非常复杂, 但相对应的四元 Heisenberg 群上的最佳 Sobolev 常数问题已经解决. 现在四元切触流形上的几何与分析, 如四元 Yamabe 问题、四元切触 Einstein 结构等也是微分几何中活跃的研究方向 (参见文献 [30, 61, 62] 及其参考文献). 一些四元强拟凸域的边界是四元切触流形, 但一般情形下边界并不具有这种结构 [56], 即二步幂零 Lie 群 $\mathcal{N}_S$ 的四元结构与四元 Heisenberg 群上的不同.

参考文献

- 1 Hitchin N J, Karlhede A, Lindstrom U, et al. Hyperkähler metrics and supersymmetry. *Comm Math Phys*, 1987, 108: 535–589
- 2 Howe P S, Papadopoulos G. Twistor spaces for hyperKähler manifolds with torsion. *Phys Lett B*, 1996, 379: 80–86
- 3 Howe P S, Opfermann A, Papadopoulos G. Twistor spaces for QKT manifolds. *Comm Math Phys*, 1998, 197: 713–727
- 4 Grantcharov G, Poon Y S. Geometry of hyperKähler connections with torsion. *Comm Math Phys*, 2000, 213: 19–37
- 5 Verbitsky M. HyperKähler manifolds with torsion, supersymmetry and Hodge theory. *Asian J Math*, 2002, 6: 679–712
- 6 Salamon S. Quaternionic Kähler manifolds. *Invent Math*, 1982, 67: 143–171
- 7 Alexandrov S, Pioline B, Saueressig F, et al. Linear perturbations of quaternionic metrics. *Comm Math Phys*, 2010, 296: 353–403
- 8 Ivanov S, Minchev I. Quaternionic Kähler and hyperKähler manifolds with torsion and twistor spaces. *J Reine Angew Math*, 2004, 567: 215–233
- 9 Adams W, Loustaunau P, Palamodov V, et al. Hartogs’ phenomenon for polyregular functions and projective dimension of related modules over a polynomial ring. *Ann Inst Fourier*, 1997, 47: 623–640
- 10 Adams W, Berenstein C, Loustaunau P, et al. Regular functions of several quaternionic variables and the Cauchy-Fueter complex. *J Geom Anal*, 1999, 9: 1–15
- 11 Adams W, Loustaunau P. Analysis of the module determining the properties of regular functions of several quaternionic variables. *Pacific J Math*, 2001, 196: 1–15
- 12 Sabadini I, Sommen F, Struppa D, et al. Complexes of Dirac operators in Clifford algebras. *Math Z*, 2002, 239: 293–320
- 13 Colombo F, Sabadini I, Sommen F, et al. *Analysis of Dirac Systems and Computational Algebra*. Progress in Mathematical Physics, vol. 39. Boston: Birkhäuser, 2004
- 14 Wang W. On non-homogeneous Cauchy-Fueter equations and Hartogs’ phenomenon in several quaternionic variables. *J Geom Phys*, 2008, 58: 1203–1210
- 15 Pertici D. Funzioni regolari di piu variabili quaternioniche. *Ann Mat Pura Appl*, 1988, 151: 39–65
- 16 Eastwood M, Penrose R, Wells R. Cohomology and massless fields. *Comm Math Phys*, 1980, 78: 305–351
- 17 Baston R, Eastwood M. *The Penrose Transform its Interaction with Representation Theory*. New York: Oxford University Press, 1989
- 18 Wang W. The k -Cauchy-Fueter complex, Penrose transformation and Hartogs’ phenomenon for quaternionic k -regular functions. *J Geom Phys*, 2010, 60: 513–530
- 19 Wan D, Wang W. On quaternionic Monge-Ampere operator, closed positive currents and Lelong-Jensen type formula on quaternionic space. *ArXiv:1401.5291*, 2014
- 20 Baston R J. Quaternionic complexes. *J Geom Phys*, 1992, 8: 29–52
- 21 Bureš J, Damiano A, Sabadini I. Explicit resolutions for several Fueter operators. *J Geom Phys*, 2007, 57: 765–775
- 22 Colombo F, Souček V, Struppa D. Invariant resolutions for several Fueter operators. *J Geom Phys*, 2006, 56: 1175–1191
- 23 Wang H Y, Ren G. Bochner-Martinelli formula for k -Cauchy-Fueter operator. *J Geom Phys*, 2014, 84: 43–54

- 24 Ren G, Wang H Y. Theory of several paravector variables: Bochner-Martinelli formula and Hartogs theorem. *Sci China Math*, 2014, 57: 2347–2360
- 25 Alesker S. Non-commutative linear algebra and plurisubharmonic functions of quaternionic variables. *Bull Sci Math*, 2003, 127: 1–35
- 26 Wang W. On the optimal control method in quaternionic analysis. *Bull Sci Math*, 2011, 135: 988–1010
- 27 Chang D C, Markina I, Wang W. On the Hodge-type decomposition and cohomology groups of k -Cauchy-Fueter complexes over domains in the quaternionic space. *ArXiv:1508.02875*, 2014
- 28 Kang Q, Wang W. On Penrose integral formula and series expansion of k -regular functions on the quaternionic space $\mathbb{H}^n$. *J Geom Phys*, 2013, 64: 192–208
- 29 Kang Q, Wang W. On Radon-Penrose transformation and k -Cauchy-Fueter operator. *Sci China Math*, 2012, 55: 1921–1936
- 30 Ivanov S, Vassilev D. Extremals for the Sobolev Inequality and the Quaternionic Contact Yamabe Problem. Hackensack: World Scientific, 2011
- 31 Chang D C, Markina I, Wang W. On the Cauchy-Szegő kernel for quaternion Siegel upper half-space. *Complex Anal Oper Theory*, 2013, 7: 1623–1654
- 32 Liu H, Zhang G. Realization of quaternionic discrete series on the unit ball in $\mathbb{H}^d$. *J Funct Anal*, 2012, 262: 2979–3005
- 33 Frenkel I, Libine M. Quaternionic analysis, representation theory and physics. *Adv Math*, 2008, 218: 1806–1877
- 34 Frenkel I, Libine M. Split quaternionic analysis and the separation of the series for $SL(2, \mathbb{R})$ and $SL(2, \mathbb{C})/SL(2, \mathbb{R})$. *Adv Math*, 2011, 228: 678–763
- 35 Frenkel I, Libine M. Quaternionic analysis and the Schrödinger model for the minimal representation of $O(3, 3)$. *Int Math Res Not*, 2012, 2012: 4904–4923
- 36 Alesker S. Quaternionic Monge-Ampère equations. *J Geom Anal*, 2003, 13: 205–238
- 37 Alesker S. Valuations on convex sets, non-commutative determinants, and pluripotential theory. *Adv Math*, 2005, 195: 561–595
- 38 Alesker S, Verbitsky M. Quaternionic Monge-Ampère equation and Calabi problem for HKT-manifolds. *Israel J Math*, 2010, 176: 109–138
- 39 Alesker S. Solvability of the quaternionic Monge-Ampère equation on compact manifolds with a flat hyperKähler metric. *Adv Math*, 2013, 241: 192–219
- 40 Alesker S, Verbitsky M. Plurisubharmonic functions on hypercomplex manifolds and HKT-geometry. *J Geom Anal*, 2006, 16: 375–399
- 41 Verbitsky M. Positive forms on hyperkähler manifolds. *Osaka J Math*, 2010, 47: 353–384
- 42 Alesker S. Pluripotential theory on quaternionic manifolds. *J Geom Phys*, 2012, 62: 1189–1206
- 43 Wan D, Wang W. Lelong-Jensen type formula, k -Hessian boundary measure and Lelong number for k -convex functions. *J Math Pures Appl*, 2013, 99: 635–654
- 44 Wan D, Zhang W. Quasicontinuity and maximality of quaternionic plurisubharmonic functions. *J Math Anal Appl*, 2015, 424: 86–103
- 45 Harvey F R, Lawson H B J. An introduction to potential theory in calibrated geometry. *Amer J Math*, 2009, 131: 893–944
- 46 Harvey F R, Lawson H B J. Duality of positive currents and plurisubharmonic functions in calibrated geometry. *Amer J Math*, 2009, 131: 1211–1239
- 47 Harvey F R, Lawson H B J. Plurisubharmonicity in a general geometric context. In: *Geometry and Analysis No 1*. *Adv Lect Math* 17. Somerville: International Press, 2011, 363–402
- 48 Harvey F R, Lawson H B J. p -convexity, p -plurisubharmonicity and the Levi problem. *Indiana Univ Math J*, 2013, 62: 149–169
- 49 Alesker S. Plurisubharmonic functions on the octonionic plane and $Spin(9)$ -invariant valuations on convex sets. *J Geom Anal*, 2008, 18: 651–686
- 50 Bedford E, Taylor B A. A new capacity for plurisubharmonic functions. *Acta Math*, 1982, 149: 1–40
- 51 Demailly J P. Mesures de Monge-Ampère et mesures pluriharmoniques. *Math Z*, 1987, 194: 519–564
- 52 Demailly J P. Potential theory in several complex variables. <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/trento2.pdf>, 1989
- 53 Demailly J P. Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory. In: *Complex Analysis and Geometry*. New York: Springer, 1993, 115–193
- 54 Wang W. The tangential Cauchy-Fueter complex on the quaternionic Heisenberg group. *J Geom Phys*, 2011, 61: 363–380

- 55 Wang W. On twistor transformations and invariant differential operator of simple Lie group $G_{2(2)}$. J Math Phys, 2013, 54: 013502
- 56 Wang W. On the tangential Cauchy-Fueter operators on nondegenerate quadratic hypersurfaces in $\mathbb{H}^2$. Math Nachr, 2013, 286: 1353–1376
- 57 Wang W, Wang H M. On octonionic regular functions and Szegő projection on the octonionic Heisenberg group. Complex Anal Oper Theory, 2014, 8: 1285–1324
- 58 Biquard O. Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques. In: Astérisque 265. Paris: Société mathématique de France, 2000
- 59 Duchemin D. Quaternionic contact structures in dimension 7. Ann Inst Fourier, 2006, 56: 851–885
- 60 Wang W. The Yamabe problem on quaternionic contact manifolds. Ann Mat Pura Appl, 2007, 186: 359–380
- 61 Ivanov S, Minchev I, Vassilev D. Extremals for the Sobolev inequality on the seven dimensional quaternionic Heisenberg group and the quaternionic contact Yamabe problem. J Eur Math Soc, 2010, 12: 1041–1067
- 62 Ivanov S, Minchev I, Vassilev D. Quaternionic contract Einstein structures and the quaternionic contact Yamabe problem. Mem Amer Math Soc, 2014, 231: 6–82

The k -Cauchy-Fueter operators in several quaternionic variables

WANG Wei

Abstract This is a survey of the development of k -Cauchy-Fueter operators. We discuss the k -Cauchy-Fueter complexes, non-homogeneous k -Cauchy-Fueter equations, the Hartogs' extension phenomenon for k -regular functions, Bochner-Martinelli integral representation formula, Penrose integral transformation and series expansion of k -regular functions, quaternionic Hardy space and Cauchy-Szegő kernel, the relation between 0-Cauchy-Fueter operator and quaternionic Monge-Ampère operator, quaternionic closed positive currents and their Lelong number, Lelong-Jessen type formula, and tangential k -Cauchy-Fueter operators and complexes.

Keywords k -Cauchy-Fueter operators and complexes, k -regular functions, quaternionic pluripotential theory, tangential k -Cauchy-Fueter operators and complexes

MSC(2010) 32A30, 30G35, 35N05, 32U15

doi: 10.1360/N012015-00143