紧致 DG 模和 Gorenstein DG 代数

毛雪峰, 吴泉水

复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: 041018010@fudan.edu.cn, qswu@fudan.edu.cn

收稿日期: 2008-02-27; 接受日期: 2008-08-28

国家自然科学基金 (批准号: 10731070) 和教育部博士点基金 (编号: 20060246003) 资助项目

摘要 证明同调有界的连通微分分次代数 (简称为 DG 代数) 上的紧致 DG 模的 amplitude 与基代数的 amplitude 的差恰为该 DG 模的投射维数. 由此可得非平凡的正则 DG 代数是同调无界的. 对正则 DG 代数 A , 若它的同调代数 $H(A)$ 是分次 Koszul 代数, 则证明 $H(A)$ 有有限的整体维数; 如果把条件减弱为 A 是 Koszul DG 代数, 则给出了一个 $H(A)$ 的整体维数为无限的例子. 对一般的正则 DG 代数 A , 给出了其为 Gorenstein DG 代数的一些等价刻画.

对同调有限维的连通 DG 代数 A , 证明由紧致对象全体构成的三角范畴 $D^c(A)$ 和 $D^c(A^p)$ 存在 Auslander-Reiten 三角当且仅当 A 和 A^p 都是 Gorenstein DG 代数. 当 A 是非平凡的正则 DG 代数, 且 $H(A)$ 是局部有限维时, $D^c(A)$ 不存在 Auslander-Reiten 三角. 对正则 DG 代数 A , 转而讨论了 Auslander-Reiten 三角在 $D_{\text{lf}}^b(A)$ 以及 $D_{\text{lf}}^b(A^p)$ 上的存在性.

关键词 微分分次代数 Gorenstein 微分分次代数 正则微分分次代数 Koszul 微分分次代数 紧致微分分次模 Auslander-Reiten 三角 amplitude 投射维数

MSC(2000) 主题分类 16E10, 16E45, 16G70

1 引言

复形 X 的同调振幅 (amplitude) 定义为其同调不为零的次数的最小上界与最大下界的差. Jørgensen^[1] 将 Iversen^[2] 有关交换局部环上模复形的 amplitude 不等式推广到了局部链 DG 代数上的模的情形. 设 A 是一同调有界的局部链 DG 代数, 则对任意紧致 DG A -模 L 以及同调有限生成的 DG A^p -模 X , Jørgensen 证明了不等式

$$\text{amp}(X) \leq \text{amp}(X^L \otimes_A L).$$

由这个不等式可知紧致 DG 模的同调振幅不会短于 DG 代数的同调振幅. 由此 Jørgensen 指出: 利用任意同调有限生成的 DG 模都是紧致的来定义 DG 代数有有限整体维数是没有意义的.

引用格式: 毛雪峰, 吴泉水. 紧致 DG 模和 Gorenstein DG 代数. 中国科学 A, 2009, 39(3): 267–293
Mao X F, Wu Q S. Compact DG Modules and Gorenstein DG Algebras. Sci China Ser A, 2009, 52(4): 648–676, DOI: 10.1007/s11425-008-0175-z

本文以一般的连通 DG 代数及其上的 DG 模为研究对象. 在代数拓扑学中, 我们能找到很多连通 DG 代数的例子. 例如, 有理同伦论中的 Sullivan 代数 (文献 [3, §12]) 以及单连通拓扑空间 X 的奇异上链复形 $C^*(X, k)$ (文献 [3, §5]) 都是连通 DG 代数. 由文献 [3, 命题 12.1], 任意分次交换上链代数 A , 如果满足 $H^0(A) = k$, 则存在一个 Sullivan 代数模型, 即存在某个 Sullivan 代数到 A 的拟同构, 因此道路连通拓扑空间 X 的交换上链代数模型 $A_{PL}(X; k)$ 有一个 Sullivan 代数模型. 另外, 设 M 是连通 n 维 C^∞ 流形, 令

$$\mathcal{A}^*(M) = \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{A}^i(M)$$

是 M 上的 de Rham 复形, 则 $\mathcal{A}^*(M)$ 是分次交换 DG 代数并且 $H^0(\mathcal{A}^*(M)) \cong \mathbb{R}$ (参见文献 [3, §11]). 因此, $\mathcal{A}^*(M)$ 有 Sullivan 代数模型.

我们证明了如下两个定理 (定理 6.1, 定理 6.7):

定理 A 设 M 和 N 分别为 $D^c(A)$ 和 $D^b(A^{\text{op}})$ 中的非零对象, 则

$$\text{amp}(N \overset{L}{\otimes}_A M) = \text{proj.dim}_A M + \text{amp}(N).$$

定理 B 设 M 和 N 分别为 $D^c(A)$ 和 $D^b(A)$ 中的非零对象, 则

$$\text{amp}(\text{RHom}_A(M, N)) = \text{proj.dim}_A M + \text{amp} N.$$

由定理 A 可以得到下面的推论.

推论 A 设 A 是一同调有界的连通微分分次代数, 则对 $D^c(A)$ 中的任一非零对象 M ,

$$\text{amp}(M) = \text{amp}(A) + \text{proj.dim}_A M.$$

因为 $\text{proj.dim}_A M \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, 所以 $\text{amp}(M) \geq \text{amp}(A)$. 由此可推断任意同调有界的连通 DG 代数, 除非拟同构于 k , 都不可能是正则的. 这推广了非平凡的有限维连通代数的整体维数不可能是有限的事实.

文献 [4] 将 Koszul 代数的概念推广到了 DG 代数的情形. 设 A 是连通 DG 代数, 如果 $H(\text{RHom}_A(k, k))$ 集中在零次上, 则称 A 是 Koszul DG 代数. 如果 $H(A)$ 是 Koszul 分次代数, 则运用 Eilenber-Moore 表示的存在性及构造容易验证 A 是 Koszul DG 代数. 反过来不一定成立, 可以参见例 3.12. 例 3.12 还说明如果将条件 $H(A)$ 是 Koszul 分次代数弱化为 A 是 Koszul DG 代数, 则 $\text{gl.dim} H(A)$ 不一定有限.

为将有关交换 Gorenstein 环的丰富内容推广至 DG 代数, 一些代数学家开展了大量的研究. 这一课题始于 Félix, Halperin 和 Thomas^[5]. 增广 DG 代数 A 称为是 Gorenstein DG 代数^[5], 如果 $\dim_k H(\text{RHom}_A(k, A)) = 1$. 拓扑空间 X 称为 Gorenstein 空间, 如果奇异上链复形 $C^*(X; k)$ 为 Gorenstein DG 代数. 这一定义推广了经典的有关流形的 Poincaré 对偶条件. Avramov 和 Foxby^[6] 以及 Dwyer 等^[7] 都采用类似于文献 [5] 中的定义. Frankild 和 Jørgensen^[8,9] 运用对偶 DG 模的概念提出了一种新的 Gorenstein DG 代数的定义. 但是他们定义的 Gorenstein DG 代数需要同调有界这一假设前提.

因为本文考虑的连通微分分次代数一般不会是同调有界的, 所以我们采用文献 [5] 中的定义. 我们证明任意分次交换的、正则 DG 代数都是 Gorenstein DG 代数. 对于正则 DG 代数 A , 我们得到了 A 为 Gorenstein DG 代数的一些等价刻画.

定理 C 设 A 为一正则 DG 代数, 则下列结论等价:

(a) A 是 Gorenstein DG 代数;

(b) $k.\mathrm{id}_A A < +\infty$;

(c) 存在 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 和 $D_{\mathrm{lf}}^b(A^{\mathrm{op}})$ 之间的一个对偶,

$$D_{\mathrm{lf}}^b(A) \xrightleftharpoons[R\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(-, A)]{R\mathrm{Hom}_A(-, A)} D_{\mathrm{lf}}^b(A^{\mathrm{op}}).$$

对于有限维的单连通 DG 代数 A , Jørgensen^[10] 证明 $D^c(A)$ 和 $D^c(A^{\mathrm{op}})$ 存在 Auslander-Reiten 三角当且仅当 A 满足所谓的 Poincaré 对偶条件. 通过这种方式, Auslander-Reiten 三角和箭图的理论被引入到代数拓扑中. 用 Auslander-Reiten 三角的存在性可以刻画 Poincaré 对偶空间, 并且 Auslander-Reiten 箭图可以作为一个不变量来区分不同维数的球面.

本文第 9 节考虑同调有限维的连通 DG 代数, 证明以下定理 (参见定理 9.3 和命题 9.5):

定理 D 设 A 为一同调有限维的连通 DG 代数, 则下列结论等价:

(a) $D^c(A)$ 和 $D^c(A^{\mathrm{op}})$ 存在 Auslander-Reiten 三角;

(b) $H(A)$ 是分次 Frobenius 代数;

(c) A 和 A^{op} 都是 Gorenstein DG 代数.

定理 D 推广了文献 [10, 定理 6.3] 中的相应结果 (参见注 9.4).

当 A 是非平凡的并且是同调局部有限维的正则 DG 代数时, 由 $\mathrm{amp}(A) = +\infty$ 可知 $D^c(A)$ 不存在 Auslander-Reiten 三角 (参见命题 8.8). 所以对一个正则 DG 代数 A , 同 Jørgensen^[10] 那样在 $D^c(A)$ 上讨论 Auslander-Reiten 三角的存在性没有意义. 我们转而考虑 Auslander-Reiten 三角在 $D^c(A)$ 的三角全子范畴 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ (即 $D(A)$ 的包含 ${}_A k$ 的最小三角子范畴) 上的存在性并且得到如下结果:

定理 E (参见定理 10.8) 设 A 是正则 DG 代数并且记 $E = H(R\mathrm{Hom}_A(k, k))$ 为 A 的 Ext-代数, 则 E 是 Frobenius 代数当且仅当三角范畴 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 和 $D_{\mathrm{lf}}^b(A^{\mathrm{op}})$ 存在 Auslander-Reiten 三角.

特别地, 当 A 是 Koszul、正则 DG 代数时, 我们证明了下面的命题:

命题 A (参见命题 10.10) 设 A 为 Koszul、正则 DG 代数, 则 A 是 Gorenstein DG 代数当且仅当 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 和 $D_{\mathrm{lf}}^b(A^{\mathrm{op}})$ 存在 Auslander-Reiten 三角.

2 预备知识

在这一节中, 回顾有关微分分次同调代数的一些基本概念. 有关 DG 同调代数的知识, 读者也可参考文献 [11–14]. 我们总假定 k 是一个域, $\mathbb{Q}$ 表示有理数域, $\mathbb{R}$ 表示实数域, $\mathbb{Z}$ 表示整数集合, $\mathbb{N}$ 表示自然数集合.

设 X 为分次 k -向量空间. 记号 $|x|$ 表示 X 中分次 (齐次) 元素 x 的次数. 设 $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ 是分次 k -向量空间. 如果存在一个保持次数的乘法 (即 $|ab| = |a| + |b|$), 使得 A 为 k -代数, 则称 A 是分次代数. 如果对分次代数 A 中的任意分次元素 a 和 b , 成立 $ab = (-1)^{|a||b|}ba$, 则称 A 是分次交换的.

分次 k -向量空间中的微分是一个次数为 1 的 k -线性映射 $\partial: A \rightarrow A$, 使得 $\partial^2 = 0$. 分次代数 A 上的一个 n 次导子是一个次数为 n 的分次 k -线性映射 $\partial: A \rightarrow A$, 使得对所有的分次元素 $a, b \in A$, 成立

$$\partial(ab) = (\partial a)b + (-1)^{n|a|}a(\partial b).$$

设 A 是一个分次代数. 如果存在一个微分 $\partial : A \rightarrow A$ 且它是导子, 则称 (A, ∂) 是微分分次代数 (简称为 DG 代数). 对任意的 DG 代数 A , 记 $A^\sharp$ 为 A 忘记微分后得到的分次代数.

如果 DG 代数 A 集中在非负次数上, 即 $A = \bigoplus_{i \geq 0} A^i$, 则称 A 是上链 DG 代数. 上链 DG 代数 A 如果满足 $A^0 = k$, 则称之为连通 DG 代数. 连通 DG 代数 A 如果满足 $H^1(A) = 0$, 则称之为单连通 DG 代数. 如果连通 DG 代数 A 的同调是有限维的分次 k -代数, 则称 A 为同调有限维的连通 DG 代数.

DG 代数 A 和 B 之间的微分分次代数同态 f 是指一个分次代数同态 f 并且成立 $f \circ \partial_A = \partial_B \circ f$. 显然, f 可诱导分次代数同态 $H(f) : H(A) \rightarrow H(B)$. 如果 $H(f)$ 是同构映射, 则称 f 是拟同构, 记作 $A \xrightarrow{f} B$. 如果 DG 代数 A 和 B 可由一个 DG 代数拟同构序列连接, 即 $A \xrightarrow{\sim} C(0) \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} C(n) \xrightarrow{\sim} B$, 则 A 和 B 称为是弱等价的.

在本文中, 如果没有特别强调, A 总表示为域 k 上的连通 DG 代数.

2.1 微分分次代数上的模

设 (A, ∂_A) 是 DG 代数, 而 (M, ∂_M) 是一个 k -复形. 如果存在一个左乘 $A \otimes M \rightarrow M$, 使得 M 是 $A^\sharp$ 上的一个分次左模, 并且 M 的微分 ∂_M 满足 Leibniz 法则, 即对任意的分次元素 $a \in A$, $m \in M$, 成立 $\partial_M(am) = \partial_A(a)m + (-1)^{|a|}a\partial_M(m)$, 则称 (M, ∂_M) 为 A 上的微分分次左模 (简称为 DG A -模). 类似地, 我们可以定义 A 上的微分分次右 A -模. 记 A^{op} 为 DG 代数 A 的逆代数, 对任意分次元素 $a, b \in A$, A^{op} 上的乘法定义为 $a \cdot b = (-1)^{|a| \cdot |b|}ba$. 由此可见 A 上的微分分次右模等同于 DG A^{op} -模. 设 M 为 DG A -模, 记 $M^* = \text{Hom}_k(M, k)$. 易证 M^* 为 DG A^{op} -模.

微分分次代数上的模自然地出现在许多数学分支中. 例如在代数拓扑中, 若 $f : X \rightarrow Y$ 是拓扑空间之间的一个连续映射, 则奇异上链代数 $C^*(X; k)$ 通过映射 $C^*(f)$ 可以视为 $C^*(Y; k)$ 上的一个 DG 模 (参见文献 [3, §7]).

对任意 DG A -模 M , 记 $M^\sharp$ 为 M 忘记微分后得到的分次 $A^\sharp$ -模.

对任意整数 i , DG A -模 M 的 i -次平移 (suspension) 是 DG A -模 $\Sigma^i M$, 使得 $(\Sigma^i M)^j = M^{j+i}$. 若 $m \in M^l$, 则将 $(\Sigma^i M)^{l-i}$ 中相应的元素记为 $\Sigma^i m$. 对任意的分次元素 $a \in A$ 以及 $\Sigma^i m \in \Sigma^i M$, A 在 $\Sigma^i M$ 上的作用定义为 $a(\Sigma^i m) = (-1)^{|a|i}\Sigma^i(am)$. 而 $\Sigma^i M$ 上的微分 $\partial_{\Sigma^i M}$ 则定义为 $\partial_{\Sigma^i M}(\Sigma^i m) = (-1)^i \Sigma^i \partial_M(m)$, $m \in M$. $\Sigma M = \Sigma^1 M$.

设 M 是 DG A -模. 如果 M 同构于 A 的一些平移的直和, 则称 M 为 DG 自由 A -模 (注意不是 DG A -模范畴中的自由对象). 设 Y 是一分次集合, 记 $A^{(Y)}$ 为 DG 自由 A -模 $\bigoplus_{y \in Y} A e_y$, 其中 $|e_y| = |y|$ 并且 $\partial(e_y) = 0$. 设 M 是 DG A -模, 而 E 是 M 的一个分次子集. 如果 E 是 $M^\sharp$ 在 $A^\sharp$ 上的一组基, 并且可以分解为 E 的分次子集 E^i 的不交并 $E = \bigsqcup_{i \geq 0} E^i$, 使得

$$\partial(E^0) = 0,$$

及对任意 $u > 0$,

$$\partial(E^u) \subseteq A \left(\bigsqcup_{i < u} E^i \right),$$

则称 E 是 M 的一组半自由基. 如果 DG A -模 M 有一个 DG 子模序列

$$0 = M_{-1} \subseteq M_0 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq \dots,$$

使得 $M = \cup_{n \geq 0} M_n$ 并且每个 M_n/M_{n-1} 是 DG 自由 A -模, 则称 M 是半自由 A -模. 易证 DG A -模 M 是半自由 A -模当且仅当 M 有一组半自由基.

2.2 分次 A -线性映射

设 M 和 N 是两个 DG A -模. 一个 i 次的 A -线性映射 $f: M \rightarrow N$ 是一个 i 次 k 线性映射, 使得对任意 $a \in A, m \in M$,

$$f(am) = (-1)^{i \cdot |a|} af(m).$$

记 $\text{Hom}_A(M, N)$ 为从 M 到 N 的所有分次 A -线性映射组成的分次向量空间. 它是一个复形, 对任意分次元素 $f \in \text{Hom}_A(M, N)$, 其微分 ∂_{Hom} 定义为

$$\partial_{\text{Hom}}(f) = \partial_N \circ f - (-1)^{|f|} f \circ \partial_M.$$

DG A -模同态 $f: M \rightarrow N$ 是一个 0 次的 A -线性映射, 使得 $\partial_N \circ f = f \circ \partial_M$. 由 f 诱导的同调之间的映射 $H(f)$ 是一个分次 $H(A)$ -模同态. 若 $H(f)$ 是同构, 则称 f 为拟同构, 记作 $f: M \xrightarrow{\sim} N$. 特别地, 如果 $M \simeq 0$, 则称 M 是零调的.

设 $\varphi, \psi: M \rightarrow N$ 是两个 DG A -模同态. 如果存在一个 -1 次的 A -线性映射 $h: M \rightarrow N$, 使得 $\varphi - \psi = h \circ \partial_M + \partial_N \circ h$, 则称 φ 与 ψ 互相同伦, 记作 $\varphi \sim \psi$. 特别地, 如果 $\text{id}_M \sim 0$, 则称 M 是可缩的. 显然可缩 DG 模必定是零调的.

设 $\varphi: M \rightarrow N$ 为一个 DG A -模同态. 如果存在 DG A -模同态 $\psi: N \rightarrow M$, 使得 $\varphi \circ \psi \sim \text{id}_N$ 和 $\psi \circ \varphi \sim \text{id}_M$, 则我们称 φ 为一个同伦等价.

设 $E: 0 \rightarrow L \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} N \rightarrow 0$ 是 DG A -模同态的序列. 若

$$E^\# : 0 \rightarrow L^\# \xrightarrow{\iota^\#} M^\# \xrightarrow{\pi^\#} N^\# \rightarrow 0$$

是分次 $A^\#$ -模的短正合列, 则 E 称为 DG A -模的短正合列. 若 E 可裂正合, 则显然 $E^\#$ 也可裂正合. 反之不一定成立. 当 $E^\#$ 是可裂正合的分次 $A^\#$ -模短正合列时, 称 E 为线性可裂的 DG A -模短正合列.

2.3 映射锥

设 $f: M \rightarrow N$ 为 DG A -模同态. f 的映射锥是 DG A -模 $\text{Cone}f$, 其中 $(\text{Cone}f)^\# = N^\# \oplus \Sigma M^\#$, $\text{Cone}f$ 的微分定义为: 对任意的分次元素 $(n, \Sigma m)$,

$$\partial_{\text{Cone}f}(n, \Sigma m) = (\partial_N(n) + f(m), -\Sigma \partial_M(m)).$$

定义 f 的映射锥序列为线性可裂的 DG A -模短正合列

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{\iota} \text{Cone}f \xrightarrow{\pi} \Sigma M \rightarrow 0,$$

其中 ι 和 π 分别定义为 $\iota: n \mapsto (n, 0)$ 以及 $\pi: (n, \Sigma m) \mapsto \Sigma m$.

2.4 几种表示类型

设 P 为 DG A -模. 如果函子 $\text{Hom}_A(P, -)$ 保持拟同构, 则称 P 为 K-投射 DG A -模. 类似地, 如果函子 $-\otimes_A P$ 保持拟同构, 则称 P 为 K-平坦 DG A -模. DG A -模 M 的 K-投射表示 (K-平坦表示) 是一个拟同构 $\theta: P \rightarrow M$, 其中 P 是 K-投射 (K-平坦) DG A -模. 任意半自由 A -模都是 K-投射 DG A -模 (文献 [3, 命题 6.4]).

DG A -模 M 的一个半自由表示是一个拟同构 $\varepsilon: F \rightarrow M$, 其中 F 是半自由 A -模. 通常直接称 F 为 M 的一个半自由表示. 任意 DG A -模都有半自由表示 (文献 [3, 命题 6.6]).

类似地, 设 I 为 DG A -模, 如果函子 $\mathrm{Hom}_A(-, I)$ 保持拟同构, 则称 I 为 K -内射 A -模. DG A -模 M 的一个 K -内射表示是一个拟同构 $\eta: M \rightarrow I$, 其中 I 是 K -内射 DG A -模. 任意 DG A -模都有 K -内射表示 (文献 [13, 定理 3.2]).

2.5 截断的方法

对一个正分次链代数上的模, 运用文献 [26, 定理 0.4] 中的截断方法, 可以得到一个与之在导出范畴中同构, 并且集中于其同调上下界之间的模. 但是对一个一般的正分次上链 DG 代数来说, 因为在通常的截断下不能保持微分分次 A -模结构, 所以同样的方法不适用. 然而如果上链 DG 代数 A 满足条件: A^0 是 Artin 半单环, 那么可以用如下的方法进行截断:

假设 M 是一同调有下界的 DG A -模并且取定 $b = \inf\{j \mid H^j(M) \neq 0\}$. 由 A^0 的半单性, A^0 -模 M^b 可以分解为 $M^b = B^b \oplus H^b \oplus C^b$, 其中 $B^b = \mathrm{Im} \partial^{b-1}$ 并且 $\mathrm{Ker} \partial^b = B^b \oplus H^b$. 因此 $C^b \cong B^{b+1} = \mathrm{Im} \partial^b$ 并且 $H^b \cong H^b(M)$. 我们得到 M 的一个 DG A -子模

$$\tau^{\geq b} M : \cdots \rightarrow 0 \rightarrow H^b \oplus C^b \rightarrow M^{b+1} \rightarrow M^{b+2} \rightarrow \cdots.$$

易证 $\tau^{\geq b} M$ 拟同构于 M .

设 N 是同调有上界的 DG A -模并且取定 $u = \sup\{j \mid H^j(N) \neq 0\}$. A^0 -模 N^u 可以分解为 $B^u \oplus H^u \oplus C^u$, 其中 $B^u \oplus H^u = \mathrm{Ker} \partial^u$, $C^u \cong B^{u+1} = \mathrm{Im} \partial^u$ 并且 $H^u \cong H^u(M)$. 我们得到 N 的一个 DG A -子模

$$N' : \cdots \rightarrow 0 \rightarrow C^u \rightarrow N^{u+1} \rightarrow N^{u+2} \rightarrow \cdots,$$

并且 N 拟同构于 DG 商模

$$\tau^{\leq u} N = N/N' : \cdots \rightarrow N^{u-2} \rightarrow N^{u-1} \rightarrow B^u \oplus H^u \rightarrow 0 \cdots.$$

2.6 导出 DG A -模范畴

DG A -模范畴的导出范畴记为 $D(A)$. Hom 函子的右导出函子和 $\otimes_A$ 函子的左导出函子分别记作 $R\mathrm{Hom}$ 和 ${}^L\otimes_A$. 它们都可以通过 DG A -模的 K -投射表示, K -内射表示和 K -平坦表示计算.

对任意的 $M, N \in D(A)$ 以及 $T \in D(A^{\mathrm{op}})$, 设 $F \xrightarrow{\sim} M$, $N \xrightarrow{\sim} I$ 以及 $P \xrightarrow{\sim} T$ 分别为 M 和 N 及 T 的 K -投射表示, K -内射表示和 K -平坦表示. 则有

$$R\mathrm{Hom}_A(M, N) = \mathrm{Hom}_A(F, N)$$

或

$$R\mathrm{Hom}_A(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, I),$$

以及

$$T {}^L\otimes_A M = P \otimes_A M.$$

对任意的 DG A -模 M 以及 DG A^{op} -模 N , 记

$$M^\dagger = R\mathrm{Hom}_A(M, A), \quad N^\dagger = R\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(N, A).$$

记 $D^+(A)$, $D^-(A)$ 和 $D^b(A)$ 分别为 $D(A)$ 的由同调有下界和同调有上界以及同调有界的对象全体构成的三角全子范畴.

设 $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i$ 为分次向量空间, 如果每个 M^i ($i \in \mathbb{Z}$) 的维数有限, 则称 M 是局部有限维的. 我们把 $D(A)$ 的由同调局部有限维的对象全体构成的全子范畴记为 $D_{\mathrm{lf}}(A)$.

DG A -模 M 称为是同调有限生成的, 如果 $H(M)$ 是有限生成 $H(A)$ -模. $D(A)$ 的由同调有限生成的对象全体构成的全子范畴记作 $D_{\text{fg}}(A)$.

按照有任意余积的三角范畴中的紧致对象 (参见文献 [16, 17]) 的定义, DG A -模 M 称为是紧致的, 如果函子 $\text{Hom}_{D(A)}(M, -)$ 与 $D(A)$ 中的任意余积可交换. 当 A 是增广 DG k -代数时, DG A -模 M 是紧致的, 当且仅当 M 是 $D(A)$ 的包含 ${}_A A$ 的最小的三角子范畴中的对象 (参见文献 [13, 定理 5.3] 和 [18, 引理 2.2]). 于是紧致 DG A -模就是可以由 ${}_A A$ 用平移和三角扩张经过有限步构造得到的 DG A -模. 显然, 域 k 通过增广映射 $\varepsilon: A \rightarrow k$ 有一个自然的 DG A -模结构. 如果 k 是紧致 DG A -模 (或 DG A^{pp} -模, 参见推论 3.4), 则 A 称为是正则的. $D(A)$ 的由紧致 DG A -模全体构成的全子范畴记为 $D^c(A)$.

3 极小半自由表示以及紧致 DG 模

在微分分次同调代数中, 半自由表示与通常的自由表示在同调环论中有类似重要的作用. 记 $m_A = A^{>0}$ 为 A 的极大 DG 理想. 半自由 A -模 F 称为是极小的, 如果 $\partial_F(F) \subseteq m_A F$. 由 F 的极小性易证复形 $\text{Hom}_A(F, k)$ 和 $k \otimes_A F$ 的微分都为零. 本节将给出极小半自由表示的几种构造方法.

Kriz-May^[19] 曾给出极小半自由表示的一个构造方法 (文献 [19] 中的 Cell A -模即为半自由 A -模). 在文献 [19] 中, Kriz-May 假设微分分次代数是分次交换的, 事实上分次交换这个条件是多余的. 下面的命题表明连通 DG 代数上的同调有下界的 DG A -模都存在极小半自由表示.

命题 3.1 (文献 [12, 命题 2.4]) 设 M 是一同调有下界的 DG A -模, 则 M 存在一极小半自由表示 F , 使得 $F^\# \cong \coprod_{i \geq v} S^i(A^\#)^{(\Lambda^i)}$, 其中 $v = \inf\{j \mid H^j(M) \neq 0\}$, 每个 Λ^i 是指标集.

特别地, 如果 M 是紧致 DG A -模, 则 M 有一个极小半自由表示, 它有有限半自由基. 正如 Jørgensen^[2] 指出, 紧致微分分次 A -模在微分分次同调代数理论中所起的作用, 相当于具有有限投射维数的有限表现模在环论中所起的作用. 我们有下列的命题:

命题 3.2 (文献 [12, 命题 3.3]) 设 M 是 $D^c(A)$ 中的一个非零对象, 则

1) M 有一个极小的半自由表示 F_M , 使得 $F_M^\# = \coprod_{v \leq i \leq u} S^i(A^\#)^{(\beta^i)}$, 其中 u 是某个整数, $v = \inf\{j \mid H^j(M) \neq 0\}$, 每个 β^i 都是非负整数并且 β^v 和 β^u 是正整数.

2) 存在一个线性可裂的 DG A -模的短正合列

$$0 \rightarrow F'_M \rightarrow F_M \rightarrow S^u(A)^{(\gamma^u)} \rightarrow 0,$$

其中 γ^u 是正整数, F'_M 是 F_M 的一个极小半自由 DG A -子模, 并且成立 $F_M^\# \cong \coprod_{v \leq i \leq u} S^i(A^\#)^{(\alpha^i)}$, 其中每个 α^i 是非负整数.

由命题 3.2 易证下面的命题:

命题 3.3 设 M 是一同调有下界的 DG A -模, 则 M 是紧致 DG A -模当且仅当 $\dim_k H(k^L \otimes_A M) = \dim_k H(R\text{Hom}_A(M, k))$ 有限.

由上面的命题直接可得.

推论 3.4 ${}_A k$ 是紧致 DG A -模当且仅当 k_A 是紧致 DG A^{pp} -模.

下面的定理表明 DG A -模 M 的半自由表示可以由 $H(M)$ 的自由表示构造得到.

定理 3.5 对任意 DG A -模 M , $H(M)$ 的任一自由表示都可由 M 的某个 Eilenberg-Moore 表示对应谱序列的 E_1 项去实现.

关于定理 3.5 的证明, 读者可以参考文献 [3, pp. 279–280]. 从定理的证明可以看出 Eilenberg-Moore 表示有一个半自由基与 $H(M)$ 的自由表示的一组自由基存在一一对应的关系. 由 Eilenberg-Moore 表示的存在性, 我们可以得到如下的命题, 该命题给出了 M 为紧致 DG A -模的一个充分条件.

命题 3.6 设 A 是一个连通 DG 代数, 且 $H(A)$ 是左 Noetherian 分次代数. 对 DG A -模 M , 如果 $H(M)$ 是有限生成的分次 $H(A)$ -模, 且 $\mathrm{pd}_{H(A)} H(M) < +\infty$, 则 M 是 $D^c(A)$ 中的对象, 即紧致对象.

证明 由假设, $H(M)$ 有一个有限生成的极小自由 $H(A)$ -模表示并且其长度有限. 由这个自由表示诱导的 Eilenberg-Moore 表示 F 有一个半自由基 E 与自由表示的自由基有一个一一对应的关系, 因此 E 是有限半自由基, 从而 M 是紧致 DG A -模.

由命题 3.6. 直接可得

推论 3.7 设 A 是连通 DG 代数, 且 $H(A)$ 是有有限整体维数的左 Noetherian 分次代数, 则作为 $D(A)$ 的三角子范畴 $D_{\mathrm{fg}}(A) = D^c(A)$.

在一般情形下, 命题 3.6 的逆不一定成立 (参见例 3.12). 但是我们有

命题 3.8 设 M 是紧致 DG A -模. 如果 M 有一个极小的 Eilenberg-Moore 表示, 则 $\mathrm{pd}_{H(A)} H(M)$ 有限.

证明 由假设 M 有一个极小的 Eilenberg-Moore 表示 F . F 的半自由基与对应的 $H(M)$ 的自由表示的自由基有一个一一对应的关系. 因为 M 是紧致 DG A -模, F 的半自由基有限. 由此可知 $H(M)$ 有一个有限生成的自由 $H(A)$ -模表示并且长度有限, 所以 $\mathrm{pd}_{H(A)} H(M)$ 有限.

从有关定理 3.5 的证明 [3] 可知, 由 $H(M)$ 的极小自由表示诱导的 M 的 Eilenberg-Moore 表示不一定是极小的. 但是我们有

命题 3.9 设 M 为微分分次 A -模. 如果存在 $H(M)$ 的一个自由表示

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{i+1}} H(A) \otimes V(i) \xrightarrow{\partial_i} \cdots \xrightarrow{\partial_2} H(A) \otimes V(1) \xrightarrow{\partial_1} H(A) \otimes V(0) \xrightarrow{\varepsilon} H(M) \rightarrow 0,$$

使得对任意的整数 $i \geq 1$ 满足 $\inf\{|v| \mid v \in V(i)\} > \sup\{|v| \mid v \in V(i-1)\}$, 则由 $H(M)$ 的该自由表示诱导的 Eilenberg-Moore 表示是极小的.

证明 对任意的整数 $i \geq 0$, 设 $\{e_{i,j} \mid j \in I_i\}$ 是 $V(i)$ 的一组基. 由 $H(M)$ 的上述自由表示诱导的 Eilenberg-Moore 表示 F 有一组半自由基 $\bigcup_{i \geq 0} \{\Sigma^i e_{i,j} \mid j \in I_i\}$. 对半自由基中任一元 $\Sigma^i e_{i,j}$, 我们有

$$\partial_F(\Sigma^i e_{i,j}) = \sum_{l=0}^{i-1} \sum_{t \in I_l} a_{l,t} \Sigma^l e_{l,t}.$$

因为对任意的整数 $i \geq 1$, 我们有 $\inf\{|e_{i,j}| \mid j \in I_i\} > \sup\{|e_{i-1,j}| \mid j \in I_{i-1}\}$, 容易验证 $a_{l,t} \in m_A$. 所以 $\partial(F) \subseteq m_A F$, F 是极小的.

注 3.10 由上面的命题可知, 如果 $H(A)$ 是 p -Koszul 代数, 则 ${}_A k$ 有一个极小 Eilenberg-Moore 表示 (参见文献 [20]), $p \geq 2$.

由命题 3.8 和注 3.10, 可得

推论 3.11 设 A 是正则 DG 代数, 且 $H(A)$ 是分次 Koszul 代数, 则 $\text{gl.dim } H(A) < +\infty$.

如果我们把推论 3.11 中的条件 $H(A)$ 是 Koszul 分次代数削弱为 A 是 Koszul DG 代数, 则 $\text{gl.dim } H(A)$ 不一定有限.

例 3.12 记 A 为连通 DG 代数 $(k\langle x, y \rangle / (xy + yx), \partial)$, 其中 $|x| = |y| = 1$, $\partial(x) = y^2, \partial(y) = 0$.

运用命题 3.1 的证明 (文献 [12, 命题 2.4]) 中的构造方法, 可以构造 k 的一个极小半自由表示 F , 使得

$$F^\# = A^\# \oplus A^\# \Sigma e_y \oplus A^\# \Sigma e_z \oplus A^\# \Sigma e_t,$$

其中 $z = x + y \Sigma e_y$ 并且 $t = x \Sigma e_y + y \Sigma e_z$, F 的微分定义为

$$\partial(\Sigma e_y) = y, \quad \partial(\Sigma e_z) = z, \quad \partial(\Sigma e_t) = t.$$

从 F 到 k 的拟同构定义为 $\theta: F \rightarrow k$,

$$\theta(a + a_y \Sigma e_y + a_z \Sigma e_z + a_t \Sigma e_t) = \varepsilon(a).$$

因为 k 的极小半自由表示 F 有一组集中于 0 次的有限半自由基 $\{1, \Sigma e_y, \Sigma e_z, \Sigma e_t\}$, 所以 A 是 Koszul, 正则 DG 代数. 易证 $H(A) = k[x^2, y]/(y^2)$, 因此 $H(A)$ 是 Noetherian 分次代数, 但是 $\text{gl.dim } H(A)$ 并非有限.

注 3.13 由命题 3.8 以及上面的例子可知由极小自由表示诱导得到的 Eilenberg-Moore 表示不一定是极小的.

命题 3.14 设 A 为微分为 0 的连通 DG 代数, 则任意同调有下界的 DG A -模 M 都存在极小 Eilenberg-Moore 表示.

证明 因为 A 的微分为 0, 所以 $H(A) = A^\#$ 是连通分次代数. 由假设 M 同调有下界可知 $H(M)$ 有一个分次的极小自由表示

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} F_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} H(M) \rightarrow 0. \quad (1)$$

每个 F_i 可以视为一微分为 0 的微分分次 A -模, 并且每个 ∂_i 是 DG A -模同态. 我们得到一个 DG A -模及 DG A -模同态复形

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} F_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \rightarrow 0.$$

由该自由表示诱导的 M 的 Eilenberg-Moore 表示是

$$F = \prod_{i=0}^{\infty} S^{-i} F_i,$$

其微分定义为

$$\partial_F(f_0, \Sigma f_1, \dots, \Sigma^n f_n, \dots) = (\partial_1(f_1), \Sigma \partial_2(f_2), \dots, \Sigma^n \partial_{n+1}(f_{n+1}), \dots).$$

设 Λ 为 F_0 的一组自由基, 对每个 $\lambda \in \Lambda$, 可以选取 M 中的一个闭链 $m_\lambda \in M$, 使得 $\varepsilon(\lambda) = [m_\lambda]$.

对应的拟同构 $\theta: F \rightarrow M$ 定义为

$$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \lambda, \Sigma f_1, \dots, \Sigma^n f_n, \dots \right) \mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda v_\lambda.$$

由 (1) 式的极小性, 我们易证 F 是极小半自由 A -模.

设 A 为微分为 0 的连通 DG 代数, 并且设 X 为分次 $A^\sharp$ -模复形

$$\cdots \xrightarrow{d^{i-1}} X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

定义

$$\text{Cotot}(X) = \prod_{i=-\infty}^{+\infty} \Sigma^{-i} X^i,$$

其微分为

$$\partial(\dots, \Sigma^{-i} x^i, \Sigma^{-i-1} x^{i+1}, \dots) = (\dots, \Sigma^{-i} d^{i-1}(x^{i-1}), \Sigma^{-i-1} d^i(x^i), \dots).$$

因为 X 可以看作 DG A -模及 DG A -模同态的序列, 易证 $\text{Cotot}(X)$ 是 DG A -模. 我们有下面的命题

命题 3.15 设 A 是微分为 0 的连通 DG 代数, 使得 $H(A) = A^\sharp$ 为 Noetherian 分次代数. 若 X 是同调有界的分次 $A^\sharp$ -模复形, 使得每个 $H^i(X)$ 是有限生成 $A^\sharp$ -模, 则下列结论等价:

- (a) $\text{pd}_{A^\sharp} X$ 有限;
- (b) $\text{Cotot}(X)$ 是 $D^c(A)$ 中的对象;
- (c) $\text{pd}_{A^\sharp} H(\text{Cotot}(X))$ 有限.

证明 由假设条件 X 有一个极小的有限生成自由表示

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial^{i-1}} & F^i & \xrightarrow{\partial^i} & \cdots & \xrightarrow{\partial^{u-2}} & F^{u-1} \xrightarrow{\partial^{u-1}} F^u \xrightarrow{\partial^u} 0 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \varepsilon^i & & & \downarrow \varepsilon^{u-1} & \downarrow \varepsilon^u & \downarrow 0 \\ \cdots & \xrightarrow{d^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d^i} & \cdots & \xrightarrow{d^{u-2}} & X^{u-1} \xrightarrow{d^{u-1}} X^u \xrightarrow{d^u} X^{u+1} \xrightarrow{d^{u+1}} \cdots \end{array}$$

其中 $u = \sup\{i \mid H^i(X) \neq 0\}$, 并且每个 F_i 有有限自由基. 从这个复形间的拟同构, 我们可以得到一个 DG A -模拟同构

$$\begin{aligned} \omega : \text{Cotot}(F) &\rightarrow \text{Cotot}(X), \\ (\dots, \Sigma^{-i} a^i, \dots, \Sigma^{-u} a^u, 0, \dots) &\mapsto (\dots, \Sigma^{-i} \varepsilon^i(a^i), \dots, \Sigma^{-u} \varepsilon^u(a^u), 0, \dots). \end{aligned}$$

因此 $\omega : \text{Cotot}(F) \rightarrow \text{Cotot}(X)$ 是 $\text{Cotot}(X)$ 的一个极小半自由表示. 由此可知 (a) 和 (b) 等价.

由命题 3.6 和 3.8, 可得 (b) 和 (c) 等价.

由命题 3.14 可知左 Noetherian 连通分次代数上的有限生成分次模有有限投射维数当且仅当这个分次模可以视为紧致微分分次模. 特别地, 一个左 Noetherian 连通分次代数具有有限整体维数当且仅当这个分次代数可以视为微分为 0 的正则 DG 代数.

4 一些基本的同构以及对偶

引理 4.1 设 M 是同调局部有限维的 DG A -模. 则 DG A -模同态

$$\begin{aligned} \theta : M &\mapsto M^{**}, \\ m &\mapsto (f \mapsto (-1)^{|f| \cdot |m|} f(m)) \end{aligned}$$

是一个拟同构.

由引理 4.1, 可以得到 $D_{\text{lf}}(A)$ 与 $D_{\text{lf}}(\mathcal{A}^{\text{op}})$ 之间的一个对偶,

$$D_{\text{lf}}(A) \xrightleftharpoons[(\cdot)^*]{(\cdot)^*} D_{\text{lf}}(\mathcal{A}^{\text{op}}).$$

引理 4.2 设 M 和 N 分别是 $D(A)$ 和 $D_{\text{lf}}(A)$ 中的对象, 则

$$R\text{Hom}_A(M, N) \cong R\text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{op}}}(N^*, M^*).$$

证明 设 $D = \text{Hom}_k(A, k)$. 容易验证 D 既是 K -投射 A -模又是 K -投射 $\mathcal{A}^{\text{op}}$ -模. 并且有

$$\begin{aligned} R\text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{op}}}(N^*, M^*) &= R\text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{op}}}(\text{Hom}_A(N, D), \text{Hom}_A(M, D)) \\ &\stackrel{(a)}{\cong} R\text{Hom}_A(M, \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{op}}}(\text{Hom}_A(N, D), D)) \\ &= R\text{Hom}_A(M, N^{**}) \\ &\stackrel{(b)}{\cong} R\text{Hom}_A(M, N), \end{aligned}$$

其中, 同构 (a) 和 (b) 分别是根据 Swap 同构和引理 4.1 得到的.

下面的引理类似于文献 [21, 命题 2.1].

引理 4.3 (文献 [12, 引理 5.1]) 设 M 和 N 分别是 $D^+(A)$ 和 $D^c(A)$ 中的对象, 则

$$R\text{Hom}_A(M, N) \cong R\text{Hom}_A(M, A)^{L_{\otimes_A} N}.$$

引理 4.4 设 M 和 N 分别是 $D^c(A)$ 和 $D(A)$ 中的对象, 则有

$$R\text{Hom}_A(M, N) \cong R\text{Hom}_A(M, A)^{L_{\otimes_A} N}.$$

证明 由命题 3.2, M 有一个极小半自由表示 F_M , 使得 $F_M^\sharp \cong \coprod_{v \leq i \leq u} S^i(A^\sharp)^{(\beta^i)}$, 其中 $v = \inf\{j \mid H^j(M) \neq 0\}$, 每个 β^i 是非负整数并且 β^v 和 β^u 是非负整数. 设 F_N 是 N 的一个半自由表示.

将 M 和 N 分别替换为 F_M 和 F_N . 我们需要证明

$$\text{Hom}_A(F_M, A) \otimes_A F_N \cong \text{Hom}_A(F_M, F_N).$$

设

$$\begin{aligned} \omega : \text{Hom}_A(F_M, A) \otimes_A F_N &\rightarrow \text{Hom}_A(F_M, A \otimes_A F_N), \\ \lambda \otimes n \mapsto [\lambda, n] : m &\mapsto (-1)^{|m||n|} \lambda(m) \otimes n. \end{aligned}$$

由文献 [22, 定理 2], ω 是一同构.

应用引理 4.4, 我们可以证明以下命题:

命题 4.5 若 M 是紧致 DG A -模, 则 $R\text{Hom}_A(M, A)$ 是紧致 DG $\mathcal{A}^{\text{op}}$ -模.

证明 设 $v = \inf\{j \mid H^j(M) \neq 0\}$. 由命题 3.2, M 有一个极小半自由表示 F_M , 使得 $F_M^\sharp \cong \coprod_{v \leq i \leq u} \Sigma^{-i}(A^\sharp)^{(\beta^i)}$, 其中每个 β^i 是非负整数并且 β^v 和 β^u 是正整数. 由命题 3.3, 我们有 $\dim_k H(R\text{Hom}_A(M, k)) < +\infty$.

由引理 4.4, $\dim_k H(R\text{Hom}_A(M, A)^{L_{\otimes_A} k})$ 有限. 因为 $\text{Hom}_A(F_M, A)$ 集中在次数不小于 $-u$, 所以 $R\text{Hom}_A(M, A)$ 同调有下界. 由命题 3.3 可知 $R\text{Hom}_A(M, A) \in D^c(\mathcal{A}^{\text{op}})$.

由命题 4.5, 我们既将 $(\cdot)^\dagger$ 视为从 $D^c(A)$ 到 $D^c(\mathcal{A}^{\text{op}})$ 的函子, 也将它视为从 $D^c(\mathcal{A}^{\text{op}})$ 到 $D^c(A)$ 的函子.

命题 4.6 $D^c(A)$ 与 $D^c(A^{\text{op}})$ 之间存在一个对偶,

$$D^c(A) \xrightleftharpoons[R\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(-, A)]{R\text{Hom}_A(-, A)} D^c(A^{\text{op}}).$$

证明 设 M 是 $D^c(A)$ 中的一个对象, 需要证明双对偶映射

$$\omega : M \longrightarrow R\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(R\text{Hom}_A(M, A), A)$$

是同构的. 考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\cong} & R\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(A, A)^L \otimes_A M \\ & \searrow \omega & \downarrow \theta \\ & & R\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(R\text{Hom}_A(M, A), A), \end{array}$$

其中 θ 是求值同态. 由命题 3.2, M 有一个极小半自由表示 F_M , 使得 $F_M^\sharp \cong \prod_{v \leq i \leq u} S^i(A^\sharp)^{(\beta^i)}$, 其中 $v = \inf\{j \mid H^j(M) \neq 0\}$ 并且每个 β^i 是一非负整数, β^v 和 β^u 非零. 作为 DG A^e -模, A 有一个 K-内射表示 I . 易证 I 既是 K-内射 A -模又是 K-内射 A^{op} -模. 我们可以分别将 $R\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(-, A)$, $R\text{Hom}_A(-, A)$ 和 $R\text{Hom}_A(M, -)$ 代替为 $\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(-, I)$, $\text{Hom}_A(-, I)$ 和 $\text{Hom}_A(F_M, -)$.

由文献 [22, 定理 1], θ 是同构的, 因此 ω 是同构的. 设 M' 是 $D^c(A^{\text{op}})$ 的一个对象. 用同上一样的方法, 我们可以证明双对偶映射

$$\omega' : M' \longrightarrow R\text{Hom}_A(R\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(M', A), A)$$

是同构的.

5 DG 模的同调不变量

这一节来回顾有关 DG 模的一些同调不变量. 下面的有关 DG 模的投射维数是由 Yekutieli-Zhang^[14] 首先定义的.

定义 5.1 设 M 为 DG A -模. M 的投射维数定义为

$$\text{proj.dim}_A M = \inf\{d \in \mathbb{N} \mid \text{amp}(R\text{Hom}_A(M, N)) \leq d + \text{amp}(N), \forall N \in D(A)\}.$$

由极小半自由表示的存在性, 我们可以证明下面的命题:

命题 5.2 设 M 是 $D^+(A)$ 的一个对象, 则

$$\text{proj.dim}_A M = \text{amp}(R\text{Hom}_A(M, k)) = \text{flat.dim}_A M = \text{amp}(k^L \otimes_A M).$$

证明 由命题 3.1, M 有一个极小半自由表示 F_M , 使得 $F_M^\sharp = \prod_{i \geq v} S^i(A^\sharp)^{(\Lambda^i)}$, 其中 $v = \inf\{j \mid H^j(M) \neq 0\}$ 并且每个 Λ^i 是一指标集. 由 F_M 的极小性有

$$\text{amp}(R\text{Hom}_A(M, k)) = \text{amp}(k^L \otimes_A M) = \sup\{i \mid \Lambda^i \neq \emptyset\} - v.$$

若 $\sup\{i \mid \Lambda^i \neq \emptyset\} = +\infty$, 则由 $\text{amp}(R\text{Hom}_A(M, k)) = \text{amp}(k^L \otimes_A M) = +\infty$ 可知 $\text{proj.dim}_A M = \text{flat.dim}_A M = +\infty$. 此时命题成立

若 $u = \sup\{i \mid \Lambda^i \neq \emptyset\}$ 有限, 我们要证 $\text{proj.dim}_A M = \text{flat.dim}_A M = u - v$. 这只需证明 $\inf\{d \in \mathbb{N} \mid \text{amp}(R\text{Hom}_A(M, N)) \leq d + \text{amp}(N), \text{ 对任意 } N \in D^b(A)\}$ 以及

$$\inf\{d \in \mathbb{N} \mid \text{amp}(X^L \otimes_A M) \leq d + \text{amp}(X), \forall X \in D^b(A^{\text{op}})\}$$

都为 $u - v$.

对任意 $N \in D^b(A)$, 按照 2.5 中的方法, 我们可以构造 T , 使得 T 集中于 N 的同调上下界之间并且在 $D(A)$ 中 $N \cong T$. 因为 $\text{Hom}_A(F_M, T)^\# = \coprod_{v \leq i \leq u} S^{-i}(\prod_{\lambda^i \in \Lambda^i} T^\#)$ 集中于次数

$$\inf\{j | H^j(N) \neq 0\} - u, \quad \sup\{j | H^j(N) \neq 0\} - v$$

之间, 所以有

$$\begin{aligned} \sup\{j | H^j(R\text{Hom}_A(M, N)) \neq 0\} &= \sup\{j | H^j(\text{Hom}_A(F_M, T)) \neq 0\} \\ &\leq \sup\{j | H^j(N) \neq 0\} - v, \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} \inf\{j | H^j(R\text{Hom}_A(M, N)) \neq 0\} &= \inf\{j | H^j(\text{Hom}_A(F_M, T)) \neq 0\} \\ &\geq \inf\{j | H^j(N) \neq 0\} - u, \end{aligned}$$

因此 $\text{amp}(R\text{Hom}_A(M, N)) \leq u - v + \text{amp}(N)$. 我们证明了

$$u - v \geq \inf\{d \in \mathbb{N} \mid \text{amp}(R\text{Hom}_A(M, N)) \leq d + \text{amp}(N), \forall N \in D^b(A)\}.$$

另一方面, $\text{amp}(R\text{Hom}_A(M, k)) = u - v$, 所以

$$u - v = \inf\{d \in \mathbb{N} \mid \text{amp}(R\text{Hom}_A(M, N)) \leq d + \text{amp}(N), \forall N \in D^b(A)\}.$$

同样对任意 $X \in D^b(\mathcal{A}^p)$, 运用 2.5 中的截断方法可以得到 P , 使得 P 集中于 X 的同调上下界之间并且在 $D(\mathcal{A}^p)$ 中 $P \cong X$. 因为 $(P \otimes_A F_M)^\# = \coprod_{v \leq i \leq u} S^i(\prod_{\lambda_i \in \Lambda_i} P^\#)$ 集中于次数

$$\inf\{j | H^j(X) \neq 0\} + v, \quad \sup\{j | H^j(X) \neq 0\} + u$$

之间, 所以有

$$\begin{aligned} \sup\{j | H^j(X^L \otimes_A M) \neq 0\} &= \sup\{j | H^j(P \otimes_A F_M) \neq 0\} \\ &\leq \sup\{j | H^j(X) \neq 0\} + u, \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} \inf\{j | H^j(X^L \otimes_A M) \neq 0\} &= \inf\{j | H^j(P \otimes_A F_M) \neq 0\} \\ &\geq \inf\{j | H^j(X) \neq 0\} + v, \end{aligned}$$

因此 $\text{amp}(X^L \otimes_A M) \leq u - v + \text{amp}(X)$. 我们证明了

$$u - v \geq \inf\{d \in \mathbb{N} \mid \text{amp}(X^L \otimes_A M) \leq d + \text{amp}(X), \forall X \in D^b(\mathcal{A}^p)\}.$$

另一方面, $\text{amp}(X^L \otimes_A M) = u - v$, 所以

$$u - v = \inf\{d \in \mathbb{N} \mid \text{amp}(X^L \otimes_A M) \leq d + \text{amp}(X), \forall X \in D^b(\mathcal{A}^p)\}.$$

由上面的命题直接可得下面的推论:

推论 5.3 $\text{proj.dim}_A k = \text{proj.dim}_{\mathcal{A}^p} k$.

由命题 5.2, DG A -模 M 的投射维数可以度量其极小半自由模的半自由基的次数的跨度. 特别地, $\text{proj.dim}_A k = 0$ 当且仅当 k 有一个极小半自由表示 F_k , 使得其有一组半自由基集中在次数 0 处, 因此连通 DG 代数 A 是 Koszul 代数当且仅当 $\text{proj.dim}_A k = 0$.

由命题 5.2 可知 DG 模的投射维数与下面的不变量有着密切关系:

定义 5.4 (文献 [12, 定义 4.13]) 设 M 为 DG A -模. M 的宽定义为

$$\text{width}_A M = -\sup\{j \mid H^j(k^L \otimes_A M) \neq 0\}.$$

设 M 为同调有下界的 DG A -模. 易证

$$\mathrm{proj.dim}_A M = -\mathrm{width}_A M - \inf\{j \mid H^j(M) \neq 0\}.$$

定义 5.5 (文献 [11, 12]) DG A -模 M 的 depth 和 k -内射维数分别定义为

$$\mathrm{depth}_A M = \inf\{j \mid H^j(\mathrm{RHom}_A(k, M)) \neq 0\},$$

$$k.\mathrm{id}_A M = \sup\{j \mid H^j(\mathrm{RHom}_A(k, M)) \neq 0\}.$$

引理 5.6 (文献 [12, 推论 4.17]) 设 A 为正则 DG 代数, 则有

$$\mathrm{depth}_A A = \mathrm{depth}_A k = \mathrm{width}_A k.$$

并且有以下合题.

命题 5.7 (文献 [12, 定理 5.3]) 设 A 是一连通 DG 代数, 且 $k.\mathrm{id}_A A$ 有限, 则对 $D^c(A)$ 中的任意非零对象 M , $k.\mathrm{id}_A A = k.\mathrm{id}_A M + \mathrm{width}_A M$.

6 同调恒等式

本节证明有关紧致 DG 模的投射维数与相关复形的 amplitude 的一些同调恒等式.

定理 6.1 设 M 和 N 分别为 $D^c(A)$ 和 $D^b(A^{\mathrm{op}})$ 中的对象, 则有

$$\mathrm{amp}(N^L \otimes_A M) = \mathrm{proj.dim}_A M + \mathrm{amp}(N).$$

证明 由命题 3.2, M 有一个极小的半自由表示 F_M , 使得 $F_M^\# = \coprod_{v \leq i \leq u} S^i(A^\#)^{(\beta^i)}$, 其中 $v = \inf\{j \mid H^j(M) \neq 0\}$ 并且每个 β^i 是非负整数 (β^v, β^u 非零). 由命题 5.2 可知 $\mathrm{proj.dim}_A M = u - v$.

同样由命题 3.2, 存在一个线性可裂的 DG A -模同态短正合列

$$0 \rightarrow F'_M \rightarrow F_M \rightarrow S^u(A)^{(\gamma^u)} \rightarrow 0, \quad (2)$$

其中 γ^u 是正整数并且 F'_M 是 F_M 的一个半自由微分分次 A -子模成立 $F'_M{}^\# \cong \coprod_{v \leq i \leq u} S^i(A^\#)^{(\alpha^i)}$.

运用 2.5 小节中的截断方法, 可得集中于次数

$$b = \inf\{j \mid H^j(N) \neq 0\}, \quad d = \sup\{j \mid H^j(N) \neq 0\}$$

之间的 DG A -模 T , 并且 T 在 $D(A)$ 中同构于 N . 将函子 $T \otimes_A -$ 作用于线性可裂短正合列 (2) 可以得到一个 DG k -模的短正合列

$$0 \rightarrow T \otimes_A F'_M \rightarrow T \otimes_A F_M \rightarrow S^u(T)^{(\gamma^u)} \rightarrow 0.$$

由此短正合列诱导的同调长正合列包含

$$\cdots \rightarrow H^{u+d}(T \otimes_A F_M) \rightarrow H^d((T)^{(\gamma^u)}) \rightarrow H^{u+d+1}(T \otimes_A F'_M) \rightarrow \cdot \quad (3)$$

因为

$$\begin{aligned} (T \otimes_A F'_M)^\# &= T^\# \otimes_{A^\#} \coprod_{v \leq i \leq u} S^i(A^\#)^{(\alpha^i)} \\ &= \coprod_{v \leq i \leq u} S^i(T^\#)^{(\alpha^i)} \end{aligned}$$

集中于次数不大于 $u + d$, 所以 $H^{u+d+1}(T \otimes_A F'_M) = 0$. 由 $H^d(T) \neq 0$ 以及 (3) 式的正合性可知 $H^{u+d}(T \otimes_A F_M) \neq 0$. 另一方面, 因为

$$\begin{aligned} (T \otimes_A F_M)^\# &= T^\# \otimes_{A^\#} \coprod_{v \leq i \leq u} S^i(A^\#)^{(\beta^i)} \\ &= \coprod_{v \leq i \leq u} S^i(T^\#)^{(\beta^i)} \end{aligned}$$

集中于次数 $b+v$ 和 $u+d$ 之间, 因此 $\sup\{j | H^j(T \otimes_A F_M) \neq 0\} = u+d$.

我们可以选取半自由闭链基元 $e \in F_M$ 以及闭链 $t \in T$, 使得 $|e| = v$ 并且 $|t| = b$. 显然 $t \otimes e$ 是 $T \otimes_A F_M$ 中的非零闭链, 并且因为 $T \otimes_A F_M$ 集中于次数不小于 $b+v$, 所以 $t \otimes e$ 不可能是边缘, 从而 $\inf\{j | H^j(T \otimes_A F_M) \neq 0\} = b+v$.

这样就证得 $\text{amp}(N^L \otimes_A M) = u+d-v-b = \text{amp}(N) + \text{proj.dim}_A M$.

由定理 6.1, 易证下面的推论:

推论 6.2 设 A 是同调有界的连通 DG 代数, 则对 $D^c(A)$ 中的任意非零对象 M ,

$$\text{amp}(M) = \text{amp}(A) + \text{proj.dim}_A M.$$

Jørgensen^[2] 证明同调有界的局部链 DG 代数 R 上的紧致 DG 模的 amplitude 不小于 R 的 amplitude. 因为 $\text{proj.dim}_A M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, 所以对于同调有界的连通 DG 代数运用推论 6.2, 可以证得同样的结论. 由此我们推断任意同调有界的连通 DG 代数除非拟同构于 k 都不可能是正则的. 但是这并不意味着正则 DG 代数的例子会很少. 根据命题 3.6, 我们可以得到许多正则 DG 代数的例子. 设 A 是连通 DG 代数, 使得 $H(A)$ 是有有限整体维数的 Noetherian 分次代数, 则 A 是正则 DG 代数, 因此任意整体维数有限的左 Noetherian 连通分次代数可以视为微分为 0 的正则 DG 代数. 我们还可以得到许多微分不为零的如同例 6.3 这样的正则微分分次代数的例子.

例 6.3 设 A 为连通 DG 代数 $(k[x, y], \partial)$, 其中 $|x| = |y| = 1$, 且 $\partial(x) = x^2, \partial(y) = xy$.

通过计算可得 $H(A) = k[y^2]$ 是 Noetherian 分次代数并且 $\text{gl.dim} H(A) = 1$. 由推论 3.7 可知 A 是正则 DG 代数.

推论 6.4 设 A 为同调有限维的连通 DG 代数, 且 $\text{amp}(A) \geq 1$, 则 $\text{gl.dim} H(A) = +\infty$.

证明 因为 A 是同调有限维的连通 DG 代数, 所以 $H(A)$ 是 Noetherian 连通分次代数. 若 $\text{gl.dim} H(A)$ 有限, 则由推论 3.7 可得 ${}_A k$ 是 $D^c(A)$ 中的对象. 由推论 6.2, 这是不可能的, 所以 $\text{gl.dim} H(A) = +\infty$.

由上面的推论, 有限维连通分次代数的整体维数不可能有限, 除非该代数为 k .

推论 6.5 设 A 是一正则 DG 代数, 则对 $D^b(A)$ 中任意的对象 M , 有

$$\text{proj.dim}_A M = \text{proj.dim}_A k + \text{amp}(M).$$

证明 由定理 6.1 有

$$\text{amp}(k^L \otimes_A M) = \text{proj.dim}_{A^{\text{op}}} k + \text{amp}(M).$$

应用命题 5.2, 得到

$$\text{proj.dim}_A M = \text{proj.dim}_A k + \text{amp}(M).$$

推论 6.5 表明在正则 DG 代数上的所有同调有界的 DG 模当中 k 的投射维数是最小的.

引理 6.6 设 M 是 $D^c(A)$ 中的对象, 则

$$\text{proj.dim}_A M = \text{proj.dim}_{A^{\text{op}}} M^\dagger.$$

证明 由引理 4.5 可知 $R\text{Hom}_A(M, A)$ 是 $D^c(A^{\text{op}})$ 中的对象. 再由引理 4.4, 有

$$R\text{Hom}_A(M, k) \cong R\text{Hom}_A(M, A)^L \otimes_A k,$$

因此

$$\text{amp}(R\text{Hom}_A(M, k)) = \text{amp}(R\text{Hom}_A(M, A)^L \otimes_A k).$$

应用命题 5.2, 可得

$$\mathrm{proj.dim}_A M = \mathrm{proj.dim}_{A^{\mathrm{op}}} M^\dagger.$$

定理 6.7 设 M 和 N 分别是 $D^c(A)$ 和 $D^b(A)$ 中的对象, 则有

$$\mathrm{amp}(\mathrm{RHom}_A(M, N)) = \mathrm{proj.dim}_A M + \mathrm{amp}(N).$$

证明 由引理 4.5, $\mathrm{RHom}_A(M, A)$ 是 $D^c(A^{\mathrm{op}})$ 中的对象, 并且由引理 4.4, 有

$$\mathrm{RHom}_A(M, N) \cong \mathrm{RHom}_A(M, A)^L \otimes_A N.$$

应用定理 6.1 和引理 6.6, 有

$$\begin{aligned} \mathrm{amp}(\mathrm{RHom}_A(M, N)) &= \mathrm{amp}(\mathrm{RHom}_A(M, A)^L \otimes_A N) \\ &= \mathrm{proj.dim}_{A^{\mathrm{op}}} M^\dagger + \mathrm{amp}(N) \\ &= \mathrm{proj.dim}_A M + \mathrm{amp}(N). \end{aligned}$$

定理 6.1 以及 6.7 中 M 是紧致 DG A -模这个条件不能削弱为 $\mathrm{proj.dim}_A M$ 有限. 我们下面的例子.

例 6.8 设 A 为微分为 0 的连通 DG 代数 $(k[x]/(x^2), 0)$. 取 $M = k, N = A$. 容易验证 $\mathrm{proj.dim}_A k = 0$ 并且 $\mathrm{amp}(\mathrm{RHom}_A(k, A)) = 0$. 定理 6.1 以及 6.7 中的等式都不成立.

推论 6.9 设 A 是同调有界的连通 DG 代数, 则对任意紧致微分分次模 M ,

$$\mathrm{amp}(M) = \mathrm{amp}(M^\dagger).$$

证明 由定理 6.7, $\mathrm{amp}(\mathrm{RHom}_A(M, A)) = \mathrm{proj.dim}_A M + \mathrm{amp}(A)$. 而且由推论 6.2, 可得 $\mathrm{amp}(M) = \mathrm{proj.dim}_A M + \mathrm{amp}(A)$, 因此 $\mathrm{amp}(M) = \mathrm{amp}(M^\dagger)$.

7 正则 DG 代数的 Gorenstein 条件

本节研究正则 DG 代数的 Gorenstein 条件的一些等价刻画.

定义 7.1 如果 $\dim_k H(\mathrm{RHom}_A(k, A)) = 1$, 则称 A 是 Gorenstein DG 代数.

下面的命题说明分次交换的正则 DG 代数必定是 Gorenstein DG 代数.

命题 7.2 设 A 是分次交换的正则 DG 代数, 则 A 是 Gorenstein DG 代数.

证明 设 $A \simeq I$ 为 A 的 K-内射表示. 因为 A 是分次交换的 DG 代数, $\mathrm{Hom}_A(k, I)$ 可以视为 DG A^{op} -模并且 $\mathrm{Hom}_A(k, I)m_A = 0$. 对任意整数 i , $\mathrm{Hom}_A(k, I)^i$ 可以分解为 $B^i \oplus H^i \oplus C^i$, 其中 $B^{i+1} \cong \mathrm{Im} \partial_{\mathrm{Hom}}^i$, $B^i \oplus H^i \cong \mathrm{Ker} \partial_{\mathrm{Hom}}^i$ 且 $H^i \cong H^i(\mathrm{Hom}_A(k, I))$. 易证

$$H : \dots \xrightarrow{0} H^i \xrightarrow{0} H^{i+1} \xrightarrow{0} \dots$$

是 $\mathrm{Hom}_A(k, I)$ 的 DG A^{op} -子模 (由 $\mathrm{Hom}_A(k, I)m_A = 0$), 并且从 H 到 $\mathrm{Hom}_A(k, I)$ 的包含映射是拟同构. 因为 H 的微分为 0 并且 $Hm_A = 0$, 所以在 $D(A^{\mathrm{op}})$ 中 $\mathrm{RHom}_A(k, A) \cong \coprod_{i \in \mathbb{Z}} S^i k^{(\lambda^i)}$, 其中每个 λ^i 是与 H^i 的某组基一一对应的指标集.

由假设, ${}_A k$ 有极小半自由表示 F_k , 使得 $F_k^\# \cong \coprod_{0 \leq i \leq u} S^i (A^\#)^{(\kappa^i)}$, 其中每个 κ^i 是非负整数. 由 F_k 的极小性可得 $H(\mathrm{RHom}_A(k, k)) \cong \coprod_{0 \leq i \leq u} S^{-i} k^{(\kappa^i)}$. 另一方面, 由引理 4.3 可知

$$\begin{aligned} H(\mathrm{RHom}_A(k, k)) &\cong H(\mathrm{Hom}_A(F_k, A) \otimes_A F_k) \\ &\cong H(\coprod_{j \in \mathbb{Z}} S^j k^{(\lambda^j)} \otimes_A F_k) \\ &\cong \coprod_{0 \leq i \leq u} S^i (\coprod_{j \in \mathbb{Z}} S^j k^{(\lambda^j)})^{(\kappa^i)}. \end{aligned}$$

这表明 $\Pi_{j \in \mathbb{Z}} S^j k^{(\lambda^j)} \cong S^{-u} k$ 并且 $\kappa^{u-i} = \kappa^i, 0 \leq i \leq u$.

于是在 $D(A)$ 中 $R\mathrm{Hom}_A(k, A) \cong S^{-u} k$, 因此 A 是 Gorenstein DG 代数.

对于一般的正则 DG 代数 A , 下面的命题表明 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 是 $D^c(A)$ 的一个全子范畴.

命题 7.3 A 为正则 DG 代数当且仅当 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 是 $D^c(A)$ 的一个全子范畴.

证明 如果 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 是 $D^c(A)$ 的一个三角子范畴, 则因为 k 是 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 的一个对象, A 显然是正则 DG 代数.

反过来, 若 A 是正则 DG 代数, 则 k_A 是紧致对象. 设 M 是 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 中的任一对象, 我们需要证明 M 是紧致的.

由命题 3.1, M 有一个极小半自由表示 F_M 成立

$$F_M^\# \cong \Pi_{i \geq v} S^i(A^\#)^{(\Lambda^i)},$$

其中 $v = \inf\{j | H^j(M) \neq 0\}$ 并且每个 Λ^i 是一指标集. 运用截断的方法, 可以得到 M 的一个微分分次商模 T , 使得 M 拟同构于 T , 并且 T 集中在次数 v 与 M 的同调上界之间.

因为 k_A 是紧致微分分次 A -模, 所以存在 k_A 的一个极小半自由表示 F_k , 使得

$$F_k^\# = \Pi_{0 \leq i \leq u} S^i(A^\#)^{(\kappa^i)},$$

其中每个 κ^i 是非负整数并且 κ^0 和 κ^u 是正整数. 由 F_M 的极小性有

$$\Pi_{i \geq v} S^i(k)^{(\Lambda^i)} \cong H(k \otimes_A F_M) \cong H(F_k \otimes_A F_M) \cong H(F_k \otimes_A M) \cong H(F_k \otimes_A T).$$

因为 $(F_k \otimes_A T)^\# = \Pi_{0 \leq i \leq u} S^i(T^\#)^{(\kappa^i)}$ 集中于有限多个次数上, 所以 $\sup\{j | \Lambda^j \neq \emptyset\}$ 有限. 要证明 M 是紧致的, 只需证明每个 Λ^j 是有限集.

因为 F_k 有一组有限半自由基, 所以 F_k 有一个有限长的严格递增的半自由滤

$$F_k(0) \subseteq F_k(1) \subseteq \cdots \subseteq F_k(n) = F_k,$$

并且 $F_k(0)$ 以及每个 $F_k(i)/F_k(i-1)$ 是在一组有限闭链基上的 DG 自由 A -模. 存在一个线性可裂的 DG A -模同态的短正合列的序列

$$0 \rightarrow F_k(i) \rightarrow F_k(i+1) \rightarrow F_k(i+1)/F_k(i) \rightarrow 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

将函子 $-\otimes_A T$ 作用在各个短正合列, 可以得到一个新的短正合列的序列

$$0 \rightarrow F_k(i) \otimes_A T \rightarrow F_k(i+1) \otimes_A T \rightarrow (F_k(i+1)/F_k(i)) \otimes_A T \rightarrow 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

由这些短正合列可以得到一个同调长正合列的序列

$$\cdots \rightarrow H^j(F_k(i+1) \otimes_A T) \rightarrow H^j((F_k(i+1)/F_k(i)) \otimes_A T) \rightarrow H^{j+1}(F_k(i) \otimes_A T) \rightarrow \cdots,$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$. 通过对滤次数进行归纳, 可证明每个 $H^j(F_k \otimes_A T)$ 的维数有限. 这就说明每个 Λ^j 是有限集.

注 7.4 设 A 是一正则 DG 代数. 由推论 6.2 可知 $\mathrm{amp}(A) = 0$ 或 $\mathrm{amp}(A) = +\infty$. 如果 $\mathrm{amp}(A) = 0$, 则 A 显然拟同构于 k . 此时 $D^c(A)$ 即为 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$. 当 $\mathrm{amp}(A) = +\infty$ 时, A 是 $D^c(A)$ 中的对象, 但不是 $D^b(A)$ 中的对象, 因此 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 是 $D^c(A)$ 的一个真的全子范畴.

由命题 4.6, 对于任意的连通 DG 代数, 有如下的对偶:

$$D^c(A) \xrightleftharpoons[R\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(-, A)]{R\mathrm{Hom}_A(-, A)} D^c(A^{\mathrm{op}}), \quad (4)$$

当 A 是正则 DG 代数时, 下面的定理表明 A 是 Gorenstein DG 代数当且仅当存在 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 与 $D_{\mathrm{lf}}^b(A^{\mathrm{op}})$ 之间一个对偶.

定理 7.5 设 A 是正则 DG 代数, 则下列结论等价:

- (a) A 是 Gorenstein DG 代数;
- (b) $k.\text{id}_A A < +\infty$;
- (c) 在 $D_{\text{lf}}^b(A)$ 与 $D_{\text{lf}}^b(A^{\text{op}})$ 之间有一个对偶,

$$D_{\text{lf}}^b(A) \xrightleftharpoons[R\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(-, A)]{R\text{Hom}_A(-, A)} D_{\text{lf}}^b(A^{\text{op}}).$$

证明 (a) $\rightarrow$ (b) 由定义 7.1 及定义 5.5 直接可得.

(c) $\rightarrow$ (b). 由假设可知 $R\text{Hom}_A(k, A)$ 是 $D_{\text{lf}}^b(A^{\text{op}})$ 中的对象, 因此

$$k.\text{id}_A A = \sup\{i \mid H^i(R\text{Hom}_A(k, A)) \neq 0\} < +\infty.$$

(b) $\rightarrow$ (a). 因为 A 是正则 DG 代数, 由引理 5.6 可知 $\text{depth}_A A$ 有限, 因此假设 $k.\text{id}_A A < +\infty$ 表明 $k.\text{id}_A A$ 有限. 对紧致 DG A -模 k 应用命题 5.7, 可得

$$k.\text{id}_A A = k.\text{id}_A k + \text{width}_A k.$$

容易验证 $k.\text{id}_A k = 0$, 因此 $k.\text{id}_A A = \text{width}_A k$. 由引理 5.6, 有 $k.\text{id}_A A = \text{depth}_A A$, 所以 $H(R\text{Hom}_A(k, A))$ 集中在单个次数上. 这表明在 $D(A^{\text{op}})$ 中 $R\text{Hom}_A(k, A) \cong \Sigma^u k^{(\Lambda)}$, 其中 $u = -\text{width}_A k$ 并且 Λ 是指标集.

因为 k 是紧致 DG A -模, 所以存在 k 的一个极小半自由表示 F_k , 使得

$$F_k^\# \cong \coprod_{0 \leq i \leq u} \Sigma^{-i}(A^\#)^{(\kappa^i)},$$

其中每个 κ^i 是非负整数. 我们有 $H(R\text{Hom}_A(k, k)) \cong \coprod_{0 \leq i \leq u} \Sigma^i k^{(\kappa^i)}$. 另一方面,

$$\begin{aligned} H(R\text{Hom}_A(k, k)) &\cong H(\text{Hom}_A(F_k, A \otimes_A k)) \\ &\cong H(\text{Hom}_A(F_k, A) \otimes_A F_k) \\ &\cong H(\Sigma^u k^{(\Lambda)} \otimes_A F_k) \\ &\cong (\coprod_{0 \leq i \leq u} \Sigma^{u-i}(k)^{(\kappa^i)})^{(\Lambda)}. \end{aligned}$$

考虑 $H(R\text{Hom}_A(k, k))$ 的维数, 可知 Λ 只有一个元素, 因此在 $D(A^{\text{op}})$ 中, $R\text{Hom}_A(k, A) \cong \Sigma^u k_A$.

(a) $\rightarrow$ (c). 假设 $M \in D_{\text{lf}}^b(A)$ 及 $N \in D_{\text{lf}}^b(A^{\text{op}})$, 需要证明下面两个结论:

- i) $R\text{Hom}_A(M, A)$ 和 $R\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(N, A)$ 分别是 $D_{\text{lf}}^b(A^{\text{op}})$ 和 $D_{\text{lf}}^b(A)$ 中的对象;
- ii) 双对偶同态

$$M \rightarrow R\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(R\text{Hom}_A(M, A), A), \quad (5)$$

和

$$N \rightarrow R\text{Hom}_A(R\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(N, A), A) \quad (6)$$

都是拟同构.

要证明 i), 先证 $R\text{Hom}_A(M, A)$ 是 $D_{\text{lf}}^b(A^{\text{op}})$ 中的对象. 若 $\text{amp}(M) = 0$, 则用 2.5 小节中的截断方法, 可知在 $D(A)$ 中 $M \cong S^n k^{(m)}$, 其中 $n = \{i \mid H^i(M) \neq 0\}$ 并且 $m = \dim_k H^n(M)$. 由假设 A 是 Gorenstein DG 代数, 容易验证 $R\text{Hom}_A(M, A)$ 是 $D_{\text{lf}}^b(A^{\text{op}})$ 中的对象. 归纳假设当 $\text{amp}(M) < l$ ($l \geq 1$) 时, $R\text{Hom}_A(M, A)$ 是 $D_{\text{lf}}^b(A^{\text{op}})$ 中的对象. 我们需要证明当 $\text{amp}(M) = l$ 时, 该结论也成立.

设 $u = \sup\{i \mid H^i(M) \neq 0\}$. 容易验证 $\tau^{\geq u} M$ (参见 2.5 小节) 是 M 的 DG 子模, 满足 $\text{amp}(\tau^{\geq u} M) = 0$ 并且对 $i \neq u$, 有 $H^i(\tau^{\geq u} M) = 0$. 令 $\iota: \tau^{\geq u} M \rightarrow M$ 为自然的包含映射. 容易验证 ι 是 DG A -模同态并且 $H^u(\iota): H^u(\tau^{\geq u} M) \cong H^u(M)$. 由 ι 可得 $D(A)$ 中的正合三角

$$\tau^{\geq u} M \xrightarrow{\iota} M \rightarrow \text{Cone}(\iota) \rightarrow \Sigma \tau^{\geq u} M. \quad (7)$$

由 (7) 式可得同调长正合列

$$\cdots \rightarrow H^i(\tau^{\geq u} M) \rightarrow H^i(M) \rightarrow H^i(\text{Cone}(\iota)) \rightarrow H^{i+1}(\tau^{\geq u} M) \rightarrow \cdots.$$

易证

$$H^i(\text{Cone}(\iota)) \cong \begin{cases} H^i(M), & i \leq u-1, \\ 0, & i \geq u. \end{cases}$$

因此 $\text{Cone}(\iota)$ 是 $D_{\text{lf}}^b(A)$ 的对象并且 $\text{amp}(\text{Cone}(\iota)) = l-1$. 将函子 $R\text{Hom}_A(-, A)$ 作用到 (7) 式可得正合三角

$$R\text{Hom}_A(\Sigma \tau^{\geq u} M, A) \rightarrow R\text{Hom}_A(\text{Cone}(\iota), A) \rightarrow R\text{Hom}_A(M, A) \rightarrow R\text{Hom}_A(\tau^{\geq u} M, A).$$

由此正合三角导出的同调长正合列以及归纳假设 $R\text{Hom}_A(\text{Cone}(\iota), A)$ 和 $R\text{Hom}_A(\tau^{\geq u} M, A)$ 都是 $D_{\text{lf}}^b(A^p)$ 中的对象, 易证 $R\text{Hom}_A(M, A)$ 是 $D_{\text{lf}}^b(A^p)$ 中的对象. 因此对 $D_{\text{lf}}^b(A)$ 中的任意对象 M , $R\text{Hom}_A(M, A) \in D_{\text{lf}}^b(A^p)$.

由命题 4.6, 双对偶态射 ${}_A k \rightarrow R\text{Hom}_{A^p}(R\text{Hom}_A(k, A), A)$ 是拟同构的. 由 (a) 中的假设, $R\text{Hom}_A(k, A) \cong \Sigma^v k_A \in D(A^p)$, 其中 v 为某个整数. 这表明在 $D(A)$ 中 $R\text{Hom}_{A^p}(k, A) \cong S^v {}_A k$, 因此 A^p 是 Gorenstein DG 代数. 由推论 3.4, A^p 也是正则 DG 代数. 类似地, 如同以上证明 $R\text{Hom}_A(M, A) \in D_{\text{lf}}^b(A^p)$, 可以证明 $R\text{Hom}_{A^p}(N, A) \in D_{\text{lf}}^b(A)$.

还需证明 ii). 由命题 7.3, M 和 N 分别是 $D^c(A)$ 和 $D^c(A^p)$ 中的对象. 命题 4.6 表明双对偶同态 (5) 和 (6) 都是拟同构的.

注 7.6 由定理 7.5 的证明过程可知定理 7.5 中的 (a) 和 (b) 可以分别用下面的 (a)' 和 (b)' 代替:

(a)' A^p 是 Gorenstein DG 代数;

(b)' $k \cdot \text{id}_{A^p} A < +\infty$.

因此对于正则 DG 代数 A , A 是 Gorenstein DG 代数当且仅当 A^p 是 Gorenstein DG 代数.

8 三角范畴中的 Auslander-Reiten 三角

本节主要介绍三角范畴中 Auslander-Reiten 三角的一些基本概念和结果.

定义 8.1 设 $f: M \rightarrow N$ 为三角范畴 D 中的一个态射. 若存在态射 $g: N \rightarrow M$ 使得 $g \circ f = \text{id}_M$, 则称 f 是截面射 (section). 若存在态射 $h: N \rightarrow M$, 使得 $f \circ h = \text{id}_N$, 则称 f 为保核收缩 (retraction).

定义 8.2 (文献 [16, 定义 2.1]) 设 D 是三角范畴. D 中的一个特异 (distinguished) 三角 $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \xrightarrow{h} S^{-1}M$ 称为是 Auslander-Reiten 三角, 如果满足下列条件:

(AR1) 任一不是截面射的同态 $M \rightarrow N'$ 都可通过 f 分解;

(AR2) 任一不是保核收缩的同态 $N' \rightarrow P$ 都可通过 g 分解;

(AR3) $h \neq 0$.

在上述定义中, 给定 D 的对象 P , D 中未必存在形为 $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \xrightarrow{h} S^{-1}M$ 的 Auslander-Reiten 三角. 但是如果这样的 Auslander-Reiten 三角存在, 那么它一定在同构意义下唯一 (参见文献 [23, 命题 3.5(i)]). 记 M 为 τP , τ 称为 D 的 Auslander-Reiten translation. 注意 τP 在同构意义下唯一. 由文献 [16, 引理 2.3], Auslander-Reiten 三角的末端项 M 和 P 的自同态环是局部环. 特别地, M 和 P 是不可分对象.

定义 8.3 (文献 [23, 定义 3.1]) 设 D 是三角范畴. 如果对 D 中的任意自同态环为局部环的对象 P , 都存在定义 8.2 中的 Auslander-Reiten 三角, 则称 D 有 Auslander-Reiten 三角.

注意在定义 8.3 中的条件下, 有的学者只称 D 有右 Auslander-Reiten 三角.

命题 8.4 (文献 [16, 定理 2.2]) 设 Z 为三角范畴 D 中自同态环 $\Gamma = \text{Hom}_D(Z, Z)$ 为局部环的一个紧致对象. 记 $\mu : \Gamma/\text{rad}\Gamma \rightarrow I$ 是 Γ -模范畴中的内射包. 如果存在 D 中的对象 $T_Z I$, 使得

$$\text{Hom}_\Gamma(\text{Hom}_D(Z, -), I) \cong \text{Hom}_D(-, T_Z I), \quad (8)$$

则存在一个 Auslander-Reiten 三角

$$S(T_Z I) \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} T_Z I,$$

其中 γ 为自然映射

$$\text{Hom}_D(Z, Z) \xrightarrow{\pi} \Gamma/\text{rad}\Gamma \xrightarrow{\mu} I$$

在 (8) 式对应下的态射.

三角范畴 D 中的态射 $X \rightarrow Y$ 称为是纯单射 (pure monomorphism) 的, 如果对任意的紧致对象 C , 映射 $\text{Hom}_D(C, X) \rightarrow \text{Hom}_D(C, Y)$ 是一个单射. D 中的对象 X 称为纯内射 (pure-injective) 的, 如果每个纯单射 $X \rightarrow Y$ 是一个可裂单射. D 中的态射 $\alpha : X \rightarrow Y$ 是一个纯内射包 (pure-injective envelope), 如果 Y 是纯内射对象并且 α 与任意态射 $\beta : Y \rightarrow Z$ 的合成 $\beta \circ \alpha$ 是纯单射当且仅当 β 是纯单射.

引理 8.5 (文献 [16, 引理 4.3]) 设 k 是交换 Noetherian 完备局部环. 假设 D 是紧生成的 k -线性三角范畴, 并且对任意的紧致对象 X 和 Y , $\text{Hom}_D(X, Y)$ 是有限生成 k -模, 则 D 中的任意紧致对象是纯内射的.

命题 8.6 (文献 [16, 命题 3.2]) 在紧生成的三角范畴 D 中, 假设存在三角 δ' 与 δ 间的映射

$$\begin{array}{ccccccc} \delta' : & X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & S^{-1}X' \\ & \downarrow \alpha & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_Z & & \downarrow \\ \delta : & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & S^{-1}X, \end{array}$$

使得三角 δ' 中的对象, 都是紧致对象, 并且 α 是一个纯内射包, 则下列结论等价:

- (i) δ' 是 D 的由紧致对象构成的三角子范畴 D^c 中的 Auslander-Reiten 三角;
- (ii) δ 是 D 中的 Auslander-Reiten 三角.

设 k 是域. 如果一个 k -线性, Hom -有限维范畴的所有的幂等态射都可裂, 或等价地, 任意不可分对象的自同态环是局部环, 则称之为 Krull-Schmidt 范畴 (文献 [24, p.52]).

命题 8.7 设 A 是同调局部有限维的连通 DG 代数, 则 $D^c(A)$ 是 k -线性、 Hom -有限维的 Krull-Schmidt 三角范畴.

证明 设 M 和 N 为 $D^c(A)$ 中的对象. 由命题 3.2, M 和 N 分别存在极小半自由表示 F_M 和 F_N , 并且 F_M 和 F_N 都有有限半自由基. 所以 F_M 和 F_N 有有限长的半自由滤 $F_M(0) \subseteq F_M(1) \subseteq \cdots \subseteq F_M(n) = F_M$ 和 $F_N(0) \subseteq F_N(1) \subseteq \cdots \subseteq F_N(l) = F_N$, 使得 $F_M(0), F_N(0)$ 以及每个 $F_M(i)/F_M(i-1)$ 和每个 $F_N(j)/F_N(j-1)$ 都是有限闭链基上的 DG 自由 A -模. 我们可以得到两个线性可裂的微分分次 A -模同态的短正合列的序列

$$0 \rightarrow F_M(i) \rightarrow F_M(i+1) \rightarrow F_M(i+1)/F_M(i) \rightarrow 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (9)$$

以及

$$0 \rightarrow F_N(j) \rightarrow F_N(j+1) \rightarrow F_N(j+1)/F_N(j) \rightarrow 0 \quad (j = 0, 1, \dots, l-1). \quad (10)$$

由 (10) 式得到的同调长正合列的序列以及 A 是同调局部有限维的连通微分分次代数的假设, 我们可以归纳地证明 N 是同调局部有限维的. 将函子 $\text{Hom}_A(-, N)$ 作用于 (9) 式上, 可得到一个新的短正合列的序列 $(i = 0, 1, \dots, n-1)$

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(F_M(i+1)/F_M(i), N) \rightarrow \text{Hom}_A(F_M(i+1), N) \rightarrow \text{Hom}_A(F_M(i), N) \rightarrow 0.$$

由这个短正合列的序列诱导的同调长正合列的序列, 我们可归纳地证明 $H^0(\text{Hom}_A(F_M, N)) \cong \text{Hom}_{D(A)}(M, N)$ 维数有限.

因为 $D(A)$ 是有任意余积的三角范畴, 由文献 [24, 命题 3.2] 可知 $D(A)$ 中的幂等态射可裂. 因为 $D^c(A)$ 是 $D(A)$ 的一个三角全子范畴, 所以 $D^c(A)$ 中的幂等态射可裂.

因此 $D^c(A)$ 是 k -线性、Hom-有限维的 Krull-Schmidt 三角范畴.

命题 8.8 设 A 是同调局部有限维的连通 DG 代数, 则 $D^c(A)$ 存在 Auslander-Reiten 三角, 当且仅当 $(A_A)^*$ 是紧致 DG A -模.

证明 设 P 是 $D^c(A)$ 中的任一不可分对象. 由命题 8.7, $\Gamma = \text{Hom}_D(P, P)$ 是局部环. 易知 $\text{Hom}_k(\Gamma, k)$ 是 Γ -模 $\Gamma/\text{rad}\Gamma$ 的内射包. 用与文献 [10, 引理 4.1] 一样的证明可证自然等价 $\text{Hom}_{D(A)}(P, -)^* \simeq \text{Hom}_{D(A)}(-, A^{*L} \otimes_A P)$. 所以有 $\text{Hom}_\Gamma(\text{Hom}_{D(A)}(P, -), \text{Hom}_k(\Gamma, k)) \simeq \text{Hom}_{D(A)}(-, A^{*L} \otimes_A P)$. 由命题 8.4 可得 $D(A)$ 中的 Auslander-Reiten 三角

$$S(A^{*L} \otimes_A P) \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow A^{*L} \otimes_A P. \quad (11)$$

假如 $(A_A)^*$ 是紧致 DG A -模, 则因为 P 是紧致 DG A -模, $A^{*L} \otimes_A P$ 也是紧致 DG A -模. 所以 (11) 式是 $D^c(A)$ 中的 Auslander-Reiten 三角, 从而 $D^c(A)$ 存在 Auslander-Reiten 三角.

反之, 若 $D^c(A)$ 存在 Auslander-Reiten 三角, 因为 $\text{Hom}_{D^c(A)}(A, A) = \text{Hom}_{D(A)}(A, A) = H^0(A) = k$ 是局部环, 则由 A 可决定 $D^c(A)$ 中的 Auslander-Reiten 三角

$$\tau A \rightarrow Y \rightarrow A \rightarrow S^{-1}(\tau A). \quad (12)$$

由引理 8.5 以及命题 8.6 易证 (12) 式也是 $D(A)$ 中的 Auslander-Reiten 三角. 另一方面取 (11) 式中的 P 为 A 可得 $D(A)$ 中的 Auslander-Reiten 三角

$$S(A^{*L} \otimes_A A) \rightarrow N \rightarrow A \rightarrow A^{*L} \otimes_A A. \quad (13)$$

由文献 [23, 命题 3.5(i)] 可知 (12) 和 (13) 式在 $D(A)$ 中同构, 所以 $S(A^{*L} \otimes_A A) \cong \tau A \in D^c(A)$, 即得 A^* 是也是紧致 DG A -模.

9 Auslander-Reiten 三角在 $D^c(A)$ 中的存在性

对一个有限维的单连通 DG 代数 A , Jørgensen^[10] 研究了 Auslander-Reiten 三角在 $D^c(A)$ 上的存在性. Jørgensen 证明 $D^c(A)$ 存在 Auslander-Reiten 三角当且仅当 A 满足所谓的

Poincaré 对偶条件. 在这一节中, 假设 A 是同调有限维的连通 DG 代数, 讨论 Auslander-Reiten 三角在 $D^c(A)$ 中的存在性.

定义 9.1 设 E 是有限维分次 k -代数 $u = \sup\{i \mid E^i \neq 0\}$. 如果存在一个分次左 E -模同构: $S^{-u}E \rightarrow E^*$, 或等价地存在分次右 E -模同构: $S^{-u}E \rightarrow E^*$, 则称 E 是分次 Frobenius 代数.

命题 9.2 设 A 是一同调有限维的连通 DG 代数, 则 $H(A)$ 是分次 Frobenius 代数当且仅当 $({}_AA)^*$ 和 $(A_A)^*$ 分别是紧致 DG A^{pp} -模和紧致 DG A -模.

证明 取定 $u = \sup\{i \mid H^i(A) \neq 0\}$. 若 $H(A)$ 是分次 Frobenius 分次代数, 则存在一个分次 $H(A)$ -模同构 $H(A) \cong S^u \text{Hom}_k(H(A_A), k)$. 这表明 $H((A_A)^*)$ 有一个自由表示

$$0 \rightarrow S^{-u}H(A) \rightarrow H((A_A)^*) \rightarrow 0.$$

由 Eilenber-Moore 表示的构造, $(A_A)^*$ 有一个半自由表示: $S^{-u}A \xrightarrow{\sim} (A_A)^*$. 显然 $(A_A)^*$ 是紧致 DG A -模. 类似地, 可以证明 $({}_AA)^*$ 也是紧致 DG A^{pp} -模.

反之, 若 $({}_AA)^* \in D^c(A^{\text{pp}})$ 并且 $(A_A)^* \in D^c(A)$, 则需证 $H(A)$ 是分次 Frobenius 代数. 由推论 6.2 可知 $\text{amp}(A^*) = \text{proj.dim}_A(A_A)^* + \text{amp}(A)$ 以及 $\text{amp}(A^*) = \text{proj.dim}_{A^{\text{pp}}}({}_AA)^* + \text{amp}(A^{\text{pp}})$, 所以 $\text{proj.dim}_A(A_A)^* = \text{proj.dim}_{A^{\text{pp}}}({}_AA)^* = 0$. 而由引理 4.2, 有 $R\text{Hom}_A(k, A) \simeq R\text{Hom}_{A^{\text{pp}}}(({}_AA)^*, k)$ 以及 $R\text{Hom}_{A^{\text{pp}}}(k, A) \simeq R\text{Hom}_A((A_A)^*, k)$. 所以 $H(R\text{Hom}_A(k, A))$ 与 $H(R\text{Hom}_{A^{\text{pp}}}(k, A))$ 都集中于次数 $-u$ 处并且维数有限. 运用 2.5 小节中的截断方法, 在 $D(A)$ 及 $D(A^{\text{pp}})$ 中分别有 $R\text{Hom}_A(k, A) \cong S^{-u}(k_A)^{(\alpha)}$ 和 $R\text{Hom}_{A^{\text{pp}}}(k, A) \cong S^{-u}({}_A k)^{(\beta)}$, 其中 $\alpha = \dim_k H(R\text{Hom}_A(k, A))$, $\beta = \dim_k H(R\text{Hom}_{A^{\text{pp}}}(k, A))$. 由此可得

$$H(R\text{Hom}_{A^{\text{pp}}}(R\text{Hom}_A(k, A), A)) \cong H(R\text{Hom}_{A^{\text{pp}}}(S^{-u}(k_A)^{\alpha}, A)) \cong k^{(\alpha\beta)}.$$

另一方面, 设 F_k 和 $F_{(A_A)^*}$ 分别为 ${}_A k$ 和 $(A_A)^*$ 的极小半自由表示, 有

$$\begin{aligned} H(R\text{Hom}_{A^{\text{pp}}}(R\text{Hom}_A(k, A), A)) & \\ & \cong H(R\text{Hom}_{A^{\text{pp}}}(R\text{Hom}_A(k, A), (A_A)^{**})) \\ & \cong H(\text{Hom}_{A^{\text{pp}}}(\text{Hom}_A(F_k, A), \text{Hom}_k(F_{(A_A)^*}, k))) \\ & \cong H(\text{Hom}_k(\text{Hom}_A(F_k, A) \otimes_A F_{(A_A)^*}, k)) \\ & \stackrel{(a)}{\cong} H(\text{Hom}_k(\text{Hom}_A(F_k, F_{(A_A)^*}), k)) \\ & \cong H(\text{Hom}_k(\text{Hom}_A(F_k, (A_A)^*), k)) \\ & \cong H(\text{Hom}_k(\text{Hom}_k(A_A \otimes_A F_k, k), k)) \\ & \cong H(\text{Hom}_k(\text{Hom}_k(F_k, k), k)) \cong k, \end{aligned}$$

其中同构 (a) 是根据引理 4.3. 因此 $\alpha = \beta = 1$, 并且由

$$\dim_k H(R\text{Hom}_{A^{\text{pp}}}(({}_AA)^*, k)) = \dim_k H(R\text{Hom}_A((A_A)^*, k)) = 1$$

可知 $({}_AA)^*$ 和 $(A_A)^*$ 分别存在极小半自由表示

$$S^{-u}A_A \xrightarrow{\sim} ({}_AA)^*, \quad S^{-u}{}_A A \xrightarrow{\sim} (A_A)^*.$$

所以 $H(A)$ 是分次 Frobenius 代数.

由命题 8.8 和 9.2, 可得下列定理.

定理 9.3 设 A 是同调有限维连通 DG 代数, 则 $D^c(A)$ 和 $D^c(A^p)$ 存在 Auslander-Reiten 三角当且仅当 $H(A)$ 是分次 Frobenius 代数.

注 9.4 若 X 是单连通拓扑空间, 则其奇异上链复形 $C^*(X; k)$ 是单连通 DG 代数. X 在 k 上满足 Poincaré 对偶条件当且仅当 $H^*(X; k)$ 是 Frobenius 代数 (参见文献 [3, §38] 或者文献 [26, 定理 2.2.23]). 因此定理 9.3 包含文献 [10, 定理 6.3] 中的结果.

命题 9.5 设 A 是同调有限维连通 DG 代数, 则 $D^c(A)$ 和 $D^c(A^p)$ 都存在 Auslander-Reiten 三角当且仅当 A 和 A^p 都是 Gorenstein DG 代数.

证明 若 $D^c(A)$ 和 $D^c(A^p)$ 存在 Auslander-Reiten 三角, 则由定理 9.3 可知 $H(A)$ 是分次 Frobenius 代数, 因此存在分次左 $H(A)$ -模同构: $\Sigma^u H(A) \rightarrow H(A^*)$, 其中

$$u = \sup\{i \mid H^i(A) \neq 0\}.$$

由定理 3.5, $\Sigma^u A \xrightarrow{\sim} A^*$ 是 $(A_A)^*$ 的半自由表示. 类似地, 可以证明 $\Sigma^u A_A \xrightarrow{\sim} ({}_A A)^*$ 是 $({}_A A)^*$ 的一个半自由表示, 因此有

$$\begin{aligned} H(R\mathrm{Hom}_A(k, A)) &\cong H(R\mathrm{Hom}_A(k, ({}_A A)^{**})) \\ &\cong H(\mathrm{Hom}_A(k, (\Sigma^u A_A)^*)) \\ &\cong H(\mathrm{Hom}_k(\Sigma^u A \otimes_A k, k)) \\ &\cong \Sigma^{-u} k. \end{aligned}$$

类似地, 可以证明 $H(R\mathrm{Hom}_{A^p}(k, A)) \cong \Sigma^{-u} k$, 所以 A 和 A^p 都是 Gorenstein DG 代数.

反过来, 如果 A 和 A^p 都是 Gorenstein DG 代数, 则有

$$\dim_k H(R\mathrm{Hom}_A(k, A)) = \dim_k H(\mathrm{Hom}_k(F_{({}_A A)^*} \otimes_A k, k)) = 1,$$

以及

$$\dim_k H(R\mathrm{Hom}_{A^p}(k, A)) = \dim_k H(\mathrm{Hom}_k(k \otimes_A F_{(A_A)^*}, k)) = 1,$$

其中 $F_{({}_A A)^*}$ 和 $F_{(A_A)^*}$ 分别是 $({}_A A)^*$ 和 $(A_A)^*$ 的极小半自由表示, 因此 $F_{({}_A A)^*} \cong \Sigma^u A$ 并且 $F_{(A_A)^*} \cong \Sigma^u A_A$. 显然, 我们有 $(A_A)^* \in D^c(A)$ 以及 $({}_A A)^* \in D^c(A^p)$. 由命题 8.8, $D^c(A)$ 和 $D^c(A^p)$ 都有 Auslander-Reiten 三角.

10 Auslander-Reiten 三角在 $D_{lf}^b(A)$ 中的存在性

假设 A 是一个同调局部有限维的正则微分分次代数, 并且不拟同构于 k , 则由推论 6.2 可知 A 是同调无界的, 这表明 $(A_A)^*$ 不会是紧致微分分次 A -模. 由命题 8.8 可知三角范畴 $D^c(A)$ 不存在 Auslander-Reiten 三角. 由此可见当 A 为正则微分分次代数时, 讨论 Auslander-Reiten 三角在 $D^c(A)$ 中的存在性没有意义. 当 A 是正则微分分次代数时, 由命题 7.3 可知 $D_{lf}^b(A)$ 是 $D^c(A)$ 的一个三角子范畴. 在这一节的余下部分, 我们假定 A 是正则微分分次代数, 讨论 Auslander-Reiten 三角在 $D_{lf}^b(A)$ 中的存在性.

引理 10.1 设 A 是正则微分分次代数, 则对 $D_{lf}^b(A)$ 中的任意对象 M 和 N , 有 $\dim_k \mathrm{Hom}_{D(A)}(M, N) < +\infty$.

证明 由命题 7.3, M 是 $D^c(A)$ 中的一个对象, 从而 M 有极小半自由表示 F_M , 它有有限的半自由基. 作为半自由 A -模, F_M 存在一个半自由滤

$$F_M(0) \subseteq F_M(1) \subseteq \cdots \subseteq F_M(n) = F_M,$$

使得 $F_M(0)$ 以及每个 $F_M(i)/F_M(i-1)$ 都是一组有限闭链基上的 DG 自由 A -模. 我们可以得到一个线性可裂的 DG A -模同态的短正合列的序列 ($i = 0, 1, \dots, n-1$)

$$0 \rightarrow F_M(i) \rightarrow F_M(i+1) \rightarrow F_M(i+1)/F_M(i) \rightarrow 0,$$

作用上函子 $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ 后, 得到一个新的短正合列的序列 ($i = 0, 1, \dots, n-1$)

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_A(F_M(i+1)/F_M(i), N) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(F_M(i+1), N) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(F_M(i), N) \rightarrow 0.$$

由这个短正合列的序列诱导的同调长正合列的序列, 可以归纳地证明

$$H^0(\mathrm{Hom}_A(F_M, N)) \cong \mathrm{Hom}_{D(A)}(M, N)$$

的维数有限.

引理 10.2 设 A 是一正则微分分次代数, 则对 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 中的任意不可分对象 M , 自同态环 $\mathrm{Hom}_{D(A)}(M, M)$ 是局部环.

证明 因为 $D(A)$ 是有任意余积的三角范畴, 由文献 [24, 命题 3.2] 可知 $D(A)$ 中的幂等态射可裂. 因为 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 是 $D(A)$ 的一个三角全子范畴, 所以 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 中的幂等态射可裂. 由引理 10.1 可知 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 是 k -线性、Hom-有限维的三角范畴. 所以对 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 中的任意不可分对象 M , 自同态环 $\mathrm{Hom}_{D(A)}(M, M) = \mathrm{Hom}_{D_{\mathrm{lf}}^b(A)}(M, M)$ 是局部环 (文献 [24, p.52]).

因为 A 是正则 DG 代数, 由命题 3.2, k 有一个极小的半自由表示 F_k , 使得

$$F_k^\# \cong \coprod_{0 \leq i \leq u} S^i(A^\#)^{(\kappa^i)}, \quad (14)$$

其中每个 κ^i 是非负整数. 取定 $\mathcal{E} = \mathrm{Hom}_A(F_k, F_k)$, 则 F_k 可以视为微分分次 $\mathcal{E}$ -模.

引理 10.3 (文献 [10, 引理 8.2]) 存在范畴 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 与 $D^c(\mathcal{E}^{\mathrm{op}})$ 间的等价

$$D_{\mathrm{lf}}^b(A) \xrightleftharpoons[-L \otimes_{\mathcal{E}} F_k]{\mathrm{Hom}_A(F_k, -)} D^c(\mathcal{E}^{\mathrm{op}}).$$

由引理 10.1 和 10.2, $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 是一个 k -线性、Hom 有限维的 Krull-Schmidt 三角范畴. 因为 ${}_A k$ 是紧致 DG A -模并且是 $D_{\mathrm{lf}}^b(A)$ 中的一个不可分的对象, 所以 $H(\mathcal{E})$ 是有限维代数并且 $H^0(\mathcal{E})$ 是局部环. 设 $\mathcal{E}'$ 为 $\mathcal{E}$ 的微分分次子代数, 使得

$$\mathcal{E}'^i = \begin{cases} \mathcal{E}^i, & i < 0, \\ \ker d_{\mathcal{E}}^0, & i = 0, \\ 0, & i > 0. \end{cases}$$

易证包含映射 $i: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$ 是微分分次代数拟同构. 运用通常的 ^[15, 0.4] 截断方法, 我们可构造 $\mathcal{E}'$ 的一个零调微分分次理想

$$\mathcal{S}: \dots \rightarrow (\mathcal{E}')^{-u-2} \rightarrow (\mathcal{E}')^{-u-1} \rightarrow \ker d_{\mathcal{E}'}^{-u} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

并且 $\mathcal{E}'$ 拟同构于微分分次商代数

$$E = \mathcal{E}'/\mathcal{S}: 0 \rightarrow (\mathcal{E}')^{-u}/\ker d_{\mathcal{E}'}^{-u} \rightarrow (\mathcal{E}')^{-u+1} \rightarrow (\mathcal{E}')^{-u+2} \rightarrow \dots$$

显然 $\dim_k H(E) < +\infty$ 并且 E 集中于次数 $-u$ 和 0 之间.

注 10.4 取定 $R_i = E^{-i}$. 易证 $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ 是局部链微分分次代数. 通过这种方式, E 可以视为同调有限维的局部链微分分次代数.

引理 10.5 设 A 是正则微分分次代数, 则 $D^c(E^{\mathrm{op}})$ 是 k -线性、Hom-有限维的 Krull-Schmidt 三角范畴.

证明 由引理 10.1–10.3, $D^c(\mathcal{E}^{\text{op}})$ 是 k -线性、Hom 有限维的 Krull-Schmidt 三角范畴. 因为 $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}' \simeq E$, 由命题 [19, 命题 III.4.2] 可知 $D^c(E^{\text{op}})$ 与 $D^c(\mathcal{E}^{\text{op}})$ 等价, 因此 $D^c(E^{\text{op}})$ 是 k -线性、Hom-有限维的 Krull-Schmidt 三角范畴.

运用与命题 8.8 几乎同样的证明方法可以证明以下命题.

命题 10.6 $D^c(E^{\text{op}})$ 存在 Auslander-Reiten 三角当且仅当 $({}_E E)^*$ 是紧致微分分次 E^{op} -模.

命题 10.7 $H(E)$ 是分次 Frobenius 代数当且仅当 $({}_E E)^*$ 和 $(E_E)^*$ 分别是紧致微分分次 E^{op} -模和紧致微分分次 E -模.

证明 取定 $b = \inf\{i \mid H^i(E) \neq 0\}$. 若 $H(E)$ 是分次 Frobenius 代数, 则存在一个分次 $H(E)$ -模同构 $H(E) \cong S^b \text{Hom}_k(H(E_E), k)$. 这表明 $H((E_E)^*)$ 有一个自由表示

$$0 \rightarrow S^{-b}H(E) \rightarrow H((E_E)^*) \rightarrow 0.$$

由 Eilenber-Moore 表示的构造, $(E_E)^*$ 有一个半自由表示: $S^{-b}E \simeq (E_E)^*$. 显然 $(E_E)^*$ 是紧致微分分次 E -模. 类似地, 我们可以证明 $({}_E E)^*$ 也是紧致微分分次 E^{op} -模.

反之, 若 $({}_E E)^*$ 和 $(E_E)^*$ 分别是紧致微分分次 E^{op} -模和紧致微分分次 E -模, 我们需证 $H(E)$ 是分次 Frobenius 代数.

根据文献 [2, 引理 2.2] 以及文献 [22, 命题 2], $({}_E E)^*$ 和 $(E_E)^*$ 都存在有限半自由基的极小半自由表示. 由此可得

$$H(R\text{Hom}_E(k, {}_E E)) \cong H(R\text{Hom}_{E^{\text{op}}}(({}_E E)^*, k))$$

和

$$H(R\text{Hom}_{E^{\text{op}}}(k, E_E)) \cong H(R\text{Hom}_E((E_E)^*, k))$$

的维数都有限.

由注 10.4 以及文献 [22, 命题 2], ${}_E k$ 有一个半自由表示 $G \rightarrow {}_E k$, 使得

$$G^\sharp \cong \coprod_{i \geq 0} S^{-i}(E^\sharp)^{\beta^i}, \quad (14)$$

其中每个 β^i 都是非负整数.

设 $F \simeq (E_E)^*$ 为 $(E_E)^*$ 的一个极小半自由表示. 自然同态

$$\varepsilon : {}_E k \rightarrow R\text{Hom}_{E^{\text{op}}}(R\text{Hom}_E(k, E), E)$$

可表示为如下同态合成:

$$G \rightarrow \text{Hom}_{E^{\text{op}}}(E, \text{Hom}_k(F, k)) \otimes_E G \rightarrow \text{Hom}_{E^{\text{op}}}(\text{Hom}_E(G, E), \text{Hom}_k(F, k)),$$

其中第 1 个同态定义为 $g \rightarrow \rho \otimes g$, 第 2 个同态为自然同态. 显然第 1 个同态为拟同构. 因为 $\text{Hom}_k(F, k)$ 和 E 都有界并且 $G^\sharp$ 有形式 (14), 由注 10.4 以及文献 [22, 定理 1 (4)] 可知第 2 个同态是同构. 因此 ε 是一个拟同构, 并且有

$$\begin{aligned} \text{amp}(\text{Hom}_E(G, E) \otimes_E F) &= \text{amp}(\text{Hom}_k(\text{Hom}_E(G, E) \otimes_E F, k)) \\ &= \text{amp}(\text{Hom}_{E^{\text{op}}}(\text{Hom}_E(G, E), \text{Hom}_k(F, k))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

另一方面, 因为 $R\text{Hom}_E(k, E) = \text{Hom}_E(G, E) \in D_{\text{lf}}^b(E^{\text{op}})$, 由注 10.4 以及文献 [2, 定理 4.1] 有

$$\text{amp}(\text{Hom}_E(G, E) \otimes_E F) \geq \text{amp}(\text{Hom}_E(G, E)),$$

因此

$$\text{amp}(\text{RHom}_E(k, E)) = \text{amp}(\text{Hom}_E(G, E)) = 0.$$

由注 10.4 以及运用通常的截断方法, 可以得到 $S^b(k_E)^{(\alpha)}$, 使得在 $D(E^{\text{op}})$ 中, $\text{RHom}_E(k, E) \cong S^b(k_E)^{(\alpha)}$, 其中 α 是一正整数. 因为

$${}_E k \xrightarrow{\sim} \text{RHom}_{E^{\text{op}}}(\text{RHom}_E(k, E), E) \simeq \text{RHom}_{E^{\text{op}}}(S^b(k_E)^{(\alpha)}, E) \cong S^{-b}(\text{RHom}_{E^{\text{op}}}(k, E))^{(\alpha)},$$

故可以进一步得到 $\alpha = 1$, 并且 $\text{RHom}_{E^{\text{op}}}(k, E) \simeq S^b{}_E k$, 因此 $({}_E E)^*$ 和 $(E_E)^*$ 分别有极小半自由表示

$$S^{-b}{}_E E \xrightarrow{\sim} ({}_E E)^* \quad \text{和} \quad S^{-b}E_E \xrightarrow{\sim} (E_E)^*.$$

由此可知 $H(E)$ 是分次 Frobenius 代数.

定理 10.8 设 A 是正则微分分次代数, 则 $H(E)$ 是分次 Frobenius 代数当且仅当 $D_{\text{lf}}^b(A)$ 和 $D_{\text{lf}}^b(A^{\text{op}})$ 存在 Auslander-Reiten 三角.

证明 命题 10.7 表明 $H(E)$ 是 Frobenius 分次代数当且仅当 $({}_E E)^*$ 和 $(E_E)^*$ 分别是紧致微分分次 E -模和紧致微分分次 E^{op} -模. 由命题 10.6, 这等价于 $D^c(E^{\text{op}})$ 和 $D^c(E)$ 都有 Auslander-Reiten 三角.

因为 $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} E$, 由文献 [19, 命题 III.4.2] 可知 $D^c(E^{\text{op}})$ 和 $D^c(E)$ 存在 Auslander-Reiten 三角当且仅当 $D^c(\mathcal{E}^{\text{op}})$ 和 $D^c(\mathcal{E})$ 存在 Auslander-Reiten 三角. 最后由引理 10.3 中的等价, $D^c(\mathcal{E}^{\text{op}})$ 和 $D^c(\mathcal{E})$ 存在 Auslander-Reiten 三角当且仅当 $D_{\text{lf}}^b(A)$ 和 $D_{\text{lf}}^b(A^{\text{op}})$ 存在 Auslander-Reiten 三角.

引理 10.9^[4] 设 A 为 Koszul 正则 DG 代数, 则 $H(E)$ 是分次 Frobenius 代数当且仅当 A 是 Gorenstein DG 代数.

命题 10.10 设 A 为 Koszul 正则微分分次代数, 则 A 是 Gorenstein 微分分次代数当且仅当 $D_{\text{lf}}^b(A)$ 和 $D_{\text{lf}}^b(A^{\text{op}})$ 都有 Auslander-Reiten 三角.

证明 设 A 为 Koszul 正则微分分次代数, 则由引理 10.9 可知 A 是 Gorenstein DG 代数当且仅当 $H(E)$ 是分次 Frobenius 代数. 而由定理 10.8, $H(E)$ 是分次 Frobenius 代数当且仅当 $D_{\text{lf}}^b(A)$ 和 $D_{\text{lf}}^b(A^{\text{op}})$ 存在 Auslander-Reiten 三角.

致谢 感谢张坚教授和何济位副教授对本文所提的宝贵建议.

参考文献

- 1 Jørgensen P. Amplitude inequalities for differential graded modules. ArXiv:math.RA/0601416 v1
- 2 Iversen B. Amplitude inequalities for complexes. *Ann Sci École Norm Sup*, **10**: 547–558 (1977)
- 3 Félix Y, Halperin S, Thomas J C. Rational Homotopy Theory. Grad Texts in Math, 205. Berlin: Springer, 2000
- 4 He J W, Wu Q S. Koszul differential graded algebras and BGG correspondence. *J Algebra*, **320**: 2934–2962 (2008)
- 5 Félix Y, Halperin S, Thomas J C. Gorenstein spaces. *Adv Math*, **71**: 92–112 (1988)
- 6 Avramov L L, Foxby H V. Locally gorenstein homomorphisms. *Amer J Math Soc*, **114**: 1007–1047 (1992)
- 7 Dwyer W, Greenlees J P C, Iyengar S. Duality in algebra and topology. *Adv Math*, **200**: 357–402 (2006)

- 8 Frankild A J, Jørgensen P. Gorenstein differential graded algebras. *Israel J Math*, **135**: 327–354 (2003)
- 9 Frankild A J, Iyengar S, Jørgensen P. Dualizing differential graded modules and Gorenstein differential graded algebras. *J London Math Soc*, **68**(2): 288–306 (2003)
- 10 Jørgensen P. Auslander-Reiten theory over topological spaces. *Comment Math Helv*, **79**: 160–182 (2004)
- 11 Frankild A J, Jørgensen P. Homological properties of cochain differential graded algebras. *J Algebra*, **320**: 3311–3326 (2008)
- 12 Mao X F, Wu Q S. Homological invariants for connected DG algebra. *Comm Algebra*, **36**: 3050–3072 (2008)
- 13 Keller B. Deriving DG categories. *Ann Sci École Norm Sup*, **27**: 6–102 (1994)
- 14 Yekutieli A, Zhang J J. Rigid complexes via DG algebras. *Trans Amer Math Soc*, **360**: 3211–3248 (2008)
- 15 Frankild A J, Jørgensen P. Homological identities for differential graded algebras. *J Algebra*, **265**: 114–136 (2003)
- 16 Krause H. Auslander-Reiten theory via Brown representability. *K-theory*, **20**: 331–344 (2000)
- 17 Krause H. Auslander-Reiten triangles and a theorem of Zimmermann. *Bull London Math Soc*, **37**: 361–372 (2005)
- 18 Neeman A. The connection between the K-theory localization theorem of Thomason. Trobaugh and Yao and the smashing subcategories of Bousfield and Ravenel. *Ann Sci École Norm Sup*, **25**: 547–566 (1992)
- 19 Kriz I, May J P. Operads, Algebras, Modules and Motives. Astérisque, 233, 1995
- 20 He J W, Lu D M. Higher Koszul algebras and A-infinity algebras. *J Algebra*, **293**: 335–362 (2005)
- 21 Jørgensen P. Non-commutative graded homological identities. *J London Math Soc*, **57**: 336–350 (1998)
- 22 Apassov D. Homological dimensions over differential graded rings. In: Complexes and Differential Graded Modules. Doctor Dissertation, Lund University, 1999, 25–39
- 23 Happel D. On the derived category of a finite-dimensional algebra. *Comment Math Helv*, **62**: 339–389 (1987)
- 24 Ringel C M. Tame algebras and integral quadratic forms. In: Lecture Notes in Math, Vol 1099. Berlin: Springer-Verlag, 1984