考虑复杂机架柔性的并联构型装备刚度半解析建模方法

王友渔, 黄田*, 梅江平, 赵学满, Derek G. Chetwynd

① 天津大学机械工程学院, 天津 300072;

The University of Warwick, Coventry CV4 7AL, UK

* 联系人, E-mail: htiantju@public.tpt.tj.cn

2007-07-23 收稿, 2007-12-04 接受

国家自然科学基金(批准号: 50535010, 50510488)和英国皇家学会-英中国际合作项目(批准号: IJP-2005/R4)资助项目

摘要 刚度建模是并联构型装备(PKM)设计的重要内容. 以 5 自由度混联机器人 TriVariant-B 为例, 提出了一种考虑复杂机架柔性的并联构型装备整机静刚度半解析建模方法. 该方法借助子结构综合思想, 将整机结构分解为机构和机架两个子系统, 分别采用解析法和有限元静态凝聚技术建立两者的刚度模型, 继而根据线性叠加原理构造整机刚度模型. 在建模过程中, 利用虚功原理和全变形雅可比矩阵构造出各子系统的刚度矩阵, 并侧重研究约束支链弯曲刚度及机架/机构界面刚度处理问题. 在此基础上, 考察整机系统刚度在任务空间中的分布规律, 借助全域性能指标评价各子系统中主要构件弹性对整机刚度的影响, 并通过有限元和实验验证了该方法的有效性.

关键词
并联构型装备
刚度
半解析建模

刚度建模是并联构型装备设计的重要环节, 也是目前尚未妥善解决的技术难题^[1]. 问题难点主要在于: 由于系统刚度随位形变化, 故采用有限元法建模时需要做模型网格重新划分, 因而必须花费大量计算时间才能得到刚度在整个工作空间中的分布. 特别是当计及几何形状复杂机架的柔性时, 这一问题变得格外突显. 因而, 寻求解决上述问题的有效途径对提高设计效率和精度便显得尤为重要.

国内外学者在 PKM 刚度建模方面已做了大量工作. Gosselin^[2]借助虚功原理提出一种仅考虑驱动关节弹性时操作力与末端变形的映射模型. Clinton 等人^[3~8]沿用这种思路做了类似工作. 然而, 对于其中的少自由度并联机构, 上述工作均未考虑对末端变形在约束空间中投影有贡献构件弹性的影响. 针对这一问题, Zhang 等人^[9~12]以 Tricept 机器人为例, 分别研究了考虑约束支链弹性的刚度建模问题. Corradini 等人^[13,14]借助有限元和半解析方法, 分别构造了 H4 和 Isoglide 并联机构的刚度模型. 然而, 所建立的模

型均未计及机架结构弹性对整机系统刚度的贡献. 此外, 以一类 3 平动自由度并联机床为对象, Huang 等人^[15,16]借助子结构综合法提出了一种考虑机架弹性的整机静刚度建模方法. 然而, 该方法仅适于连架副为滑移副且机架可用梁单元描述的简单情况, 因而缺乏通用性.

针对连架副位置不变的一类 PKM 系统, 本文提出一种计及复杂机架柔性的 PKM 整机静刚度半解析建模通用方法. 其基本思路是: 首先将整机分解为机构和机架两个子系统, 在导出两者全雅可比矩阵^[17]的基础上, 分别采用解析法和子结构综合法建立两者的刚度模型, 最后采用线性叠加原理构造整机系统的刚度半解析模型. 作为工程实例, 以天津大学发明并与企业合作开发的 TriVariant-B 5 自由度混联机器人^[18,19]为对象, 采用上述方法建立整机刚度模型, 并通过有限元及实验验证其有效性.

1 建模理论

为了不失一般性, 考察如图 1 所示的 PKM 系统.

1) 王友渔, 黄田, 梅江平, 等. Tricept 机器人静刚度解析建模方法研究. 机械工程学报, 已录用

图1 PKM系统结构简图

该系统由机架、动平台和由铰链连接两者的若干支链组成，分别构成机构与机架两个子系统，其中连架铰链的中点构成两个子系统的连接界面。根据子结构综合理论，这类系统的刚度建模可分为两步完成：1) 构造机构与结构两个子系统的刚度模型；2) 在同一外载荷引起末端变形的线性叠加。

为了构造机构子系统的刚度模型，暂将机架子系统视为刚体，并引入下标“m”表示机构子系统。

在如图1的固定参考系 $O-xyz$ 下，令作用在动平台参考点 O' 的六维广义力为 τ ，所引起的动平台六维位姿变形为 $\Delta \rho_m$ ，则由虚功原理，可得

$$\tau^T \Delta \rho_m = f^T \Delta \rho, \quad (1)$$

式中 f 和 $\Delta \rho$ 分别表示作用在支链与动平台界面节点（支链末端）的广义内力及其引起的广义变形。而 $\Delta \rho_m$ 和 $\Delta \rho$ 满足如下几何映射关系

$$\Delta \rho = J_m \Delta \rho_m, \quad (2)$$

式中 J_m 表示机构子系统的全变形雅可比矩阵，它描述了机构各支链末端广义变形与动平台位姿变形间的映射关系。另外，根据虎克定律，有

$$f = \bar{K}_m \Delta \rho, \quad (3)$$

式中 $\bar{K}_m$ 表示机构子系统的支链部件刚度矩阵。

将(2)、(3)式代入(1)式，可得

$$\tau = K_m \Delta \rho_m, \quad (4)$$

式中 $K_m = J_m^T \bar{K}_m J_m$ 表示机构子系统的刚度矩阵。同理，为了建立机架子系统的刚度模型，设机构子系统为刚体，并引入下标“f”表示机架子系统。令由 τ 引起的动平台六维位姿变形为 $\Delta \rho_f$ ，则由虚功原理，可得

$$\tau^T \Delta \rho_f = f^T \Delta \rho. \quad (5)$$

在此， f 和 $\Delta \rho$ 分别为作用在支链与机架界面节点上的广义内力及其引起的广义变形。而 $\Delta \rho_f$ 和 $\Delta \rho$ 满足如下

关系：

$$\Delta \rho = J_f \Delta \rho_f, \quad (6)$$

式中 J_f 为机架子系统的全变形雅可比矩阵，它描述了机架界面节点广义变形与动平台位姿变形间的映射关系。另外，根据虎克定律，存在

$$f = \bar{K}_f \Delta \rho, \quad (7)$$

式中 $\bar{K}_f$ 为机架子系统的部件刚度矩阵。

将(6)、(7)式代入(5)式，可得

$$\tau = K_f \Delta \rho_f, \quad (8)$$

式中 $K_f = J_f^T \bar{K}_f J_f$ 为机构子系统的刚度矩阵。

最后，利用线性叠加原理，即可得到整机系统的刚度模型

$$\tau = K \Delta, \quad (9)$$

式中 $\Delta = \Delta_m + \Delta_f$ ， $K^{-1} = K_m^{-1} + K_f^{-1}$ 。

有关 J_m 、 J_f 、 $\bar{K}_m$ 和 $\bar{K}_f$ 的构造方法将结合 TriVariant-B 机器人的 2 自由度球面并联机构及机架在第 2、3 节中详细介绍。

2 TriVariant-B 机器人系统简介

如图2所示，TriVariant-B机器人^[19]由一2自由度球面并联机构(SPM)和一条末端装有2自由度转头并通过滑移副与之串接的主动支链(P支链)组成，其中球面并联机构由一条2自由度恰约束从动支链(U支链)和2条无约束主动支链(UPS支链)组成。在此U、P和S分别表示虎克铰、滑移副和球铰，P表示主动滑

图2 TriVariant-B 机器人实体造型

移副.

图3示出了TriVariant-B机器人的结构简图,当机构处于初始参考位形时用虚线表示,处于任意位形时用粗实线表示.图3中, $B_i (i=1,2,3)$ 为支链*i*连架虎克铰中心,由 B_i 确定的平面与水平面的夹角为 ϕ ; $A_i (i=1,2)$ 为 UPS 支链*i*中球铰的中心, A_3 为 U 支链轴线与过 A_i 且与该轴线垂直的平面的交点.在机架上建立固定参考系 $B_3-x_3y_3z_3$, 其中 x_3 轴与 U 支链连架虎克铰外圈轴线重合, z_3 轴与水平面垂直.同时建立辅助参考系 $B_i-x_iy_iz_i (i=1,2)$, 其中 z_i 与 z_3 平行, y_i 与 $\overline{B_3B'_i}$ 平行.为了描述 UPS 及 U 支链的姿态,在各支链上建立连体系 $B_i-u_iv_iw_i (i=1,2,3)$, 其中 w_i 与各支链轴线重合, u_i 与各支链连架虎克铰外圈轴线重合, v_i 满足右手定则.在此,定义 u_i, v_i 及 w_i 分别为 u_i, v_i 及 w_i 轴的单位方向矢量. TriVariant-B 机器人的任务空间为一半径为 R , 高为 h 的圆柱体, 记作 W_t ; 与之对应的 2 自由度并联机构的任务空间为一以 B_3 为球心, r_3 为半径, β 为半锥角的球面, 记作 S_t .

图3 TriVariant-B 机器人结构简图

3 全变形雅可比的构造

3.1 J_m 的构造

如图3所示,在系 $B_3-x_3y_3z_3$ 下,动平台参考点 A_3 的位矢 r_3 可分别表示为

$$r_3 = b_i + q_i w_i - a_i, \quad i=1,2, \quad (10)$$

$$r_3 = r_3 w_3, \quad (11)$$

式中 r_3 为 U 支链的固定杆长, $q_i (i=1,2)$ 为 UPS 支链的杆长; $a_i = R_3 a_{i0}$, a_{i0} 和 b_i 分别为点 A_i 和 B_i 在系 $A_3-u_3v_3w_3$ 和 $B_3-x_3y_3z_3$ 下的位矢, R_3 为系 $A_3-u_3v_3w_3$ 关于系 $B_3-x_3y_3z_3$ 的姿态矩阵.

为了构造机构子系统中各部件变形与 U 支链末端(动平台)位姿变形间的关系,暂将机架视为刚体.对(10), (11)式两端取一阶摄动,得

$$\Delta p = \Delta q_i w_i + q_i \Delta a_i \times w_i - \Delta a_i \times a_i, \quad i=1,2, \quad (12)$$

$$\Delta p - \Delta'_p = r_3 (\Delta a_i - \Delta'_a) \times w_3, \quad (13)$$

式中 $\Delta_p (\Delta'_p)$ 和 $\Delta_a (\Delta'_a)$ 分别为由各支链(U 支链)弹性引起的 U 支链末端位姿变形; Δ_{ai} 和 $\Delta q_i (i=1,2)$ 表示第*i*条 UPS 支链的角变形和沿轴线的线变形.

将(12)式两端同点乘 w_i , 得

$$\Delta q_i = w_i^T \Delta p + (a_i \times w_i)^T \Delta a_i. \quad (14)$$

在系 $A_3-u_3v_3w_3$ 下, 可将 Δ'_p 和 Δ'_a 表示为

$$\begin{cases} \Delta'_p = \Delta p_u u_3 + \Delta p_v v_3 + \Delta p_w w_3, \\ \Delta'_a = \Delta \alpha_u u_3 + \Delta \alpha_v v_3 + \Delta \alpha_w w_3, \end{cases} \quad (15)$$

式中 $\Delta p_{u(v)}$ 和 $\Delta \alpha_{u(v)}$ 分别为 U 支链弯曲变形引起的末端沿(绕) u_3 和 v_3 方向的线变形(角变形); Δp_w ($\Delta \alpha_w$) 分别为 U 支链拉压(扭转)变形引起的末端沿(绕) w_3 方向的线变形(角变形). 将(15)式代入(13)式, 并在两端分别点乘 u_3, v_3 和 w_3 , 得

$$u_3^T \Delta p - r_3 v_3^T \Delta a_i = \Delta p_u - r_3 \Delta \alpha_v, \quad (16)$$

$$v_3^T \Delta p + r_3 u_3^T \Delta a_i = \Delta p_v + r_3 \Delta \alpha_u, \quad (17)$$

$$w_3^T \Delta p = \Delta p_w. \quad (18)$$

设 U 支链虎克铰两轴线的单位矢量分别为 u'_3 和 v'_3 , 令 $n = u'_3 \times v'_3$, 则由该副提供的约束可得

$$n^T (\Delta a_i - \Delta'_a) = 0. \quad (19)$$

注意到 U 支链末端的挠度与转角满足如下变形协调条件(证明见节 3.1.2), 即

$$\begin{pmatrix} \Delta \alpha_u \\ \Delta \alpha_v \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \Delta p_u \\ \Delta p_v \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

将(14)~(19)式写成矩阵形式, 并代入(20)式, 有

$$\Delta p = J_m \Delta_m, \quad (21)$$

式中

$$\Delta_m = \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta a \end{pmatrix}, \quad \Delta p = \begin{pmatrix} \Delta p_a \\ \Delta p_c \end{pmatrix}, \quad J_m = \begin{bmatrix} J_a \\ J_c \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{q} &= (\Delta q_1 \quad \Delta q_2)^T, \\ \Delta \mathbf{c} &= (\Delta p_w \quad \Delta p_u \quad \Delta p_v \quad \Delta \alpha_w)^T, \\ \mathbf{J}_a &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T & (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{w}_1)^T \\ \mathbf{w}_2^T & (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{w}_2)^T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J}_c &= \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{J}_{cv}, \quad \mathbf{J}_{cv} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_3^T & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{u}_3^T & -r_3 \mathbf{v}_3^T \\ \mathbf{v}_3^T & r_3 \mathbf{u}_3^T \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{n}^T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_c &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-r_3 b_{21} & -r_3 b_{22} & 0 \\ 0 & r_3 b_{11} & 1+r_3 b_{12} & 0 \\ 0 & b_{11} \mathbf{n}^T \mathbf{u}_3 & b_{12} \mathbf{n}^T \mathbf{u}_3 & \mathbf{n}^T \mathbf{w}_3 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{J}_a$ 和 $\mathbf{J}_c$ 被定义为 SPM 的驱动和约束变形雅可比矩阵, 它们分别表征了 $\Delta \rho_a$ 和 $\Delta \rho_c$ 与 $\Delta \mathbf{m}$ 间的映射关系. 显然, $\mathbf{J}_m$ 即为(2)式中的机构子系统的全变形雅可比矩阵.

3.2 $\mathbf{J}_f$ 的构造

为了构造 $\mathbf{J}_f$, 设机构中各部件为刚体. 对(10)、(11)式两端取一阶摄动, 得

$$\Delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{p}_{Bi} + \Delta \alpha_{Bi} \times \mathbf{b}_i + q_i \Delta \alpha_{Bi} \times \mathbf{w}_i - \Delta \alpha \times \mathbf{a}_i, \quad (22)$$

$$\Delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{p}_i + r_3 \Delta \alpha \times \mathbf{w}_3. \quad (23)$$

式中, $\Delta \mathbf{p}_i (\Delta \alpha_i)$ 表示连架铰中点 B_i ($i=1,2,3$) 的线位移(角位移).

将(22)式两端分别点乘 $\mathbf{w}_i$, 得

$$\mathbf{w}_i^T \Delta \mathbf{p} + (\mathbf{a}_i \times \mathbf{w}_i)^T \Delta \alpha = \mathbf{w}_i^T \Delta \mathbf{p}_i + (\mathbf{b}_i \times \mathbf{w}_i)^T \Delta \alpha_i. \quad (24)$$

将(23)式两端分别点乘 $\mathbf{u}_3$ 、 $\mathbf{v}_3$ 和 $\mathbf{w}_3$, 得

$$\mathbf{u}_3^T \Delta \mathbf{p} - r_3 \mathbf{v}_3^T \Delta \alpha = \mathbf{u}_3^T \Delta \mathbf{p}_i, \quad (25)$$

$$\mathbf{v}_3^T \Delta \mathbf{p} + r_3 \mathbf{u}_3^T \Delta \alpha = \mathbf{v}_3^T \Delta \mathbf{p}_i, \quad (26)$$

$$\mathbf{w}_3^T \Delta \mathbf{p} = \mathbf{w}_3^T \Delta \mathbf{p}_i. \quad (27)$$

借鉴(19)式的构造方法, 得

$$\mathbf{n}^T \Delta \alpha = \mathbf{n}^T \Delta \alpha_i. \quad (28)$$

将(24)~(28)式写成矩阵形式, 得

$$\Delta \rho = \mathbf{J}_f \Delta \mathbf{f}, \quad (29)$$

式中

$$\Delta \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{p} \\ \Delta \alpha \end{pmatrix}, \quad \Delta \rho = \begin{pmatrix} \Delta \rho_a \\ \Delta \rho_c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_f = \mathbf{J}^{*+} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_a \\ \mathbf{J}_{cv} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\Delta \rho_a &= \begin{pmatrix} \Delta \rho_1 \\ \Delta \rho_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta \rho_c = \Delta \rho_3, \quad \Delta \rho_i = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{p}_i \\ \Delta \alpha_i \end{pmatrix}, \\ \mathbf{J}' &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}'_a & \mathbf{0}_{2 \times 6} \\ \mathbf{0}_{4 \times 12} & \mathbf{J}'_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{*+} = [\mathbf{J}'^T \mathbf{J}']^{-1} \mathbf{J}'^T, \\ \mathbf{J}'_a &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T & (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{w}_1)^T & \mathbf{0}_{1 \times 6} \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{w}_2^T & (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{w}_2)^T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J}'_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}_3^T & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{u}_3^T & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{v}_3^T & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{n}^T \end{bmatrix},\end{aligned}$$

显然, $\mathbf{J}_f$ 即为(6)式中的机架子系统的全变形雅可比矩阵.

4 系统静刚度的构造

4.1 $\bar{\mathbf{K}}_m$ 的构造

将机架视为刚体, 与(21)式中的 $\Delta \rho$ 所对应的 $\mathbf{f}$ 可表示为由与末端相连铰链的铰内力(力矩)集合构成的广义内力向量, 其中 $\mathbf{f}_a$ 和 $\mathbf{f}_c$ 分别被定义为支链的驱动广义力和约束广义力, 各自对应的广义弹性变形为 $\Delta \rho_a$ 和 $\Delta \rho_c$. 据此, $\mathbf{f}_a$ 和 $\mathbf{f}_c$ 可定义为

$$\mathbf{f}_a = (f_{a1} \quad f_{a2})^T, \quad \mathbf{f}_c = (f_{cw} \quad f_{cu} \quad f_{cv} \quad f_{ct})^T, \quad (30)$$

式中 f_{ai} ($i=1,2$) 分别表示作用在 UPS 支链 i 末端的轴向力; f_{cw} 表示作用在 U 支链末端的轴向约束力; f_{ct} 表示作用在 U 支链末端绕 $\mathbf{w}_3$ 方向的约束力矩; f_{cu} 和 f_{cv} 分别表示作用在 U 支链末端沿 $\mathbf{u}_3$ 和 $\mathbf{v}_3$ 方向的广义约束力. 在此, “广义”是指 f_{cu} 和 f_{cv} 在 Δp_u 和 Δp_v 上所做的虚功的和等于 U 支链的弯曲变形能. 因此, (3)式可写成分量形式

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{K}_a \Delta \rho_a, \quad \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_c \Delta \rho_c, \quad \bar{\mathbf{K}}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & \\ & \mathbf{K}_c \end{bmatrix}, \quad (31)$$

式中 $\mathbf{K}_a$ 和 $\mathbf{K}_c$ 被分别定义为 SPM 支链部件的驱动刚度和约束刚度矩阵. 以下详细研究 $\mathbf{K}_a$ 和 $\mathbf{K}_c$ 的构造方法.

() $\mathbf{K}_a$ 的构造. 考虑到 UPS 支链仅承受轴向力, 故 $\mathbf{K}_a$ 可写成

$$\mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} k_{a1} & \\ & k_{a2} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

式中 k_{ai} 为第 i 条 UPS 支链的轴向刚度系数. 则根据图 4 所示, 可将其抽象成一串联弹簧系统. 于是

$$k_{ai}^{-1} = \sum_{j=1}^7 k_{aij}^{-1}, \quad i=1,2. \quad (33)$$

式中 k_{aij} ($j=1, \dots, 7$) 依次表示与动平台连接的球铰链、伸缩杆、螺母、丝杠、后轴承、套筒以及连架虎克铰沿支链轴向的刚度系数, 其中丝杠螺母副的刚度与螺母和丝杠固定端轴承的间距成反比; 连架虎克铰及与动平台相连球铰链的刚度参见王友渔等文¹⁾; 而其他构件的轴向刚度均可视为常数.

图 4 UPS 支链结构简图

() K_c 的构造. 考虑到 U 支链同时承受轴向力、剪力和扭矩, 故 K_c 可写成分块矩阵形式

$$K_c = \begin{bmatrix} k_{ca} & & \\ & K_{cb} & \\ & & k_{ct} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

式中 K_{cb} 为 2×2 矩阵, 表示 U 支链末端的等效弯曲刚度; k_{ca} (k_{ct}) 表示 U 支链末端沿(绕)支链轴线的拉压(扭转)刚度.

参见图 5, k_{ca} 和 k_{ct} 可分别为

$$k_{ca}^{-1} = \sum_{i=1}^2 k_{cai}^{-1}, \quad k_{ct}^{-1} = \sum_{i=1}^2 k_{cti}^{-1}, \quad i=1, 2, \quad (35)$$

式中 k_{cai} (k_{cti}) ($i=1, 2$) 依次表示 U 支链套筒及连架虎克铰沿(绕)支链轴线的线刚度(角刚度), 其中前者为常数, 后者可参见王友渔等文¹⁾确定.

为了构造 K_{cb} 且不失一般性, 可将 U 支链处理成如图 5 所示的空间梁单元. 在消除 UPS 支链弹性及 U

图 5 U 支链受力自由体

支链轴向弹性引起刚体运动后的局部坐标系 $A_3 - u_3 v_3 w_3$ 下, 将梁单元 $B_3 A_3$ 按图 5 编号, 即与连架虎克铰连接节点的编号为 1, 支链末端节点编号为 2. 则 K_{cb} 可通过以下两步构造.

() 能量等效原理. 如前所述, 广义力 f_{cu} 和 f_{cv} 的等效原则为它们在 U 支链末端变形 Δp_u 和 Δp_v 上所做的虚功与支链的变形能相等. 于是, 由虚功原理可得

$$\begin{pmatrix} \Delta p_u \\ \Delta p_v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_{cu} \\ f_{cv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta p_u \\ \Delta p_v \\ \Delta \alpha_u \\ \Delta \alpha_v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q_u \\ Q_v \\ M_u \\ M_v \end{pmatrix}, \quad (36)$$

式中 $Q_{u(v)}$ 和 $\Delta p_{u(v)}$ 分别为梁单元节点 2 沿 u_3 (v_3) 轴的剪力和位移; $M_{u(v)}$ 和 $\Delta \alpha_{u(v)}$ 则分别表示该节点处绕 u_3 (v_3) 轴的扭矩和转角.

根据虎克定律可得

$$\begin{pmatrix} Q_u \\ Q_v \\ M_u \\ M_v \end{pmatrix} = \bar{K}_e \begin{pmatrix} \Delta p_u \\ \Delta p_v \\ \Delta \alpha_u \\ \Delta \alpha_v \end{pmatrix}, \quad (37)$$

式中 $\bar{K}_e$ 被定义为梁单元的界面刚度矩阵, 可参见王友渔等文¹⁾借助静态凝聚技术确定. 又注意到

$$\begin{pmatrix} f_{cu} \\ f_{cv} \end{pmatrix} = K_{cb} \begin{pmatrix} \Delta p_u \\ \Delta p_v \end{pmatrix}. \quad (38)$$

将(37)和(38)式代入(36)式, 可得

$$\begin{pmatrix} \Delta p_u \\ \Delta p_v \end{pmatrix}^T K_{cb} \begin{pmatrix} \Delta p_u \\ \Delta p_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta p_u \\ \Delta p_v \\ \Delta \alpha_u \\ \Delta \alpha_v \end{pmatrix}^T \bar{K}_e \begin{pmatrix} \Delta p_u \\ \Delta p_v \\ \Delta \alpha_u \\ \Delta \alpha_v \end{pmatrix}. \quad (39)$$

() 变形协调条件. 如前所述, 将 UPS 支链弹性及 U 支链轴向弹性引起的刚体运动消除后, U 支链末端为一受约束刚体, 其位置与姿态应满足整个系统的变形协调条件. 在此, (14)和(18)式可分别改写为

$$w_i^T A_p + (a_i \times w_i)^T A_\alpha = 0, \quad i=1, 2, \quad (40)$$

$$w_3^T A_p = 0, \quad (41)$$

式中 A_p 和 A_α 应被理解为仅考虑 U 支链弯曲变形时其末端的位姿变形, 即

1) 同第 364 页脚注

$$\begin{cases} A_p = [u_3 \quad v_3 \quad w_3] \begin{pmatrix} \Delta p_u \\ \Delta p_v \\ 0 \end{pmatrix} = [u_3 \quad v_3] \begin{pmatrix} \Delta p_u \\ \Delta p_v \end{pmatrix}, \\ A_\alpha = [u_3 \quad v_3 \quad w_3] \begin{pmatrix} \Delta \alpha_u \\ \Delta \alpha_v \\ 0 \end{pmatrix} = [u_3 \quad v_3] \begin{pmatrix} \Delta \alpha_u \\ \Delta \alpha_v \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (42)$$

将(42)式代入(40)和(41)式, 写成矩阵形式, 得

$$\begin{pmatrix} \Delta \alpha_u \\ \Delta \alpha_v \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \Delta p_u \\ \Delta p_v \end{pmatrix}, \quad (43)$$

式中

$$\begin{aligned} B &= -B_\alpha^+ B_p = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \\ B_p &= [w_1 \quad w_2 \quad w_3]^T [u_3 \quad v_3], \\ B_\alpha &= [a_1 \times w_1 \quad a_2 \times w_2 \quad 0]^T [u_3 \quad v_3], \\ B_\alpha^+ &= (B_\alpha^T B_\alpha)^{-1} B_\alpha^T, \end{aligned}$$

在此, B 即为(20)式所给出的变形协调条件.

将(43)式代入(39)式, 可得

$$K_{cb} = \begin{bmatrix} E_2 \\ B \end{bmatrix}^T \bar{K}_e \begin{bmatrix} E_2 \\ B \end{bmatrix}, \quad (44)$$

式中 E_2 为二阶单位阵. 值得指出, f_{cu} 和 f_{cv} 是约束力螺旋在 U 支链末端 u_3 和 v_3 方向的投影, 它们同时包含有力和力矩成分, 因此所引起变形 Δc_{pu} 和 Δc_{pv} 一定是耦合的. 于是, K_{cb} 应为二阶满阵, 而不能采用虚设铰链法表示成对角阵^[9~11].

4.2 $\bar{K}_f$ 的构造

为了构造 $\bar{K}_f$, 设机架子系统的总刚为 K_g , 图 6 示出了其总刚有限元模型. 在机架界面节点施加载荷 $p_a (p_a = f)$, 并按界面和内部节点分块, 有

$$\begin{bmatrix} p_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{gaa} & K_{gba} \\ K_{gab} & K_{gbb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{bmatrix}, \quad (45)$$

式中 $\delta_a (\delta_a = \Delta p)$ 和 δ_b 分别为机架界面和内部节点位移矢量. 采用静态凝聚技术, 有

$$p_a = \bar{K}_f \delta_a = \sum_{i=1}^3 \bar{K}_{fi} \delta_{ai}, \quad (46)$$

式中

$$\bar{K}_f = K_{gaa} - K_{gab} K_{gbb}^{-1} K_{gba},$$

$$\bar{K}_{fi} = [\bar{K}_{fi}^{(1)} \quad \bar{K}_{fi}^{(2)} \quad \dots \quad \bar{K}_{fi}^{(6)}]_{18 \times 6},$$

图 6 机架有限元模型

$$\delta_{ai} = (\delta_{ai}^{(1)} \quad \delta_{ai}^{(2)} \quad \dots \quad \delta_{ai}^{(6)})_{6 \times 1}^T,$$

考虑到 K_g 数据量很大, 故考虑采用如下方法生成 $\bar{K}_{fi}^{(j)}$. 令 δ_{ai} 中第 j 个自由度的节点位移为 1, 而其他为零, 即

$$\delta_{ai} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{6 \times 1}^T, \quad \delta_{ak} = 0_{6 \times 1}, \quad i=1,2,3, \quad j=1,\dots,6, \quad k \neq i. \quad (47)$$

于是, 在上述几何边条下, 利用机架子系统的有限元模型可计算出界面节点载荷 p_a . 据此有

$$p_a \Rightarrow \bar{K}_{fi}^{(j)}. \quad (48)$$

循环下标 i 和 j 做重复计算, 即可张成 $\bar{K}_f$. 由于该机架有 3 个界面节点, 故需要 18 次有限元计算.

5 工程实例

5.1 静刚度计算

现采用上述半解析法计算考虑机架弹性后 TriVariant-B 机器人中 2 自由度并联机构 U 支链末端的静刚度. 根据王友渔等人¹⁾所构造的球坐标系 $A_3 - x'y'z'$, 定义沿(绕)3 个正交轴的线刚度(角刚度)为使得相应方向产生单位变形所需施加的力(力矩). 现给定机构尺度参数如表 1, 并根据机械设计手册和有限元分析确定各部件刚度系数如表 2~4. 图 7(a)~(f)分

1) 同第 364 页脚注

表 1 球面并联机构尺度参数

<i>a</i> /mm	<i>b</i> /mm	<i>r</i> ₃ /mm	<i>φ</i> /(°)	<i>β</i> /(°)
160	500	975	12.56	33

表 2 UPS 支链构件等效轴向线刚度

<i>k</i> _{ai1} /N·μm ⁻¹	<i>k</i> _{ai2} /N·μm ⁻¹	<i>k</i> _{ai3} /N·μm ⁻¹	<i>k</i> _{ai4} /N·μm ⁻¹	<i>k</i> _{ai5} /N·μm ⁻¹	<i>k</i> _{ai6} /N·μm ⁻¹	<i>k</i> _{ai7} /N·μm ⁻¹
910	989	115~126	312~1576	800	326	120

表 3 U 支链构件等效轴向线刚度

<i>k</i> _{ca1} /N·μm ⁻¹	<i>k</i> _{ca2} /N·μm ⁻¹
1580	102~113

表 4 U 支链构件等效轴向角刚度

<i>k</i> _{ct1} /10 ⁶ N·m·rad ⁻¹	<i>k</i> _{ct2} /10 ⁶ N·m·rad ⁻¹
5.8	23.4~29.5

别示出了考虑机构和机架弹性时系统各向刚度在 *S*_{*t*}

中的分布规律. 由图可见, 其各向线刚度和角刚度均为面对称且随机构位形变化, 其中 *z*' 向线刚度远高于 *x*', *y*' 向线刚度, 且在任务空间轴线上取得极小值; *z*' 向角刚度均低于 *x*', *y*' 向角刚度, 且在任务空间轴线上取得极大值; 而 *x*' 向线刚度和 *y*' 向角刚度以及 *y*' 向线刚度和 *x*' 向角刚度分布规律对应相似.

为了评价系统的静柔度, 将其柔度矩阵, 即 $C = K^{-1}$, 按位置和姿态分块, 使得 $C = \begin{bmatrix} C_p^T & C_\alpha^T \end{bmatrix}^T$. 据此, 定义如下系统的全域线刚度和角刚度指标

$$\bar{\sigma}_{p(\alpha)} = \frac{\int_{S_t} \max(\sigma_{p(\alpha)}) ds}{S}, \tag{49}$$

式中, $\max(\sigma_{p(\alpha)})$ 表示 $C_{p(\alpha)}$ 的最大奇异值, $\bar{\sigma}_{p(\alpha)}$ 表示该值在任务空间中的均值, *S* 表示 *S*_{*t*} 的面积.

表 5 示出了机构和机架各部件弹性对机器人系统刚度的贡献. 由表 5 可见, 机构子系统弹性对系统

图 7 TriVariant-B 机器人末端各向刚度在任务空间的分布规律

(a) *x*' 向线刚度; (b) *y*' 向线刚度; (c) *z*' 向线刚度; (d) *x*' 向角刚度; (e) *y*' 向角刚度; (f) *z*' 向角刚度

表 5 机器人各构件弹性对系统刚度指标的贡献/(%)^{a)}

刚度指标	机架	UPS 支链构件(驱动)							U 支链构件(约束)					
	$\bar{K}_f$	<i>k</i> _{a1}	<i>k</i> _{a2}	<i>k</i> _{a3}	<i>k</i> _{a4}	<i>k</i> _{a5}	<i>k</i> _{a6}	<i>k</i> _{a7}	<i>k</i> _{ca1}	<i>k</i> _{ca2}	<i>k</i> _{ct1}	<i>k</i> _{ct2}	<i>K</i> _{cb}	<i>k</i> _{Qu(v)}
$\bar{\sigma}_p$	26.68	13.51	4.98	2.03	3.65	1.78	1.64	13.94	1.79	27.05	0.59	0.12	1.89	0.35
$\bar{\sigma}_\alpha$	17.91	9.44	3.48	1.42	2.56	1.24	1.14	9.73	1.15	17.38	26.06	5.30	2.70	0.49

a) $\bar{K}_f$ 为机架结构刚度; *k*_{a1}~*k*_{a7} 为 UPS 支链中编号依次为 1~7 的构件沿支链轴向的刚度系数; *k*_{ca1(2)} 为 U 支链套筒(虎克铰)沿支链轴线的线刚度; *k*_{ct1(2)} 为 U 支链套筒(虎克铰)绕支链轴线的角刚度; *K*_{cb} 为 U 支链套筒等效弯曲刚度 2×2 矩阵; *k*_{Qu(v)} 为 U 支链虎克铰绕 *u*₃ 和 *v*₃ 两正交轴的刚度系数

线刚度和角刚度的贡献分别为73%和 82%，机架子系统弹性分别为 27%和 18%。可见，机构子系统相对较为薄弱，其中驱动刚度对系统线刚度影响最大，约占 42%，其中各构件按贡献大小依次为虎克铰、球铰链、伸缩杆、丝杠等；而其约束刚度对系统角刚度影响最大，约占 53%，主要是由支链套筒扭转刚度引起的。

5.2 有限元与实验验证

为了验证上述方法的有效性，利用 ANSYS 构造 TriVariant-B 机器人的有限元模型。在此仅考虑点 A_3 位于 S_1 中两个典型位置(图 3 中位置 I 和 II)时，半解析法与有限元法所得的计算结果。图 8 示出了整机有限元模型网格划分的情况，表 6 给出了相应的计算结果。由表可见，利用有限元法计算出的结果略低于半解析法，但差异不超过 15%。

图 8 整机有限元模型

表 6 刚度比较

		线刚度/ $\text{N} \cdot \mu\text{m}^{-1}$		
		解析	有限元	实验
I	x' 向	3.87	3.65	3.53
	y' 向	5.63	5.51	5.43
	z' 向	31.5	27.0	20.3
II	x' 向	4.39	3.96	3.71
	y' 向	4.07	3.72	3.60
	z' 向	31.7	28.1	22.4

在上述设计理论指导下，天津大学和企业合作开发出用于钢结构切割的 TriVariant-B 机器人样机(见图 9)并进行了刚度实验。如图 10 所示，实验过程中在 U 支链末端与基座间通过千斤顶施加载荷，分别用测力仪和位移千分表读取载荷和变形，并取多次平均消除随机误差，相应测试结果见表 6。由表可见，系统的实际刚度低于理论刚度约 5%~30%，其原

图 9 TriVariant-B 机器人样机

图 10 样机刚度实验

(a) 轴向刚度测试; (b) 径向刚度测试

因主要是理论模型忽略了接触刚度等因素的影响，但分布规律仍具有较好的一致性。

6 结论

以 5 自由度混联机器人 TriVariant-B 为例，提出一种考虑复杂机架柔性的并联构型装备整机刚度半

解析建模方法. 借助子结构综合思想和虚功原理, 该方法以构造系统全变形雅可比矩阵为基础, 同时考虑了机构和复杂机架的弹性, 具有列式简洁、计算效率高、通用性强、可快速考察整机刚度在工作空间中

的分布规律的优点. 工程实例表明, 用本文提出的理论方法所得结果与有限元及实验结果具有较好的一致性, 同时对其他类似并联构型装备的相关研究提供了有益的借鉴.

参考文献

- 1 Weck M, Staimer D. Parallel kinematic machine tools---current states and future potentials. *Ann CIRP*, 2002, 51(2): 617—683
- 2 Gosselin C M. Stiffness mapping for parallel manipulators. *IEEE Trans Rob Autom*, 1990, 6(3): 377—382[[doi](#)]
- 3 Clinton C M, Zhang G. Stiffness modeling of a Stewart-platform-based milling machine. *Trans NAMRI/ SME*, 1997, 115: 335—340
- 4 EI-Khasawneh B S, Ferreira P M. Computation of stiffness and stiffness bounds for parallel link manipulators. *Int J Mach Tool Manuf*, 1999, 39: 321—342[[doi](#)]
- 5 Kim J, Park F C, Ryu S J, et al. Design and analysis of a redundantly actuated parallel mechanism for rapid machining. *IEEE Trans Rob Autom*, 2001, 17(4): 423—434[[doi](#)]
- 6 Tsai L W, Joshi S. Kinematic analysis of 3-DOF position mechanisms for use in hybrid kinematic machines. *ASME J Mech Des*, 2002, 124(2): 245—253[[doi](#)]
- 7 Goldsmith P B. Design and kinematics of a three-legged parallel manipulator. *IEEE Trans Rob Autom*, 2003, 19(4): 726—731[[doi](#)]
- 8 Joshi S, Tsai L W. A comparison study of two 3-DOF parallel manipulators: one with three and the other with four supporting legs. *IEEE Trans Rob Autom*, 2003, 19(2): 200—209[[doi](#)]
- 9 Zhang D, Gosselin C M. Kinetostatic modeling of N-DOF parallel mechanisms with a passive constraining leg and prismatic actuators. *ASME J Mech Des*, 2001, 123(3): 375—384[[doi](#)]
- 10 Zhang D, Gosselin C M. Kinetostatic modeling of parallel mechanisms with a passive constraining leg and revolute actuators. *MMT*, 2002, 37(6): 599—617
- 11 Zhang D, Gosselin C M. Kinetostatic analysis and design optimization of the Tricept machine tool family. *ASME J Manuf Sci Eng*, 2002, 124(3): 725—733[[doi](#)]
- 12 Wang Y Y, Huang T, Zhao X M, et al. Finite element analysis and comparison of two hybrid robots---the tricept and the triVariant. In: *Proceedings of IEEE international conference on intelligent robots and systems*, Beijing: IEEE, 2006. 490—495
- 13 Corradini C, Fauroux J C, Krut S, et al. Evaluation of a 4-degree of freedom parallel manipulator stiffness. In: *Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science*. Tianjin: IFFTom, 2003, 5: 1857—1861
- 14 Rizk R, Munteanu M G, Fauroux J C, et al. A semi-analytical stiffness model of parallel robots from the Isoglide family via the sub-structuring principle. In: *Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science*, Besançon: IFFTom, 2007, 5: 623—628
- 15 Huang T, Zhao X Y, Whitehouse D J. Stiffness estimation of a tripod-based parallel kinematic machine. *IEEE Trans Rob Autom*, 2002, 18(1): 50—58[[doi](#)]
- 16 Huang T, Mei J P, Zhao X Y, et al. Stiffness estimation of a tripod-based parallel kinematic machine. In: *Proceedings of IEEE international conference on robotics and automation*, Seoul: IEEE, 2001, 4: 3280—3285
- 17 Joshi S, Tsai L W. Jacobian analysis of Limited-DOF parallel manipulators. *ASME J Mech Des*, 2002, 124 (2): 254—258[[doi](#)]
- 18 Huang T, Li M, Zhao X M, et al. Conceptual design and dimensional synthesis for a 3-DOF module of the TriVariant---a novel 5-DOF reconfigurable hybrid robot. *IEEE Trans Rob Autom*, 2005, 21(3): 449—456
- 19 Liu H T, Huang T, Mei J P, et al. Kinematic Design of a 5-DOF hybrid robot with large workspace/limb-stroke ratio. *ASME J Mech Des*, 2007, 129(5): 530—537[[doi](#)]