等参函数及相关问题研究

彦文娇

北京师范大学数学科学学院, 北京 100875
E-mail: wjyan@bnu.edu.cn

指导教师: 唐梓洲 北京师范大学数学科学学院

收稿日期: 2013-05-21; 接受日期: 2013-05-28

国家自然科学基金 (批准号: 11071018) 和北京师范大学优秀博士论文培育基金 (批准号: 2009011) 资助项目

摘要 著名的 Yau 猜想断言单位球面中的紧致嵌入极小超曲面的 Laplace 算子的第一特征值等于其维数. 近年来有许多几何学家致力于对 Yau 猜想的研究, 但是到目前为止, 已有的结论只是一些关于第一特征值估计的不等式. 作为本文的一个主要结果, 本文证明了对于单位球面中的等参极小超曲面, Yau 猜想是正确的. 进一步地, 对于等参超曲面的焦流形 (实际上是球面的极小子流形), 本文还证明了在一定维数条件下, 它的第一特征值也是其维数.

作为本文的第二个主要结果, 以著名的 Schoen-Yau-Gromov-Lawson 的关于数量曲率的手术理论为出发点, 本文在一个 Riemann 流形的嵌入超曲面处作手术, 构造了一个新的具有丰富几何性质的流形, 称为 double 流形. 特别地, 本文在单位球面的极小等参超曲面处实行了这一手术, 发现得到的 double 流形不仅有很复杂的拓扑 (但其示性类有精确描述), 还存在数量曲率为正的度量, 更重要的是保持了等参叶状结构.

比 Willmore 曲面更广泛的定义是 Willmore 子流形, 即 Willmore 泛函在球面中的极值子流形. 单位球面中的 Willmore 子流形的例子在已有文献中是非常罕见的. 作为本文的另外两个主要结果, 通过深入挖掘单位球面上的 OT-FKM-型等参函数的焦流形的性质, 本文发现其极大值对应的焦流形是单位球面的一系列 Willmore 子流形; 之后, 本文用几何办法统一证明了单位球面中具有 4 个不同主曲率的等参超曲面的焦流形都是单位球面的 Willmore 子流形. 这些新的 Willmore 子流形是极小的, 但一般不是 Einstein 的.

关键词 Yau 猜想 等参函数 等参超曲面 焦流形 Schoen-Yau-Gromov-Lawson 理论 Willmore 子流形

MSC (2010) 主题分类 35P15, 53C40

1 引言

对于 Riemann 流形中的等参超曲面的研究, 起源于 20 世纪 30 年代 Levi-Civita 和 Cartan 等人的工作. Levi-Civita 最先给出了闭的 Riemann 流形上的等参函数和等参超曲面的定义; Cartan 对实空间形式 $\widetilde{M}^{n+1}(c)$ 中 $c = -1$ (双曲空间 $\mathbb{H}^n$) 和 $c = 0$ (Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$) 时的等参超曲面进行了分类, 并对 $c = 1$ (单位球面 $S^n(1)$) 的部分情况给出了分类. 单位球面中的等参超曲面理论是非常复杂的, 其分类问题至今尚未完全解决. 本文着重研究单位球面的等参超曲面及其焦流形的几何性质和等参函数的应用.

我们回忆单位球面 S^{n+1} 中的超曲面 M^n 叫作等参的, 若它是 S^{n+1} 上某个局部定义的等参函数 f 的水平超曲面, 这里的等参函数 f 是指一个非常值的光滑函数 $f: S^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ (参见文献 [1]) 满足

$$\begin{cases} |\nabla f|^2 = b(f), \\ \Delta f = a(f), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 ∇f 和 Δf 分别表示 f 的梯度和 Laplace 算子, b 和 a 分别是 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数和连续函数. Cartan 指出, 对应 f 的正则值 t 的等参超曲面 $M_t := f^{-1}(t)$ 是互相平行的, 且主曲率为常数.

我们把等参函数 f 的临界值的逆像叫作等参超曲面的焦流形. 实际上, 焦流形是 S^{n+1} 的极小子流形. Münzner [2] 证明了无论 M^n 有几个主曲率, 在每个等参超曲面的平行族里, 只有两个不同的焦流形, 记为 M_1 和 M_2 , 并且任何等参超曲面都是它的焦流形上的常半径管道.

设 ξ 为 M^n 在 $S^{n+1}(1)$ 的一个单位法向量场, g 是 M 的不同主曲率的个数, $\cot \theta_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, g$; $0 < \theta_1 < \dots < \theta_g < \pi$) 是关于 ξ 的主曲率, 重数为 m_α . Münzner [2] 用拓扑方法证明了 g 只能取值于 $1, 2, 3, 4, 6$; $m_\alpha = m_{\alpha+2}$ (下标模 g); $\theta_\alpha = \theta_1 + \frac{\alpha-1}{g}\pi$ ($\alpha = 1, \dots, g$), 且若 g 为奇数, $m_1 = m_2$.

当 $g = 1, 2, 3$ 时, Cartan 对等参超曲面进行分类并证明它们都是齐性的; 当 $g = 6$ 时, Dorfmeister, Neher [3] 和 Miyaoka [4] 对其进行分类并证明它们都是齐性的; 当 $g = 4$ 时, 继文献 [5–12] 的一系列工作之后, 我们知道以下结论.

定理 1.1 单位球面中 $g = 4$ 的等参超曲面, 除了可能的 $(m_1, m_2) = (7, 8)$ 的情形外, 都是 OT-FKM- 型的, 或者是 $(m_1, m_2) = (2, 2), (4, 5)$ 且齐性的.

注 1.1 S^{n+1} 中齐性等参超曲面, 根据 Takagi 和 Takahashi [13] 在 Hsiang 和 Lawson [14] 基础上的分类, 都是秩为 2 的 Riemann 对称空间的迷向表示的主轨道. 至于 S^{n+1} 中 OT-FKM- 型等参超曲面, 是由 Ferus 等人 [7] 在 Ozeki 和 Takeuchi [15] 的工作基础上, 利用 Clifford 代数的表示构造的一类非常重要的 $g = 4$ 的等参的例子.

给定 $\mathbb{R}^{2l}$ 上的一个对称 Clifford 系统 $\{P_0, \dots, P_m\}$, 即 P_i 是满足 $P_i P_j + P_j P_i = 2\delta_{ij} I_{2l}$ 的对称矩阵, 定义 $\mathbb{R}^{2l}$ 上的一个多项式 F ,

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^{2l} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ F(x) &= |x|^4 - 2 \sum_{i=0}^m \langle P_i x, x \rangle^2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

不难证明, $f = F|_{S^{2l-1}}$ 是 S^{2l-1} 上的等参函数, 我们称为 OT-FKM- 型等参函数, 相应的等参超曲面叫作 OT-FKM- 型等参超曲面, 其主曲率重数对为 $(m_1, m_2) = (m, l - m - 1)$, 这里要求 $m > 0$, $l - m - 1 > 0$, 其中 $l = k\delta(m)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), $\delta(m)$ 是 Clifford 代数 C_{m-1} 的不可约模的维数.

2 等参叶状结构与 Yau 第一特征值猜想

Laplace-Beltrami 算子是 Riemann 流形上的最重要的算子之一. 在过去的几十年里, 对 Laplace-Beltrami 算子的谱的研究一直是几何研究的核心问题. 例如, 单位球面中闭的嵌入极小子流形的几何与特征值问题就是息息相关的.

设 (M^n, g) 是一个 n 维紧致连通无边的 Riemann 流形, 其上的 Laplace-Beltrami 算子记作 Δ , 其在 M 上的 C^∞ 函数 f 上的作用为 $\Delta f = -\operatorname{div}(\nabla f)$. 众所周知, Δ 是一个椭圆算子, 有如下离散的谱:

$$\{0 = \lambda_0(M) < \lambda_1(M) \leq \lambda_2(M) \leq \dots \leq \lambda_k(M), \dots, \uparrow \infty\},$$

其中 $\lambda_1(M)$ 称为 M 的第一特征值, $\uparrow$ 表示递增至无穷. 若 M^n 是 $S^{n+1}(1)$ 中的极小超曲面, 根据 Takahashi 定理, 有 $\lambda_1(M) \leq n$.

1982 年, Yau 提出了下述猜想.

Yau 猜想 ^[16] 单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的每个闭的嵌入极小超曲面 M^n 的第一特征值为 n .

针对这个问题的一个最重要的突破是由 Choi 和 Wang ^[17] 给出的. 他们证明了 $S^{n+1}(1)$ 中每个 (嵌入) 闭极小超曲面的第一特征值都不小于 $\frac{n}{2}$. 作为常识, 我们知道 Laplace-Beltrami 算子的谱甚至它的第一特征值的计算都是极其复杂的. 迄今为止, Yau 猜想还远远没有被解决. 但是 Yau 猜想在微分几何中占据非常重要的位置, 例如最近被解决的著名的 Lawson 猜想, 即 S^3 中的嵌入极小环面只有 Clifford 环面, 就是 Yau 猜想在 2 维情形的一个特例 ^[18]. 本文主要考虑 Yau 猜想的一个限制性问题, 也就是在前提条件中加入“等参”这一条件, 并得到如下结果.

定理 2.1 ^[19] 设 M^n 为 $S^{n+1}(1)$ 中的闭的极小等参超曲面, 则

$$\lambda_1(M^n) = n.$$

针对 Yau 猜想, Muto 等人 ^[20] 和 Kotani ^[21] 对齐性 (自动是等参的) 极小超曲面给出了部分结果. 确切地说, 他们对所有 $g = 1, 2, 3, 6$ 的齐性极小超曲面都证明了 Yau 猜想是对的. 但是, 当 $g = 4$ 时, 他们只能够解决 $(m_1, m_2) = (2, 2)$ 和 $(1, k)$ 的情形, 而事实上, $S^{n+1}(1)$ 中的有 4 个不同主曲率的齐性超曲面已经分类, 分别是 $(m_1, m_2) = (1, k), (2, 2k-1), (4, 4k-1), (2, 2), (4, 5)$ 或 $(6, 9)$. 进一步地, Muto ^[22] 给出了 Yau 猜想的另一突破, 他证明了 Yau 猜想对于 $g = 4$ 的某些非齐性极小等参超曲面也是对的. 他的方法不依赖于等参超曲面的齐性; 然而, 他的结果只覆盖了 $\min(m_1, m_2) \leq 10$ 的某些等参超曲面. 但事实上, 粗略地讲, 单位球面中满足 $g = 4$ 的等参超曲面大都满足 $\min(m_1, m_2) > 10$.

基于以上结论和 $S^{n+1}(1)$ 中等参超曲面的分类, 我们利用下面的定理来证明定理 2.1.

定理 2.2 ^[19] 设 M^n 为 $S^{n+1}(1)$ 中的有 4 个不同主曲率的闭极小等参超曲面, 且 $m_1, m_2 \geq 2$, 则

$$\lambda_1(M^n) = n.$$

注 2.1 如引言所述, 当 $g = 1, 2, 3, 6$ 时, 单位球面中的等参超曲面都是齐性的, 所以文献 [20, 21] 的结论就足以给出定理 2.1 在 $g = 1, 2, 3, 6$ 情形下的证明. 此外, Takagi ^[23] 证明了重数为 $(1, k)$ 的 $g = 4$ 的等参超曲面都是齐性的, 由此结合文献 [20] 可知, 定理 2.2 直接给出了定理 2.1.

注 2.2 我们知道, 对于 $g = 4$ 的等参超曲面, 除了可能的 $(m_1, m_2) = (7, 8)$ 的情形外, 它们都是齐性的或者 OT-FKM-型的. 实际上, 定理 2.2 仅依赖于 (m_1, m_2) 的取值, 而不是齐性的性质, 所以与 $g = 4$ 的等参超曲面的分类情况无关. 除此之外, 我们的方法也适用于 $g = 6$ 的情况.

注 2.3 Chern 猜想说, 若其第二基本型的长度为常数, 则 $S^{n+1}(1)$ 中的闭的极小浸入超曲面是等参超曲面 (参见文献 [24]). 若这个猜想得以证明, 则我们就正面回答了加入第二基本型长度为常数这一限制的 Yau 猜想, 也就使我们更加相信 Yau 猜想的正确性.

本节更加有趣的部分是给出了 $S^{n+1}(1)$ 的焦流形的第一特征值, 这依赖于等参叶状结构的更加深刻的几何性质.

为了清晰的表述定理 2.3, 我们先作一些准备. Cartan 曾论证过, 等参超曲面是一族平行超曲面. 确切的讲, 给定一个 $S^{n+1}(1)$ 中的等参超曲面 M^n , 及其上的一个光滑单位法向量场 ξ , 对每一点 $x \in M$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$, 我们可以定义映射 $\phi_\theta : M^n \rightarrow S^{n+1}(1)$,

$$\phi_\theta(x) = \cos \theta x + \sin \theta \xi(x).$$

显然, $\phi_\theta(x)$ 是沿穿过 x 的法测地线到 M 的定向距离为 θ 的点. 如果对任意的 $\alpha = 1, \dots, g$, 有 $\theta \neq \theta_\alpha$, 则 ϕ_θ 是与 M 定向距离为 θ 的平行超曲面, 记作 M_θ . 如果对某个 $\alpha = 1, \dots, g$ 有 $\theta = \theta_\alpha$, 容易发现对于主分布 $E_\alpha(x) = \{X \in T_x M \mid A_\xi X = \cot \theta_\alpha X\}$ (A_ξ 是关于 ξ 的形状算子) 中的任意向量 X ,

$$(\phi_\theta)_* X = (\cos \theta - \sin \theta \cot \theta_\alpha) X = \frac{\sin(\theta_\alpha - \theta)}{\sin \theta_\alpha} X = 0,$$

换言之, 若 $\cot \theta = \cot \theta_\alpha$ 为 M 的主曲率, 则 ϕ_θ 是等参超曲面的焦流形, 也是 $S^{n+1}(1)$ 的一个余维数是 $m_\alpha + 1$ 的子流形.

我们把沿 ξ 与 M 的定向距离为 θ_1 的焦流形记作 M_1 , 其在 $S^{n+1}(1)$ 中余维数为 $m_1 + 1$; 把沿 $-\xi$ 与 M 的定向距离为 $\frac{\pi}{g} - \theta_1$ 的焦流形记作 M_2 , 其在 $S^{n+1}(1)$ 中余维数为 $m_2 + 1$. 根据 Cartan 恒等式, 焦流形 M_1 和 M_2 在 $S^{n+1}(1)$ 中都是极小的 (参见文献 [1]).

本节的另一个主要结果是关于维数在非稳定范围 (参见文献 [25]) 内的焦流形的第一特征值.

定理 2.3 ^[19] 设 M_1 为单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中有 4 个不同主曲率的等参超曲面的焦流形, 其在 $S^{n+1}(1)$ 中余维数是 $m_1 + 1$. 如果其维数满足 $\dim M_1 \geq \frac{2}{3}n + 1$, 则

$$\lambda_1(M_1) = \dim M_1,$$

且 λ_1 的重数为 $n + 2$. 类似的结论在 M_2 上也成立.

由这个定理, 结合 “ $g = 4$ ” 时的已有分类结果, 本文将着重研究 OT-FKM- 型的焦流形. 首先关注 OT-FKM- 型焦流形 M_2 . 如果 $3 \dim M_2 \geq 2n + 3$, 或等价地, $m_1 \geq \frac{1}{2}(m_2 + 3)$, 定理 2.3 推出 $\lambda_1(M_2) = \dim M_2 = 2m_1 + m_2$. 这里假设条件 $3 \dim M_2 \geq 2n + 3$ 是不可少的. 例如, Solomon ^[26] 在 OT-FKM- 型的焦流形 M_2 上构造了一个特征值是 $4m$ 的特征函数. 所以在稳定范围 $3 \dim M_2 < 2(n + 1) - 2$, 即 $m_1 < \frac{1}{2}m_2$ 时, $\lambda_1(M_2) \leq 4m_1 < 2m_1 + m_2 = \dim M_2$. 那么, 我们只需要估计以下三种情况:

$$m_1 = \frac{1}{2}m_2, \quad m_1 = \frac{1}{2}(m_2 + 1), \quad m_1 = \frac{1}{2}(m_2 + 2),$$

实际上就是 $(m_1, m_2) = (1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 7), (5, 10)$ 和 $(8, 15)$.

接下来考虑 OT-FKM- 型焦流形 M_1 . 幸运的是, 定理 2.3 中的条件几乎都可以满足. 通过接着分析条件 $m_1 \geq 1$, $m_2 \geq 1$ 和 $m_2 < \frac{1}{2}(m_1 + 3)$, 我们发现只剩下 5 种情况没有解决, $(m_1, m_2) = (1, 1), (2, 1), (4, 3), (5, 2)$ 和 $(6, 1)$. 用文献 [7] 的观点, 对应重数 $(2, 1), (5, 2), (6, 1)$ 和一个 $(4, 3)$ 的等参族分别与对应 $(1, 2), (2, 5), (1, 6)$ 和 $(3, 4)$ 的等参族是等同的, 其焦流形互换. 对于 $(2, 5)$ 的情况, 文献 [26] 给出了有效估计, 而对于 $(1, 2)$ 和 $(1, 6)$ 的情况, 下述命题给出其第一特征值.

命题 2.1 ^[19] 对于 $(m_1, m_2) = (1, k)$ 的 OT-FKM- 型焦流形 M_2 , 下列等式成立,

$$\lambda_1(M_2) = \min\{4, 2 + k\}.$$

如前所述, Takagi ^[23] 断言了 $g = 4$ 、重数为 $(1, k)$ 的等参超曲面一定是齐性的. 那么满足 $g = 4$ 且 $\min\{m_1, m_2\} = 1$ 的等参超曲面的相应焦流形的第一特征值是 $\min\{4, 2 + k\}$.

最后提出下列关于 $S^{n+1}(1)$ 中维数在非稳定范围的极小子流形的第一特征值的问题, 这个问题可看成 Yau 猜想的一个推广.

问题 ^[19] 设 M^d 是单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的一个闭的极小子流形. 若它的维数 d 满足 $d \geq \frac{2}{3}n + 1$, 那么 M^d 的第一特征值是否满足

$$\lambda_1(M^d) = d?$$

3 Schoen-Yau-Gromov-Lawson 理论与等参叶状结构

数量曲率是 Riemann 流形上的最简单的不变量之一. 本节定义 n 维 Riemann 流形 M^n 有正数量曲率, 若其上有一个非负的数量曲率 $R_M \geq 0$ 并且在某一点 p 满足 $R_M(p) > 0$. 自然地, 人们会问“哪些流形具有正数量曲率的 Riemann 度量呢?” 在近几十年, 这个问题一直受到广泛而活跃的研究. 首先, Lichnerowicz^[27] 在 1962 年证明了一个紧致 spin 流形上, 如果它的 $\hat{A}$ -genus 非零, 那么在其上就不存在有正数量曲率的 Riemann 度量. 继他之后, Hitchin^[28] 推广了这一结论, 证明了若 M^n 上存在有正数量曲率的 Riemann 度量, 则 KO-示性数 $\alpha(M) \in \text{KO}^{-n}(pt)$ (当 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 时, 与 $\hat{A}(M)$ 只相差一个因子) 为零. 一个非常漂亮的推论是在一半的 $8k+1$ 维和 $8k+2$ 维怪球上是不存在有正数量曲率的 Riemann 度量的. 针对上述问题的另一个里程碑式的结果是由 Schoen 和 Yau^[29] 给出的 (Gromov 和 Lawson^[30] 也独立地得到了相同结论), 他们建立了下面关于正数量曲率度量的“手术定理”.

定理 G-L-S-Y 设 X 是一个有正数量曲率 Riemann 度量的紧致流形, 则在任何通过在 X 上进行余维数不小于 3 的手术得到的流形上, 总能找到有正数量曲率的 Riemann 度量.

受到 Schoen-Yau-Gromov-Lawson 的手术理论的启发, 我们在一个有嵌入超曲面的 Riemann 流形上, 构造了新的具有丰富的几何性质的流形. 特别地, 我们在单位球面的极小等参超曲面上实行了这一方法, 发现得到的新流形不仅有很复杂的拓扑, 还有正数量曲率度量, 甚至还保持了等参叶状结构. 具体构造方法如下.

给定一个紧致连通的无边流形 X^n ($n \geq 3$). 设 $Y^{n-1} \hookrightarrow X^n$ 是 X^n 中的一个法丛平凡的连通嵌入超曲面, 满足 $\pi_0(X - Y) \neq 0$, 那么 Y^{n-1} 把 X^n 分成两个分支, 记成 X_+^n 和 X_-^n , 它们有相同的边界 Y^{n-1} . 既然 Y 在 X 中有平凡法丛, 我们总可以取 Y 上的一个单位法向量场 ξ , 相对于 X_+ , ξ 是内法方向.

定义连续函数 $r: X^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} \text{dist}(x, Y), & \text{若 } x \in X_+, \\ -\text{dist}(x, Y), & \text{若 } x \in X_-, \end{cases}$$

其中 $\text{dist}(x, Y)$ 表示从点 x 到 Y 的距离. 显然, X_+ (X_-) 恰好是满足 $r \geq 0$ ($r \leq 0$) 的集合. 定义 $Y_r := \{x \in X \mid r(x) = r\}$, 让 $|r|$ 足够小使得 Y_r 仍然是一个嵌入超曲面. 我们把 ξ 在 Y 的一个邻域内扩张成一个单位向量场, 使得 ξ 是 Y_r 的法向.

接下来, 不失一般性, 我们只分析 X_+^n . 考虑 Riemann 乘积空间 $X_+^n \times \mathbb{R}$, 其上坐标为 (x, t) , 对于一个较小的 $\bar{r} > 0$, 仿照文献 [30], 我们可以定义一个 $X_+^n \times \mathbb{R}$ 中的超曲面 M^n ,

$$M^n := \{(x, t) \in X_+^n \times \mathbb{R} : (r(x), t) \in \gamma, r(x) \leq \bar{r}\},$$

其中 γ 是 (r, t) -平面上的一条曲线 (如图 1 所示).

曲线 γ 从 $t = 0, r_1 \leq r \leq \bar{r}$ 的一个线段出发, 以水平线段 $r = r_\infty > 0$ 结束, 这里 r_∞ 如我们要求的足够小. 现在固定一点 $q = (x, t) \in M$, 对应到曲线 γ 上的点 (r, t) . 选择切空间 $T_x Y_r$ 的一组单位正交基 $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$, 使得形状算子 A_ξ 可以表示为 $A_\xi e_i = \mu_i(r) e_i, i = 1, \dots, n-1$. 那么, M 在 q 点处的相应主曲率可以写作 $\lambda_i = \mu_i(r) \sin \theta, i = 1, \dots, n-1$. 类似于 Gromov 和 Lawson^[30] 的观察, $M \cap (l \times \mathbb{R})$ 的切向量也是 M 在 $X_+^n \times \mathbb{R}$ 中的第二基本型的一个主方向, 这里 l 是 X_+ 中从 Y 出发的

图 1 M^n 上的单位“外”法向量场, $\sin := \langle N, \xi \rangle$

一条测地线. 我们把这个切向量记为 e_n . 那么在 q 点处的第 n 个主曲率即为 $\lambda_n := k$, γ 在点 (r, t) 处的 (非负) 曲率.

注意到 Gauss 方程

$$K_{ij}^M = K_{ij}^{X \times \mathbb{R}} + \lambda_i \lambda_j, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

其中 K_{ij}^M 是 M 在平面 $e_i \wedge e_j$ 上的截面曲率, $K_{ij}^{X \times \mathbb{R}}$ 是 $X_+ \times \mathbb{R}$ 上相应的截面曲率, 以及 $X_+ \times \mathbb{R}$ 上的度量是乘积度量, 即

$$\begin{aligned} K_{ij}^{X \times \mathbb{R}} &= K_{ij}^X, \quad 1 \leq i, j \leq n-1, \\ K_{n,j}^{X \times \mathbb{R}} &= K_{\xi,j}^X \cos^2 \theta, \end{aligned}$$

其中 K^X 是 X_+ 的截面曲率. 我们得到 M 在诱导度量下的数量曲率

$$R_M = \sum_{i \neq j}^n K_{ij}^M = R_X + 2A \sin^2 \theta + 2kH(r) \sin \theta, \quad (3.1)$$

其中

$$A := \sum_{i < j \leq n-1} \mu_i(r) \mu_j(r) - \text{Ric}^X(\xi, \xi),$$

$H(r) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i(r)$ 是 Y_r 的平均曲率.

注 3.1 由于曲线 γ 以一条水平线段结束, 所以当 t 趋向于无穷的时候, M 上的度量是标准乘积度量, 这就保证了我们可以从度量上光滑地把 X_+ (X_-) 与它自己沿着 Y 粘合, 从而得到一个新的流形, 在这里我们把这个新流形叫作 X_+ (X_-) 的 double 流形, 记作 $D(X_+)$ ($D(X_-)$). 带边流形的 double, 作为一个拓扑概念, 出现于 20 世纪 30 年代. Gromov 和 Lawson^[31] 研究了流形的 double 的几何性质, 并且给出了一个有趣的定理, 若 X 上有正数量曲率度量, Y 是一个极小超曲面, 那么 double 流形 $D(X_+)$ ($D(X_-)$) 上也存在正数量曲率度量. 但是, 在他们的构造中, 在 X_+ 的边缘处“弯曲”的太多, 以至于出现了一些奇异点和褶皱. 然而, 用我们的办法可以给出 $D(X_+)$ ($D(X_-)$) 的具有上述令人满意的性质的精确构造.

注 3.2 (3.1) 是 M 在 $X_+ \times \mathbb{R}$ 中的数量曲率的表达式. 在 $X_- \times \mathbb{R}$ 中, 尽管 ξ 是 X_- 的外法向量场, 这样的公式也是成立的. Gromov 和 Lawson^[30] 也计算了 M 的数量曲率, 他们的表达式是由主曲率的估计式给出的, 而我们的是精确表达式. 虽然在文献 [30, (1)] 中他们漏掉了因子 2, 并且在文

献 [30, (1')] 中他们漏掉了关于子流形的第二基本型的一项, 但是他们的关于手术的主要结果仍然是正确的. 可是他们的失误会导致 (3.1) 中缺失 $H(r)$ 这一项, 而这一项在我们的研究中是必不可少的. Rosenberg 和 Stolz [32] 修正了 Gromov 和 Lawson 的表达式, 可是他们仍然漏掉了主曲率或者说子流形第二基本型那一项.

从现在起, 我们主要关注 $X^n = S^n(1)$ 的情形. 假设 Y^{n-1} 是一个紧致极小等参超曲面^[1]. 事实上, Y^{n-1} 是唯一的^[33]. 为方便记号, 我们把不同主曲率的重数记为 m_+ 和 m_- , 焦流形分别记为 $M_+ := f^{-1}(1)$ 和 $M_- := f^{-1}(-1)$, 相应余维数是 $\text{codim}(M_+) = m_+ + 1$, $\text{codim}(M_-) = m_- + 1$.

本节的一个主要结论是下面的定理.

定理 3.1 [34] 设 Y^{n-1} ($n \geq 3$) 是球面 $S^n(1)$ 中的紧致极小等参超曲面, 把 S^n 分成 S_+^n 和 S_-^n 两部分, 那么每个 double 流形 $D(S_+^n)$ 和 $D(S_-^n)$ 上都存在一个正数量曲率度量, 并且在 $D(S_+^n)$ (或 $D(S_-^n)$) 上仍然有等参叶状结构.

注 3.3 作为定理 3.1 的一个直接结果, 我们发现 KO- 示性数 $\alpha(D(S_+^n)) = 0$, $\alpha(D(S_-^n)) = 0$.

此外, 我们还得到 double 流形的拓扑性质.

命题 3.1 [34] $D(S_+^n)$ ($D(S_-^n)$) 是一个 π - 流形, 也就是稳定可平行的流形. 特别地, 它是一个可定向的 spin 流形, 并且它的 Stiefel-Whitney 示性类和 Pontrjagin 示性类都为零.

值得指出的是, “ $D(S_+^n)$ 是稳定可平行的” 这一条件并不能推出 $\alpha(D(S_+^n)) = 0$. 事实上, Kervaire 和 Milnor 曾指出, 每个同伦球都是 π - 流形, 但是如前所述, 确实存在一些 $8k+1$ 维和 $8k+2$ 维的怪球, 其 KO- 示性数非零.

根据前述单位球面中的等参超曲面的分类, 除了未分类的 $(g, m_+, m_-) = (4, 7, 8)$ 情形, 要研究 double 流形 $D(S_+^n)$ 的性质, 我们只需要考虑极小等参超曲面 Y 是齐性的或者 OT-FKM- 型的. 下面将就这两种情况分别进行讨论.

首先, 我们知道 S^n 中的齐性超曲面都自动是等参的, 它们可以表示为秩为 2 的对称空间的迷向表示的主轨道, 并且已被 Takagi 和 Takahashi [13] 完全分类. 从相应的 S^n 上的带某个法圆盘上的 slice 表示的余齐维 1 作用上, 我们得到了 $D(S_+^n)$ 上的余齐维 1 作用. 利用主轨道的迷向子群 K_0 和奇异轨道 (焦流形) $M_\pm$ 的迷向子群 $K_\pm$, 我们可以给出下列关于齐性超曲面 Y 的 $D(S_+^n)$ 的分类 (见表 1).

我们给出了对称对 $(E_6, T \cdot \text{Spin}(10))$ ($(g, m_+, m_-) = (4, 6, 9)$) 的 K_0, K_+, K_- 的计算过程, 这是相对来说比较复杂的情形. 特别地, 我们还研究了 $(g, m_+, m_-) = (3, 1, 1)$ 情形的 $D(S_+^4)$. 在这种情况下, 我们发现了一个非常有趣的现象:

$$D(S_+^4) \cong S^2 \times S^2 / \sigma,$$

其中 σ 是一个对合, 它不同于定向 Grassmannian 流形的对合 $\sim$,

$$G_2(\mathbb{R}^4) \cong S^2 \times S^2 / \sim.$$

其次, 研究 OT-FKM- 型极小等参超曲面的情况. 我们知道, 若 $m \not\equiv 0 \pmod{4}$, 在相差一个 S^{2l-1} 的刚体运动的意义下, (1.2) 中的 F 可由 m 和 l 完全决定; 若 $m \equiv 0 \pmod{4}$, Clifford 代数 $\mathcal{C}_{m-1}$ 在 $\mathbb{R}^l$ 上有不等价表示, 以其指标 — 整数 q 为参数^[35]. 在这第二种情形中, 我们把焦流形分别记作 $M_+(m, l, q)$ 和 $M_-(m, l, q)$. 根据文献 [7] 的结论, M_+ 有平凡法丛, 而 M_- 微分同胚于 S^m 上的 S^{l-1} 丛. 所以,

$$D(S_+^{2l-1}) \cong M_+ \times S^{m+1}.$$

至于 $D(S_-^{2l-1})$, 基于对 M_- 上球丛的拓扑的精确计算, 我们得到定理 3.2.

表 1 单位球面中的齐性 (等参) 超曲面

g	(m_+, m_-)	(U, K)	K_0	K_+	K_-
1	$n-1, n \geq 2$	$(S^1 \times SO(n+1), SO(n))$	$SO(n-1)$	$SO(n)$	$SO(n)$
2	$(p, q), p, q \geq 1$	$(SO(p+2) \times SO(q+2),$ $SO(p+1) \times SO(q+1))$	$SO(p) \times SO(q)$	$SO(p+1) \times SO(q)$	$SO(p) \times SO(q+1)$
3	(1, 1)	$(SU(3), SO(3))$	$\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$	$S(O(2) \times O(1))$	$S(O(1) \times O(2))$
3	(2, 2)	$(SU(3) \times SU(3), SU(3))$	T^2	$S(U(2) \times U(1))$	$S(U(1) \times U(2))$
3	(4, 4)	$(SU(6), Sp(3))$	$Sp(1)^3$	$Sp(2) \times Sp(1)$	$Sp(2) \times Sp(1)$
3	(8, 8)	(E_6, F_4)	$Spin(8)$	$Spin(9)$	$Spin(9)$
4	(2, 2)	$(SO(5) \times SO(5), SO(5))$	T^2	$SO(2) \times SO(3)$	$U(2)$
4	(4, 5)	$(SO(10), U(5))$	$SU(2)^2 \times U(1)$	$Sp(2) \times U(1)$	$SU(2) \times U(3)$
4	(6, 9)	$(E_6, T \cdot Spin(10))$	$U(1) \cdot Spin(6)$	$U(1) \cdot Spin(7)$	$S^1 \cdot SU(5)$
4	$(1, m-2), m \geq 3$	$(SO(m+2), SO(m) \times SO(2))$	$SO(m-2) \times \mathbb{Z}_2$	$SO(m-2) \times SO(2)$	$O(m-1)$
4	$(2, 2m-3), m \geq 3$	$(SU(m+2), S(U(m) \times U(2)))$	$S(U(m-2) \times T^2)$	$S(U(m-2) \times U(2))$	$S(U(m-1) \times T^2)$
4	$(4, 4m-5), m \geq 2$	$(Sp(m+2), Sp(m) \times Sp(2))$	$Sp(m-2) \times Sp(1)^2$	$Sp(m-2) \times Sp(2)$	$Sp(m-1) \times Sp(1)^2$
6	(1, 1)	$(G_2, SO(4))$	$\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$	$O(2)$	$O(2)$
6	(2, 2)	$(G_2 \times G_2, G_2)$	T^2	$U(2)$	$U(2)$

定理 3.2 ^[34] 给定一个奇素数 p , 若 $q_1 \not\equiv \pm q_2 \pmod{p}$, 则 $D(S_-^n)(m, l, q_1)$ 与 $D(S_-^n)(m, l, q_2)$ 有不同的同伦型.

如命题 3.1 中所述, $D(S_-^n)$ 是一个 π -流形, 它的 Stiefel-Whitney 类和 Pontrjagin 类都是零. 没有示性类这个工具, 通常是很难区分同胚型的. 定理 3.2 的论证是用到了模 $\mathbb{Z}_p$ 的 Wu 平方, Thom 同构和 Gysin 序列等拓扑工具.

4 等参函数与单位球面中 Willmore 子流形的新例

设 M 为浸入到 $n+p$ 维单位球面 S^{n+p} 中的一个 n 维紧致子流形. 用 h 表示 M 的第二基本型, S 表示 h 的模长平方, $\mathbf{H}$ 表示平均曲率向量场, 以及 H 表示 M 的平均曲率. 我们要用到以下指标:

$$1 \leq i, j, k \leq n, \quad n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n+p, \quad 1 \leq A, B, C \leq n+p,$$

用 $\{e_A\}$ 表示 TS^{n+p} 的一个局部单位正交基, 当它限制在 M^n 上, $\{e_i\}$ 就成为 TM 的一个局部单位正交基, 而 $\{e_\alpha\}$ 则成为法丛 $T^\perp M$ 的一个局部单位正交基. 把 h 的分量用 h_{ij}^α 表示, 则我们得到下列表达式:

$$S = \sum_{\alpha, i, j} (h_{ij}^\alpha)^2, \quad \mathbf{H} = \sum_{\alpha} H^\alpha e_\alpha, \quad H^\alpha = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}^\alpha, \quad H = |\mathbf{H}|.$$

我们把 M^n 叫作 S^{n+p} 的 Willmore 子流形, 若它是 Willmore 泛函的一个极值子流形. 所谓 Willmore 泛函, 我们指的是共形不变量 ^[36] $W(x) = \int_{M^n} (S - nH^2)^{\frac{n}{2}} dv$. 定义一个 M 上的非负函数 $\rho^2 := S - nH^2$, 则 M 是 Willmore 的一个等价条件如下.

定理 ^[37, 38] M^n 是 S^{n+p} 中的一个 Willmore 子流形当且仅当 $\forall \alpha$ ($n+1 \leq \alpha \leq n+p$), 有

$$-\rho^{n-2} \sum_{i, j} \left(R_{ij} - (n-1) \sum_{\beta} H^\beta h_{ij}^\beta \right) (h_{ij}^\alpha - H^\alpha \delta_{ij})$$

$$+ (n-1)\Delta(\rho^{n-2}H^\alpha) - \sum_{i,j}(\rho^{n-2})_{ij}(nH^\alpha\delta_{ij} - h_{ij}^\alpha) = 0, \quad (4.1)$$

其中 R_{ij} 是 Ricci 张量.

注 4.1 当 $n=2$ 时, (4.1) 退化成下面这个熟悉的 Willmore 曲面的描述,

$$\Delta^\perp H^\alpha + \sum_{\beta,i,j} H^\beta h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta - 2|H|^2 H^\alpha = 0, \quad 3 \leq \alpha \leq 2+p. \quad (4.2)$$

显然, S^{2+p} 中的每个极小曲面都自动是 Willmore 的. 换句话说, Willmore 曲面是球面中极小曲面的一个推广.

从上述定理可以知道所有的单位球面中的浸入极小 Einstein 流形都是 Willmore 子流形. 然而, 事实上, 在单位球面中存在某些 Willmore 超曲面, 它既不是极小的, 也不是 Einstein 的. 例如, Cartan 的极小等参超曲面是 Willmore 的, 但不是 Einstein 的; 在 Nomizu^[39] 的等参族里, 也存在某个超曲面是 Willmore 的, 但是既不是极小也不是 Einstein 的. 此外, 文献 [40] 刻画了单位球面中的所有等参 Willmore 超曲面.

本节利用 OT-FKM- 型等参函数给出了一系列单位球面 S^{n+p} 中 Willmore 子流形 M^n 的新例子, 这些例子是极小的, 但一般不是 Einstein 的.

前面已经讲过, 等参超曲面的焦流形 $M_+ := f^{-1}(+1)$ 和 $M_- := f^{-1}(-1)$ 是 S^{n+1} 的极小子流形 (实际上, 其第二基本型的模长为常数) (参见文献 [1]). 事实上, 如 Ge 和 Tang^[41] 所论证的, 这个结论对一般 Riemann 流形上等参超曲面的焦流形也同样成立.

回顾 S^{2l-1} 上 OT-FKM- 型等参函数的构造 (1.2), 我们发现其焦流形 $M_+ := f^{-1}(+1)$ 可以表示成一个代数集 $M_+ = \{x \in S^{2l-1} \mid \langle P_0 x, x \rangle = \cdots = \langle P_m x, x \rangle = 0\}$, 而且它满足定理 4.1.

定理 4.1^[42] S^{2l-1} 上 OT-FKM- 型等参多项式的焦流形 M_+ 都是 S^{2l-1} 的 Willmore 子流形.

注 4.2 一般来说, OT-FKM- 型等参函数的焦流形 M_+ 都不是 Einstein 的. 由于 $m_1 = m \geq 1$ 且 $m_2 = l - m - 1 \geq 1$, 我们发现若 $m = 1, 2, 3$ 或 $m > 10$,

$$\dim M_+ > \frac{1}{2}m(m+1) \geq \dim \text{Span}\{P_\alpha P_\beta x \mid \alpha, \beta = 0, 1, \dots, m, \alpha < \beta\}. \quad (4.3)$$

则对于 M_+ 上的任意单位切向量 $X \in T_x M_+$, 其 Ricci 曲率

$$\text{Ric}(X) = 2(l-m-2) + 2 \sum_{\alpha, \beta=0, \alpha < \beta}^m \langle X, P_\alpha P_\beta x \rangle^2$$

都不是常数, 换言之, M_+ 不是 Einstein 流形.

我们继续挖掘单位球面中 $g=4$ 的等参超曲面及其焦流形的几何性质, 得到了下面这个更为广泛的定理.

定理 4.2^[43] 单位球面中 $g=4$ 的等参超曲面的两个焦流形都是单位球面的 Willmore 子流形.

注 4.3 对比可知, 定理 4.2 大大推广了定理 4.1 的内容, 这个结论不依赖于单位球面中 $g=4$ 的等参超曲面的分类情况.

如前所述, 单位球面中的极小 Einstein 子流形都是 Willmore 子流形, 那么就有一个自然的问题, 既然焦流形都是极小的, 它们是 Einstein 的吗? 我们提到了, 对于 OT-FKM- 型等参超曲面, 其焦流形 M_+ 大部分都不是 Einstein 的. 实际上, 根据 (4.3) 给出的充分条件, 只有 7 个情况下, M_+ 可能是 Einstein 的. 在这里, 分别考虑 $g=4$ 的等参超曲面的各个焦流形, 我们给出了更加全面的回答.

定理 4.3 ^[43] 对于单位球面 S^{n+1} 中的 $g = 4$ 的等参超曲面的焦流形, 有

(1) OT-FKM- 型的焦流形 M_- 都不是 Einstein 的; OT-FKM- 型的焦流形 M_+ 是 Einstein 流形当且仅当它是 $(m_+, m_-) = (4, 3)$ 的齐性等参超曲面的焦流形, 且微分同胚于 $Sp(2)$;

(2) 当 $(m_+, m_-) = (2, 2)$ 时, 微分同胚于定向 Grassmann 流形 $\widetilde{G}_2(\mathbb{R}^5)$ 的焦流形是 Einstein 的, 另一个微分同胚于 $\mathbb{C}P^3$ 的焦流形不是 Einstein 的;

(3) 当 $(m_+, m_-) = (4, 5)$ 时, 两个焦流形都不是 Einstein 的.

注 4.4 在 OT-FKM- 型等参族中, 对应 $(m_+, m_-) = (4, 3)$ 有两个不等价的例子, 一个是齐性的, 另一个是非齐性的. 奇怪的是, 只有对应齐性情形的 M_+ 才是 Einstein 的.

注 4.5 根据单位球面中 $g = 4$ 的等参超曲面的分类, 定理 4.3 实际上给出了除 $(m_+, m_-) = (7, 8)$ 以外的所有 Einstein 的焦流形的分类, 而且, 所有已知的 $(m_+, m_-) = (7, 8)$ 的例子都是 OT-FKM- 型的, 所以定理 4.3 也证明了它们都不是 Einstein 的.

致谢 衷心感谢唐梓洲教授在作者 5 年研究生期间给予的细心指导和大力帮助, 感谢葛建全博士、谢余铨博士和钱超博士在作者研究生期间的学术合作及交流.

参考文献

- 1 Cecil T E, Ryan P T. Tight and Taut Immersions of Manifolds. Research Notes in Math. London: Pitman, 1985
- 2 Münzner H F. Isoparametric hyperflächen in sphären, I and II. Math Ann, 1980, 251: 57–71; 1981, 256: 215–232
- 3 Dorfmeister J, Neher E. Isoparametric hypersurfaces, case $g = 6$, $m = 1$. Comm Algebra, 1985, 13: 2299–2368
- 4 Miyaoka R. Isoparametric hypersurfaces with $(g, m) = (6, 2)$. Ann Math, 2013, 177: 53–110
- 5 Abresch U. Isoparametric hypersurfaces with four or six distinct principal curvatures. Math Ann, 1983, 264: 283–302
- 6 Cecil T E, Chi Q S, Jensen G R. Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures. Ann Math, 2007, 166: 1–76
- 7 Ferus D, Karcher H, Münzner H F. Clifford algebren und neue isoparametrische Hyperflächen. Math Z, 1981, 177: 479–502
- 8 Stolz S. Multiplicities of Dupin hypersurfaces. Invent Math, 1999, 138: 253–279
- 9 Tang Z Z. Isoparametric hypersurfaces with four distinct principal curvatures. Chin Sci Bull, 1991, 36: 1237–1240
- 10 Wang Q M. Isoparametric functions on Riemannian manifolds, I. Math Ann, 1987, 277: 639–646
- 11 Chi Q S. Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, III. J Differential Geom, 2013, 94: 487–522
- 12 Immervoll S. On the classification of isoparametric hypersurfaces with four distinct principal curvatures in spheres. Ann of Math (3), 2008, 168: 1011–1024
- 13 Takagi R, Takahashi T. On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a sphere. Differ Geom, 1972, 469–481
- 14 Hsiang W Y, Lawson H B. Minimal submanifolds of low cohomogeneity. J Differential Geom, 1971, 5: 1–38
- 15 Ozeki H, Takeuchi M. On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres, I and II. Tôhoku Math J, 1975, 27: 515–559; 1976, 28: 7–55
- 16 Yau S T. Problem section. In: Yau S T, eds. Seminar on Differential Geometry. Ann of Math Stud. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1982, 669–706
- 17 Choi H I, Wang A N. A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces. J Differential Geom, 1983, 18: 559–562
- 18 Montiel S, Ros A. Minimal immersions of surfaces by the first eigenfunctions and conformal area. Invent Math, 1986, 83: 153–166
- 19 Tang Z Z, Yan W J. Isoparametric foliation and Yau conjecture on the first eigenvalue. J Differential Geom, 2013, 94: 539–558
- 20 Muto H, Ohnita Y, Urakawa H. Homogeneous minimal hypersurfaces in the unit sphere and the first eigenvalue of the Laplacian. Tôhoku Math J (2), 1984, 36: 253–267
- 21 Kotani M. The first eigenvalue of homogeneous minimal hypersurfaces in a unit sphere $S^{n+1}(1)$. Tôhoku Math J (2), 1985, 37: 523–532
- 22 Muto H. The first eigenvalue of the Laplacian of an isoparametric minimal hypersurface in a unit sphere. Math Z, 1988, 197: 531–549

- 23 Takagi R. A class of hypersurfaces with constant principal curvatures in a sphere. *J Differential Geom*, 1976, 11: 225–233
- 24 Ge J Q, Tang Z Z. Chern conjecture and isoparametric hypersurfaces. In: Shen Y B, Shen Z M, Yau S T, eds. *Differential Geometry — under the Influence of S S Chern*. Beijing-Boston: Higher Education Press and International Press, 2012, arXiv:1008.3683
- 25 Haefliger A, Hirsch M W. Immersions in the stable range. *Ann Math*, 1962, 75: 231–241
- 26 Solomon B. Quartic isoparametric hypersurfaces and quadratic forms. *Math Ann*, 1992, 293: 387–398
- 27 Lichnerowicz A. Spineurs harmoniques. *C R Acad Sci Paris Ser A*, 1963, 257: 7–9
- 28 Hitchin N. Harmonic spinors. *Adv Math*, 1974, 14: 1–55
- 29 Schoen R, Yau S T. On the structure of manifolds with positive scalar curvature. *Manuscripta Math*, 1979, 28: 159–183
- 30 Gromov M, Lawson H B. The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature. *Ann Math*, 1980, 111: 423–434
- 31 Gromov M, Lawson H B. Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds. *Publ Math IHES*, 1983, 58: 83–196
- 32 Rosenberg J, Stolz S. Metrics of positive scalar curvature and connections with surgery. In: Cappell S, Ranicki A, Rosenberg J, eds. *Surveys on Surgery Theory*, vol. 2. *Ann of Math Stud*. Princeton: Princeton University Press, 2001, 353–386
- 33 Ge J Q, Tang Z Z. Isoparametric functions and exotic spheres. *J Reine Angew Math*, doi: 10.1515/crelle-2012-0005, 2012
- 34 Tang Z Z, Xie Y Q, Yan W J. Schoen-Yau-Gromov-Lawson theory and isoparametric foliations. *Comm Anal Geom*, 2012, 20: 989–1018
- 35 Wang Q M. On the topology of Clifford isoparametric hypersurfaces. *J Differential Geom*, 1988, 27: 55–66
- 36 Wang C P. Moebius geometry of submanifolds in S^n . *Manuscripta Math*, 1998, 96: 517–534
- 37 Guo Z, Li H, Wang C P. The second variational formula for Willmore submanifolds in S^n . *Results Math*, 2001, 40: 205–225
- 38 Pedit F J, Willmore T J. Conformal geometry. *Atti Semin Mat Fis Univ Modena*, 1988, 36: 237–245
- 39 Nomizu K. Some results in E. Cartan's theory of isoparametric families of hypersurfaces. *Bull Amer Math Soc*, 1973, 79: 1184–1188
- 40 Li H. Willmore hypersurfaces in a sphere. *Asian J Math*, 2001, 5: 365–377
- 41 Ge J Q, Tang Z Z. Geometry of isoparametric hypersurfaces in Riemannian manifolds. *Asian J Math*, in press, 2012
- 42 Tang Z Z, Yan W J. New examples of Willmore submanifolds in the unit sphere via isoparametric functions. *Ann Global Anal Geom*, 2012, 42: 403–410
- 43 Qian C, Tang Z Z, Yan W J. New examples of Willmore submanifolds in the unit sphere via isoparametric functions, II. *Ann Global Anal Geom*, 2013, 43: 47–62

Isoparametric functions and related topics

YAN WenJiao

Abstract The famous Yau conjecture asserts that the first eigenvalue of every closed minimal embedded hypersurface in the unit sphere is just its dimension. Over several decades, research on the eigenvalues of the Laplace operator has always been a core issue in the study of geometry, many geometricians are committed to the study of Yau conjecture in recent years. However, the results that ever known are only some inequalities on the estimate of the first eigenvalue. As a main result of this paper, we show that the first eigenvalue of a closed minimal isoparametric hypersurface in the unit sphere is just its dimension. Furthermore, we show that under some dimensional conditions, the focal submanifolds of an isoparametric hypersurface in the unit sphere also have their dimensions as the first eigenvalues.

As the second main result of this paper, motivated by the famous Schoen-Yau-Gromov-Lawson surgery theory on scalar curvature, we make a surgery at the embedding hypersurface in a Riemannian manifold, constructing a new manifold with good geometry properties, which is called a double manifold. In particular, we construct a

double manifold associated with a minimal isoparametric hypersurface in the unit sphere. The resulting double manifold has complicated topological properties (but its characteristic classes can be precisely described) and carries a metric of positive scalar curvature, more importantly, the isoparametric foliation is kept.

A more extensive definition of Willmore surface is the Willmore submanifold, which is an extremal submanifold of Willmore functional in spheres. Examples of Willmore submanifolds in the unit sphere are scarce in the literature. As the last two main results of this paper, by taking advantage of isoparametric functions of OT-FKM-type, we give a series of new examples of Willmore submanifolds in the unit sphere; hereafter, we give a unified geometric proof that both of focal submanifolds of every isoparametric hypersurface in spheres with four distinct principal curvatures are Willmore. These new examples of Willmore submanifolds are all minimal in spheres, but in general not Einstein.

Keywords Yau conjecture, isoparametric function, isoparametric hypersurface, focal submanifolds, Schoen-Yau-Gromov-Lawson theory, Willmore submanifolds

MSC(2010) 35P15, 53C40

doi: 10.1360/012013-125