轨道逼近时间集的密度

袁大琰^{①*}, 熊金城^②

① 南京师范大学数学系, 南京 210046;

② 华南师范大学数学系, 广州 510631

E-mail: akqjok@qq.com, xiongjch@scnu.edu.cn

收稿日期: 2010-04-21; 接受日期: 2010-09-26; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10771079) 资助项目

摘要 任意给定 $0 \leq p \leq q \leq 1$, 证明了在符号系统中 (进而在帐篷映射中) 存在 Mycielski 集 C , 使得 C 中任意两个互异的点的轨道按照下密度 p , 上密度 q 的“速率”逼近. 构造了线段上的连续映射, 使其具有一个满 Lebesgue 测度的 Mycielski 集 S , 使得 S 中任意两个互异的点的轨道按照下密度 p , 上密度 q 的“速率”逼近.

关键词 混沌 轨道逼近 时间集 时间集密度

MSC (2000) 主题分类 37B05

0 引言

广而言之, 混沌指系统在沿着时间维度演化的过程中所表现出来的、其微观个体的状态相对于人们的预测能力而言的不确定性, 它是系统演变的复杂性的表现. 数学上的混沌概念首次见于 [1], 他们用点的轨道的逼近与分离来刻画系统演化的复杂性, 后人用 Li-Yorke 混沌来命名这种复杂性. 30 多年来数学领域中的混沌受到广泛的关注和深入的研究, 基于 Li-Yorke 混沌概念之上, 人们先后研究了 Devaney 混沌 [2], Wiggins 混沌 [3], 通有混沌 [4], ω -混沌 [5], 熊混沌 [6, 7], 多元混沌 [8] 等多种类型的混沌. 分布混沌, 即 DC1 混沌, 的研究始于 Schweizer 和 Smítal [9]. 分布混沌从轨道逼近时间集密度的角度进一步揭示了隐藏于 Li-Yorke 混沌之中的丰富多彩的复杂性. 后来提出的 DC2 混沌 [10–12] 同样是对轨道逼近方式多样性的展示. Akin [13, 14], Xiong 等 [15] 把 Furstenberg 族引入混沌研究, 对轨道逼近方式进行了概括, 使得各种通常的混沌都是 Furstenberg 族意义之下的混沌的特例. Tan 等 [16] 则进一步用双 Furstenberg 族来描述轨道的逼近和远离. Furstenberg 意义下的混沌的研究工作使对混沌的分类更加细化.

本文研究特定系统中轨道逼近时间集符合给定上下密度的混沌集, 分别从拓扑结构和测度两个方面刻画这种混沌集的大小. 本文的主要结论有两个, 其一是证明对任给的 $0 \leq p \leq q \leq 1$, 在符号系统中 (进而在帐篷映射中) 存在 Mycielski 集 C , 使得 C 中任意两个互异的点的轨道按照下密度 p , 上密度 q 的“速率”逼近 (见定理 3.9). 其二是对任给的 $0 \leq p \leq q \leq 1$, 构造了线段映射, 使其具有一个满 Lebesgue 测度的可测集 S , 使得 S 中任意两个互异的点的轨道按照下密度 p , 上密度 q 的“速率”逼近 (见定理 5.0). 从这两个结果看到, 即使在同一个系统中, 轨道逼近的方式都可以是极其多样的, 这说明用双 Furstenberg 族来描述轨道的逼近和远离是有意义的.

引用格式: Yuan D L, Xiong J C. Densities of trajectory approximation time sets (in Chinese). Sci Sin Math, 2010, 40(11): 1097–1114, doi: 10.1360/012010-291

1 D_p^q 混沌与 E_p^q 混沌

如非特别指明, 本文中 i, j, k, l, m, n 等变量取值于 $\mathbb{N}$.

对于 $n \in \mathbb{N}$, 用 $\underline{n}$ 表示自然数段 $\mathbb{N} \cap [0, n)$. 设 $N \subset \mathbb{N}$. 对 $n \geq 1$ 记

$$\xi_n N = \text{card}(N \cap \underline{n}).$$

分别定义 N 的下密度 $\mu_* N$ 和上密度 $\mu^* N$ 为

$$\mu_* N = \liminf \frac{1}{n} \xi_n N, \quad \mu^* N = \limsup \frac{1}{n} \xi_n N.$$

若 $\mu_* N = \mu^* N = d$, 则称 d 为 N 的密度, 记作 $\mu N = d$. 称 N 是一个 **syndetic 集合**, 如果存在 $m > 0$ 使得 $(N - \underline{m}) \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$, 即对任意 $i \in \mathbb{N}$, $(i + \underline{m}) \cap N \neq \emptyset$, 这里, $N - \underline{m}$ 表示整数集 $\{i - j : i \in N, j \in \underline{m}\}$, $i + \underline{m}$ 表示整数集 $\{i + j : j \in \underline{m}\}$.

我们把 $N \subset \mathbb{N}$ 视同于其特征函数, 即符号空间 $\underline{2}^{\mathbb{N}}$ 上的点 $x : xi = 1 \Leftrightarrow i \in N$. 用 σ 表示 $\underline{2}^{\mathbb{N}}$ 上的转移映射 $x_0 x_1 \cdots \mapsto x_1 x_2 \cdots$. 相应的, 我们有 $\sigma N = (N - 1) \cap \mathbb{N}$.

设 X 是一个集合. 对 $A \subset X$, 用 A^c 表示 A 的余集. 设 $R \subset X \times X$ 为 X 上的一个关系. 定义 R 的轨道为 $O_R = \cup R^i$. 称 $A \subset X$ 为 R 的一个**相关集**, 如果 $A \times A \setminus \Delta X \subset R$, 其中 ΔX 为 $X \times X$ 中的**对角线** $\{(x, x) : x \in X\}$. R 的相关集的全体记作 $\mathcal{C}R$, 并称 R 的一个相关集为一个 $\mathcal{C}R$ 集.

设 (X, ρ) 是一个度量空间. 对 $\delta > 0$ 用 $[\Delta X]_\delta$ 表示 ΔX 的 δ -开平行体 $\{(x, y) \in X \times X : \rho(x, y) < \delta\}$. 对 X 子集 A, B , 定义两者的“间隙距离”为 $\rho(A, B) = \inf \rho(A \times B)$.

一个可完备度量化的第二可数的 Hausdorff 空间称作一个 **Polish 空间**, 一个 Polish 空间的稠密的内部为空的 σ -Cantor 子集称作一个 **Mycielski 子集** (见 [14]). 一个 Polish 空间子集在相关拓扑下做成一个 Polish 空间当且仅当这个子集是一个 $\mathcal{G}^\delta$ 集 (见 [17]).

本文所指**动力系统**是由一个度量空间及其上一个连续自映射所构成的正向 (即沿着 $\mathbb{N}$) 映射迭代系统. 设 (X, ρ, f) 是一个动力系统. 对 $x \in X$ 和 $A \subset X$, 定义**回复时间集** $N_f(x, A) = \{i \in \mathbb{N} : f^i x \in A\}$. 对于 $x, y \in X$, 称 x, y

$$\begin{cases} \text{asymptotic,} & \text{若 } \lim \rho(f^i x, f^i y) = 0; \\ \text{proximal,} & \text{若 } \liminf \rho(f^i x, f^i y) = 0; \\ (\delta\text{-})\text{distal,} & \text{若 } \liminf \rho(f^i x, f^i y)(= \delta) > 0. \end{cases}$$

对于 $(x_0, x_1), (y_0, y_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 称 $(x_0, x_1) \leq (y_0, y_1)$, 如果 $x_0 \leq y_0$ 且 $x_1 \leq y_1$.

设 (X, f) 是一个动力系统. 对于 $x, y \in X$, 分别定义 $\mathbb{R}$ 上的函数 $F_*(f, x, y, \cdot)$ 和 $F^*(f, x, y, \cdot)$ 为

$$\begin{cases} F_*(f, x, y, t) = \mu_* N_{f \times f}((x, y), [\Delta X]_t), \\ F^*(f, x, y, t) = \mu^* N_{f \times f}((x, y), [\Delta X]_t). \end{cases}$$

$F_*(f, x, y, \cdot)$ 和 $F^*(f, x, y, \cdot)$ 均为概率分布函数并满足

$$\begin{cases} F_*(f, x, y, t) = F^*(f, x, y, t) = 0, & \text{当 } t \leq 0, \\ F_*(f, x, y, t) \leq F^*(f, x, y, t), & \text{当 } 0 < t \leq \text{diam} X, \\ F_*(f, x, y, t) = F^*(f, x, y, t) = 1, & \text{当 } t > \text{diam} X. \end{cases}$$

故称分布 $F_*(f, x, y, \cdot)$ 和 $F^*(f, x, y, \cdot)$ 为 (x, y) (在 f 迭代下) 的下分布函数和上分布函数^[9]. 记

$$F(f, x, y, t) = (F_*(f, x, y, t), F^*(f, x, y, t)).$$

称 $F(f, x, y, \cdot)$ 为一个分布函数对.

对 $0 \leq p \leq q \leq 1$, 定义集合

$$D_p^q f = \{(x, y) \in X \times X : \text{存在 } t > 0 \text{ 使得对任意 } 0 < t_1 \leq t, \\ F_*(f, x, y, t_1) = p, F^*(f, x, y, t_1) = q\}.$$

称 $D_p^q f$ 中的点对是 f 的 D_p^q 混沌点对. 一个 $CD_p^q f$ 集称作 f 的一个 D_p^q 混沌集.

注记 1.0 Schweizer 和 Smítal^[9] 所讨论的分布混沌即是 D_0^1 混沌.

分别定义从 $X \times X$ 到 $\mathbb{I} = [0, 1]$ 的函数 $E_*(f, \cdot)$ 和 $E^*(f, \cdot)$ 为

$$\begin{cases} E_*(f, x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} F_*(f, x, y, t), \\ E^*(f, x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} F^*(f, x, y, t). \end{cases}$$

并记

$$E(f, x, y) = (E_*(f, x, y), E^*(f, x, y)).$$

对 $0 \leq p \leq q \leq 1$, 定义集合

$$E_p^q f = \{(x, y) \in X \times X : E(f, x, y) = (p, q)\}.$$

称 $E_p^q f$ 中的点对是 f 的 E_p^q 混沌点对. 一个 $CE_p^q f$ 集称作 f 的一个 E_p^q 混沌集.

显然, $D_p^q f \subset E_p^q f$. 相反的包含关系通常并不成立. 参见 [18].

性质 1.1 设 X 是一个集合, f 是 X 上的一个自映射, $x \in X$, $A \subset X$. 则

- (a) $N_f(fx, A) = \sigma N_f(x, A)$;
- (b) 若 $y \in f^{-1}x$, 则 $N_f(y, A) \in \sigma^{-1} N_f(x, A)$.

性质 1.2 设 $M, N \subset \mathbb{N}$.

- (a) $\mu_* N + \mu^* N^c = 1$.
- (b) 设 $M \subset N$. 则 $\mu_* M \leq \mu_* N$, $\mu^* M \leq \mu^* N$.
- (c)

$$\begin{aligned} \mu_* M + \mu_* N - 1 &\leq \mu_*(M \cap N) \\ &\leq \min(\mu_* M, \mu_* N) \\ &\leq \max(\mu_* M, \mu_* N) \\ &\leq \mu_*(M \cup N) \\ &\leq \mu^* M + \mu^* N; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_* M + \mu_* N - 1 &\leq \mu^*(M \cap N) \\ &\leq \min(\mu^* M, \mu^* N) \\ &\leq \max(\mu^* M, \mu^* N) \\ &\leq \mu^*(M \cup N) \\ &\leq \mu^* M + \mu^* N. \end{aligned}$$

特别的, 对 $\mu M = 0$, 有

$$\begin{aligned}\mu_*(N \setminus M) &= \mu_*(N \cup M) = \mu_*(N \triangle M) = \mu_* N, \\ \mu^*(N \setminus M) &= \mu^*(N \cup M) = \mu^*(N \triangle M) = \mu^* N;\end{aligned}$$

对 $\mu M = 1$, 有

$$\begin{aligned}\mu_*(N \cap M) &= \mu_* N, \\ \mu^*(N \cap M) &= \mu^* N.\end{aligned}$$

(d) 设 $N = \{n_0 < n_1 < n_2 < \cdots\}$. 则

$$\mu_* N = \liminf \frac{j}{n_j}, \quad \mu^* N = \limsup \frac{j}{n_j}.$$

(e) 设 $N = \{n_0 < n_1 < n_2 < \cdots\}$ 满足 $n_{j+1} - n_j \rightarrow \infty$. 则 $\mu N = 0$.

(f)

$$\begin{aligned}\mu_* \sigma N &= \mu_* \sigma^{-1} N = \mu_* N, \\ \mu^* \sigma N &= \mu^* \sigma^{-1} N = \mu^* N.\end{aligned}$$

特别的, 对 $\mu M = 0$, 有

$$\mu(M \pm \underline{n}) = 0.$$

性质 1.3 设 $fx' = x, fy' = y$. 则

$$F(f, x', y', t) = F(f, x, y, t) = F(f, fx, fy, t).$$

证明 由性质 1.1 和 1.2 得证. □

由性质 1.3 即有

性质 1.4 $D_p^q f$ 和 $E_p^q f$ 均是 $f \times f$ -不变和 $((f \times f)^{-1})$ -不变的.

命题 1.5 设 π 是从动力系统 (X, f) 到动力系统 (Y, g) 的一致连续的半共轭. 设 $a, b \in X$, $\pi a = x, \pi b = y$. 则对任意 $t > 0$, 存在 $s > 0$, 使得 $F(f, a, b, s) \leq F(g, x, y, t)$. 特别的, 有 $E(f, a, b) \leq E(g, x, y)$.

证明 设 $t > 0$. 由 π 的一致连续性, 取 $s > 0$ 使得对任意 $a', b' \in X$, 如果 $\rho(a', b') < s$ 即有 $\rho(\pi a', \pi b') < t$. 则

$$N_{g \times g}((x, y), [\Delta Y]_t) \supset N_{f \times f}((a, b), [\Delta X]_s).$$

于是 $F(g, x, y, t) \geq F(f, a, b, s)$. □

由命题 1.5 即可推出如下命题.

命题 1.6 设 π 是从动力系统 (X, f) 到动力系统 (Y, g) 的共轭, 且 π 和 π^{-1} 均一致连续. 设 $a, b \in X, \pi a = x, \pi b = y$. 则有

(a) $(a, b) \in D_p^q f$ 当且仅当 $(x, y) \in D_p^q g$;

(b) $(a, b) \in E_p^q f$ 当且仅当 $(x, y) \in E_p^q g$. □

2 符合给定上、下密度的自然数集

设自然数列 $l_n \rightarrow \infty$ 满足 $0 = l_0 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots$. 记 $d_n = l_{n+1} - l_n$, $e_n = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} d_{2k}$, $n \geq 0$. 则

$$e_{2n} = e_{2n+1}.$$

命题 2.0 对任意 $0 \leq p \leq q \leq 1$, 存在 $0 = l_0 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots$, 使得

(a) $\frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} \rightarrow p$;

(b) $\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} \rightarrow q$;

(c) $d_n \rightarrow \infty$.

证明 令 $l_0 = 0$, $l_1 = 1$. 此时 $d_0 = 1$, $\frac{e_0}{l_1} = 1$. 下面分七种情形完成 l_n , $n \geq 1$, 的构造.

情形一 设 $p = 0$, $q = 1$. 依次令 $l_{n+1} = (n+1)l_n$. 则

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} \geq \frac{d_{2n}}{l_{2n+1}} = \frac{2n}{2n+1} \rightarrow 1 = q; \\ 0 &\leq \frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} = \frac{d_{2n}}{l_{2n+2}} \leq \frac{l_{2n+1}}{l_{2n+2}} = \frac{1}{2n+2} \rightarrow 0 = p; \\ d_n &= nl_n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

情形二 设 $p = q = 0$. 依次令 $l_{2n} = 2nl_{2n-1}$, $l_{2n+1} = l_{2n} + 2n + 1$, $n \geq 1$. 首先

$$\begin{aligned} \frac{e_{2n+2} - e_{2n}}{l_{2n+3} - l_{2n+1}} &= \frac{d_{2n+2}}{d_{2n+2} + d_{2n+1}} = \frac{2n+3}{2n+3 + (2n+1)l_{2n+1}} \\ &\leq \frac{2n+3}{2n+3 + (2n+1)^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

由 Stotze 极限公式,

$$\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} = \frac{(e_{2n} - e_{2n-2}) + (e_{2n-2} - e_{2n-4}) + \dots + (e_2 - e_0) + e_0}{(l_{2n+1} - l_{2n-1}) + (l_{2n-1} - l_{2n-3}) + \dots + (l_3 - l_1) + l_1} \rightarrow 0 = q.$$

其次,

$$0 \leq \frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} = \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}} \leq \frac{l_{2n+1}}{l_{2n+2}} = \frac{1}{2n+2} \rightarrow 0 = p.$$

最后, $d_{2n} = (2n-1)l_{2n-1} \rightarrow \infty$, $d_{2n+1} = 2n+1 \rightarrow \infty$.

情形三 设 $p = q = 1$. 依次令 $l_{2n} = l_{2n-1} + 2n$, $l_{2n+1} = (2n+1)l_{2n}$. 其余的证明与情形二类似, 从略.

情形四 设 $0 = p < q < 1$. 对 $n \geq 1$, 依次令 $l_{2n} = 2nl_{2n-1}$, l_{2n+1} 为满足 $l_{2n+1} \geq l_{2n}$ 且 $\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} > q$ 的最小值. 显然, 仍然有

$$0 \leq \frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} = \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}} \leq \frac{l_{2n+1}}{l_{2n+2}} = \frac{1}{2n+2} \rightarrow 0 = p.$$

令 $\delta = \min(\frac{1}{2}q, \frac{1}{2}(1-q))$. 取 n^* 使得 $\frac{1}{2n^*+2} < \delta$. 当 $n \geq n^*$ 时, 根据

$$\frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} \leq \frac{1}{2n+2} \leq \delta \leq \frac{1}{2}q$$

和 l_{2n+3} 的取法得到 $d_{2n+2} > 0$. 从而

$$\frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} \leq \frac{e_{2n+2} - 1}{l_{2n+2} - 1} \leq q < \frac{e_{2n+2}}{l_{2n+3}}. \quad (2.0)$$

又

$$0 \leq \frac{e_{2n+2}}{l_{2n+3}} - \frac{e_{2n+2}-1}{l_{2n+3}-1} < \frac{e_{2n+2}}{l_{2n+3}} - \frac{e_{2n+2}-1}{l_{2n+3}} = \frac{1}{l_{2n+3}} \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

(2.0) 和 (2.1) 推出 $\frac{e_{2n+2}}{l_{2n+3}} \rightarrow q$. 即 $\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} \rightarrow q$. 接下来我们证明 $d_n \rightarrow \infty$. $d_{2n+1} = (2n-1)l_{2n-1} \rightarrow \infty$, 是显然的. 当 $n \geq n^*$ 时, 由

$$\frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} < \frac{1}{2}q < q < \frac{e_{2n+2}}{l_{2n+3}}$$

得

$$\frac{e_{2n+2}}{l_{2n+3}} > \frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} + \frac{1}{2}q.$$

即

$$\frac{e_{2n+1} + d_{2n+2}}{l_{2n+2} + d_{2n+2}} > \frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} + \frac{1}{2}q.$$

由最后一个不等式可推出

$$d_{2n+2} > \frac{\frac{1}{2}ql_{2n+2}}{1 - \frac{1}{2}q - \frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}}} > \frac{1}{2}ql_{2n+2} \rightarrow \infty.$$

即 $d_{2n} \rightarrow \infty$.

情形五 设 $0 < p < q = 1$. 依次令 l_{2n} 为满足 $l_{2n} \geq l_{2n-1}$ 且 $\frac{e_{2n-1}}{l_{2n}} < p$ 的最小值, $l_{2n+1} = (2n+1)l_{2n}$. 其余的证明方法体现于情形四或情形六, 此处从略.

情形六 设 $0 < p = q < 1$. 令 $\delta = \min(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}(1-p))$. 依次令 l_{2n} 为满足 $l_{2n} \geq l_{2n-1}$ 且 $\frac{e_{2n-1}}{l_{2n}} < p - \frac{\delta}{\sqrt{2n}}$ 的最小值, l_{2n+1} 为满足 $l_{2n+1} \geq l_{2n}$ 且 $\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} > p + \frac{\delta}{\sqrt{2n+1}}$ 的最小值.

由各 l_{2n+1} 的取法易见, 各个 $d_{2n} > 0$, 则 $l_{2n+1} \geq n$. 如果 $l_{2n+2} = l_{2n+1}$, 即 $d_{2n+1} = 0$, 则有

$$\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}+1} < p - \frac{\delta}{\sqrt{2n+2}} < p + \frac{\delta}{\sqrt{2n+1}} < \frac{e_{2n}}{l_{2n+1}}.$$

从而有

$$\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} - \frac{e_{2n}}{l_{2n+1}+1} > \frac{\delta}{\sqrt{2n+1}} + \frac{\delta}{\sqrt{2n+2}} > \frac{2\delta}{\sqrt{2n+2}}.$$

即有 $\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}(l_{2n+1}+1)} > \frac{2\delta}{\sqrt{2n+2}}$. 由 $e_{2n} \leq l_{2n+1}$ 和 $l_{2n+1} \geq n$ 得 $\frac{1}{n+1} > \frac{2\delta}{\sqrt{2n+2}}$. 即 $n < \frac{1}{2\delta^2} - 1$. 令 $n^* = [\frac{1}{2\delta^2} - 1]$ 为不大于 $\frac{1}{2\delta^2} - 1$ 的最大整数. 则当 $n > n^*$ 时, $d_{2n+1} > 0$. 当 $n > 2n^*$ 时, $l_n \geq n - n^*$. 下设 $n > n^*$.

由各个 $d_n > 0 (n > n^*)$, 有

$$\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} > p + \frac{\delta}{\sqrt{2n+1}} \geq \frac{e_{2n}-1}{l_{2n+1}-1}$$

和

$$0 \leq \frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} - \frac{e_{2n}-1}{l_{2n+1}-1} \leq \frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} - \frac{e_{2n}-1}{l_{2n+1}} = \frac{1}{l_{2n+1}} \rightarrow 0.$$

由上两式以及 $\frac{\delta}{\sqrt{2n}} \rightarrow 0$ 即得

$$\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} \rightarrow p = q.$$

由

$$\frac{e_{2n}}{l_{2n+2}} = \frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} < p - \frac{\delta}{\sqrt{2n+2}} \leq \frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}-1} = \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}-1}$$

和

$$0 \leq \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}-1} - \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}} = \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}(l_{2n+2}-1)} \leq \frac{1}{l_{2n+2}} \rightarrow 0$$

以及 $\frac{\delta}{\sqrt{2n+2}} \rightarrow 0$, 又有

$$\frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} \rightarrow p = p.$$

下证 $d_n \rightarrow \infty$. 注意到, 由 e_n 的定义和 l_n 的取法以及各个 $d_n > 0 (n > n^*)$, 有

$$\begin{cases} \frac{e_{2n}-1}{l_{2n+1}-1} \leq p + \frac{\delta}{\sqrt{2n}} < \frac{e_{2n}}{l_{2n+1}}, \\ \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}} = \frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} < p - \frac{\delta}{\sqrt{2n+2}}. \end{cases} \quad (2.2)$$

则

$$\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} - \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}} \geq \frac{\delta}{\sqrt{2n+1}} + \frac{\delta}{\sqrt{2n+2}} \geq \frac{2\delta}{\sqrt{2n+2}}.$$

即

$$\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} - \frac{e_{2n}}{l_{2n+1} + d_{2n+2}} \geq \frac{2\delta}{\sqrt{2n+1}}.$$

从最后一个不等式解出

$$d_{2n+1} \geq \frac{2\delta l_{2n+1}^2}{e_{2n}\sqrt{2n+2} - 2\delta l_{2n+1}} = \frac{2\delta}{\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} \frac{\sqrt{2n+2}}{l_{2n+1}} - \frac{2\delta}{l_{2n+1}}}.$$

由 $\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} \leq 1$ 和 $l_{2n+1} \geq 2n+1-n^*$ 即得 $d_{2n+1} \rightarrow \infty$. 同时, 由 (2.2) 有

$$\frac{e_{2n+2}}{l_{2n+3}} - \frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} \geq \frac{\delta}{\sqrt{2n+3}} + \frac{\delta}{\sqrt{2n+2}} \geq \frac{2\delta}{\sqrt{2n+3}}.$$

即

$$\frac{e_{2n+1} + d_{2n+2}}{l_{2n+2} + d_{2n+2}} - \frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} > \frac{2\delta}{\sqrt{2n+3}}.$$

从中解出

$$d_{2n+2} \geq \frac{2\delta l_{2n+2}^2}{(l_{2n+2} - e_{2n} - 2\delta l_{2n+2})\sqrt{2n+3}} = \frac{2\delta}{(1 - \frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} - \frac{2\delta}{l_{2n+2}}) \frac{\sqrt{2n+3}}{l_{2n+2}}}.$$

由 $l_{2n+2} \geq 2n+2-n^*$ 推出 $d_{2n+2} \rightarrow \infty$. 即 $d_{2n} \rightarrow \infty$.

情形七 设 $0 < p < q < 1$. 依次令 l_{2n} 为满足 $l_{2n} \geq l_{2n-1}$ 且 $\frac{e_{2n-1}}{l_{2n}} < p$ 的最小值, l_{2n+1} 为满足 $l_{2n+1} \geq l_{2n}$ 且 $\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} > q$ 的最小值. 类似于情形六的证明所述, 取 n^* , 使得当 $n > 2n^*$ 时, 各个 $d_n > 0$, 则 $l_n \geq n - n^*$. 当 $n > n^*$ 时,

$$\begin{cases} \frac{e_{2n}-1}{l_{2n+1}-1} \leq q < \frac{e_{2n}}{l_{2n+1}}, \\ \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}} = \frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} < p \leq \frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}-1} = \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}-1}. \end{cases} \quad (2.3)$$

由 (2.3) 的第一个式子和

$$0 < \frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} - \frac{e_{2n}-1}{l_{2n+1}-1} < \frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} - \frac{e_{2n}-1}{l_{2n+1}} = \frac{1}{l_{2n+1}} \rightarrow 0,$$

推出 $\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} \rightarrow q$. 由 (2.3) 的第二个式子和

$$0 < \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}-1} - \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}} = \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}(l_{2n+2}-1)} \leq \frac{1}{l_{2n+2}-1} \rightarrow 0,$$

推出 $\frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} \rightarrow p$. 由 (2.3), 又有

$$\begin{cases} \frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} - \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}} > q-p, \\ \frac{e_{2n+2}}{l_{2n+3}} - \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}} > q-p. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} - \frac{e_{2n}}{l_{2n+1}+d_{2n+1}} > q-p, \\ \frac{e_{2n}+d_{2n+2}}{l_{2n+2}+d_{2n+2}} - \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}} > q-p. \end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} d_{2n+1} > \frac{(q-p)l_{2n+1}^2}{e_{2n}-(q-p)} = \frac{(q-p)l_{2n+1}}{\frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} - \frac{q-p}{l_{2n+1}}} \rightarrow \infty, \\ d_{2n+2} > \frac{(q-p)l_{2n+2}^2}{l_{2n+2}-e_{2n}-(q-p)l_{2n+2}} = \frac{(q-p)l_{2n+2}}{1 - \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}} - (q-p)} \rightarrow \infty. \end{cases}$$

设 $0 \leq p \leq q \leq 1$, 自然数列 $l_n, n \geq 0$, 对于数对 (p, q) 满足命题 2.0. 记 $L_n = \mathbb{N} \cap [l_n, l_{n+1}), n \geq 0$. 记 $N_{p,q} = \cup L_{2n}$.

性质 2.1 $\mu_* N_{p,q} = p, \mu^* N_{p,q} = q$.

证明 当 $k \in L_{2n}$ 时

$$\frac{e_{2n-1}}{l_{2n}} \leq \frac{\xi_k N_{p,q}}{k} < \frac{e_{2n}}{l_{2n+1}}. \quad (2.4)$$

当 $k \in L_{2n+1}$ 时, $\xi_k N_{p,q} = e_{2n}$. 则

$$\frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} = \frac{e_{2n}}{l_{2n+2}} \leq \frac{\xi_k N_{p,q}}{k} < \frac{e_{2n}}{l_{2n+1}}. \quad (2.5)$$

由 (2.4), (2.5) 和命题 2.0 (a) 和 (b) 推出

$$p = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{2n+1}}{l_{2n+2}} \leq \mu_* N_{p,q} \leq \mu^* N_{p,q} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{2n}}{l_{2n+1}} = q.$$

由 $\frac{\xi_{l_{n+1}} N_{p,q}}{l_{n+1}} = \frac{e_n}{l_{n+1}}$ 得 $\mu_* N_{p,q} \leq p, \mu^* N_{p,q} \geq q$. □

3 符号转移系统中的 D_p^q 混沌集

$2^{\mathbb{N}}$ 上的度量定义为 $\rho(x, y) = \inf\{2^{-n} : x|n = y|n\}$.

用 $2^{<\mathbb{N}} = \cup 2^n$ 表示 $2^{\mathbb{N}}$ 上的全体词. 对 $u \in 2^{<\mathbb{N}}$, 令 $[u] = \{x \in 2^{\mathbb{N}} : x|u = u\}$ 并称之为 **u -柱**, 其中, $|u|$ 表示 u 的长度.

用 $\mathbb{T}$ 表示商群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, 对于 $x \in \mathbb{R}$ 记 $\bar{x} = x + \mathbb{Z}$. 对 $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{T}$, 定义 $\bar{x}, \bar{y}$ 的距离为 $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \min\{|x-y| : x \in \bar{x}, y \in \bar{y}\}$. 则 $(\mathbb{T}, +)$ 做成一个紧致拓扑群, 即单位圆周. 对 $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{T}$, 取 $x \in \bar{x}, y \in \bar{y}$, $x < y \leq x+1$, 则令 $[\bar{x}, \bar{y}] = [\overline{x, y}]$, 类似定义记号 $(\bar{x}, \bar{y})$ 和 $(\bar{x}, \bar{y})$. 注意到当 $\bar{x} \neq \bar{y}$ 时 $[\bar{x}, \bar{y}]$ 表示 $\mathbb{T}$ 上

从 $\bar{x}$ 沿正向到 $\bar{y}$ 的半开弧, 而当 $\bar{x} = \bar{y}$ 时 $[\bar{x}, \bar{y}) = \mathbb{T}$. $\mathbb{T}$ 上的旋转 $\bar{x} \mapsto \bar{x} + a$ 记作 $R_{\bar{a}}$. $\mathbb{T}$ 上的度量是旋转不变的, 而且有

$$\text{若 } |x - y| \leq 1/2, \text{ 则 } \rho(\bar{x}, \bar{y}) = |x - y|. \quad (3.0)$$

下面的两个性质是众所周知的.

性质 3.0^[19] 若 (X, f) 是一个极小系统, 则对任意 $x \in X$ 和非空开集 $U \subset X$, $N_f(x, U)$ 是一个 syndetic 集.

命题 3.1^[20, 定理 1.8] $\mathbb{T}$ 上的旋转 $R_{\bar{a}}$ 是一个极小旋转当且仅当 a 是一个无理数.

由命题 3.1 和性质 3.0 我们有

性质 3.2 设 $\eta \in \mathbb{R}$ 为一个无理数. 则对任意 $x \in \mathbb{T}$ 及非空开集 $U \subset \mathbb{T}$, $N_{R_{\bar{\eta}}}(x, U)$ 是一个 syndetic 集.

后文中 η, η_i 均取无理数.

令 $\mathbb{T}_0 = [\bar{0}, \bar{1/2})$, $\mathbb{T}_1 = [\bar{1/2}, \bar{1})$. 定义 $\psi^\eta: \mathbb{T} \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}^\mathbb{N}$,

$$\psi^\eta \bar{x} i = s \Leftrightarrow R_{\bar{\eta}}^i \bar{x} \in \mathbb{T}_s.$$

令 $\mathbb{T}_\infty = \mathbb{T} \setminus O_{R_{\bar{\eta}}^{-1}}\{\bar{0}, \bar{1/2}\}$.

性质 3.3 (a) ψ^η 是一个 Borel 映射且 $\psi^\eta|_{\mathbb{T}_\infty}$ 连续.

(b) 存在正整数 $k \geq 2$, 使得对任意 $\bar{x} \in \mathbb{T}$ 和 $i \in \mathbb{N}$, $\psi^\eta \bar{x} i, \psi^\eta \bar{x}(i+1), \dots, \psi^\eta \bar{x}(i+k-1)$ 中至少有一个 0, 也至少有一个 1.

(c) 对任意 $\bar{x} \neq \bar{y} \in \mathbb{T}$, 存在正整数 k 使得对任意 $i \in \mathbb{N}$, 存在 $0 \leq j < k$, $\psi^\eta \bar{x}(i+j) \neq \psi^\eta \bar{y}(i+j)$.

(d) ψ^η 是单射且 $\sigma \psi^\eta = \psi^\eta R_{\bar{\eta}}$.

证明 性质 3.3 的内容除了 (a) 中的连续性之外见于 [21], 相关的证明比较粗略, 我们在此给出详细的证明.

(a) 记 $\psi = \psi^\eta$, $\psi' = \psi|_{\mathbb{T}_\infty}$. 为证 (a), 只需验证对 $\underline{\mathbb{Z}}^\mathbb{N}$ 中任一柱体 $[u]$, $\psi^{-1}[u]$ 是 $\mathbb{T}$ 的 Borel 子集, $(\psi')^{-1}[u]$ 是 $\mathbb{T}_\infty$ 中的开子集. 设 $u \in \underline{\mathbb{Z}}^k$. 则 $\psi \bar{x} \in [u]$ 当且仅当对 $0 \leq i < k$ 有 $\bar{x} + i\eta \in \mathbb{T}_{u_i}$. 于是 $\psi^{-1}[u] = \bigcap_{0 \leq i < k} (\mathbb{T}_{u_i} - i\eta)$. 每一个 $\mathbb{T}_{u_i} - i\eta$ 是 $\mathbb{T}$ 上的一条半开弧. 故 $\psi^{-1}[u]$ 是 Borel 集. 记 $\mathbb{T}'_0 = (\bar{0}, \bar{1/2})$, $\mathbb{T}'_1 = (\bar{1/2}, \bar{1})$. 则 $(\psi')^{-1}[u] = \bigcap_{0 \leq i < k} ((\mathbb{T}'_{u_i} - i\eta) \cap \mathbb{T}_\infty)$. 每一个 $\mathbb{T}'_{u_i} - i\eta$ 是 $\mathbb{T}$ 上的一条开弧. 故 $(\psi')^{-1}[u]$ 是 $\mathbb{T}_\infty$ 中的开子集.

(b) 由性质 3.2, $O_{R_{\bar{\eta}}} \bar{0}$ 在 $\mathbb{T}$ 中稠密. 取 $j \geq 1$ 满足 $R_{\bar{\eta}}^j \bar{0} = \bar{d} \in (\bar{0}, \bar{1/8})$, 其中 $0 < d < 1/8$. 注意到 d 是一个无理数. 令 k^* 为不大于 $1/2d$ 的最大的整数. 设 $\bar{x} \in \mathbb{T}$, 其中 $0 \leq x < 1$. 记 $\bar{x}_{ij} = R_{\bar{\eta}}^{ij} \bar{x}$, $0 \leq i \leq k^* + 1$. 先考虑 $\bar{x} \in \mathbb{T}_0$ 即 $x \in [0, 1/2)$ 的情形. 若 $x \in [0, (k^* - 1)d)$, 则 $1/2 < (k^* + 1)d \leq x + (k^* + 1)d < 2k^*d < 1$, 其中第一个 “ $<$ ” 和最后一个 “ $<$ ” 要用到前述 d 是一个无理数的结论, 以下类似之处不再赘述. 此时即有 $R_{\bar{\eta}}^{(k^*+1)j} \bar{x} = \bar{x} + (k^* + 1)d \in [\bar{1/2}, \bar{1}) = \mathbb{T}_1$. 若 $x \in [(k^* - 1)d, 1/2)$, 则 $1/2 < (k^* + 1)d \leq x + 2d < 1/2 + 2d < 1$. 即 $R_{\bar{\eta}}^{2j} \bar{x} \in \mathbb{T}_1$. 再考虑 $\bar{x} \in \mathbb{T}_1$ 即 $x \in [1/2, 1)$ 的情形. 若 $x \in [1/2, (2k^* - 1)d)$, 则 $1 < 1/2 + (k^* + 1)d \leq x + (k^* + 1)d < 1 + k^*d < 1 + 1/2$. 即 $R_{\bar{\eta}}^{(k^*+1)j} \bar{x} \in \mathbb{T}_0$. 若 $x \in [(2k^* - 1)d, 1)$, 则 $1 < 2(k^* + 1)d \leq x + 3d < 1 + 3d < 1 + 1/2$. 即 $R_{\bar{\eta}}^{3j} \bar{x} \in \mathbb{T}_0$. 令 $k = (k^* + 1)j \geq 3$ 即满足要求.

(c) 设 $\bar{x} \neq \bar{y} \in \mathbb{T}$. 为确定起见, 不妨设 $[\bar{x}, \bar{y}]$ 为劣弧. 记 $d = \rho(\bar{x}, \bar{y})$. 注意到 $0 < d \leq 1/2$. 令 $U = (\bar{1/2} - 5d/8, \bar{1/2} - 3d/8) \subset \mathbb{T}_0$, 则 U 是 $\mathbb{T}$ 中的开弧. 由于 $R_{\bar{\eta}}$ 是 $\mathbb{T}$ 上的极小映射. 则 $N_{R_{\bar{\eta}}}(\bar{x}, U) = \{i \in \mathbb{N} : R_{\bar{\eta}}^i \bar{x} \in U\}$ 是 syndetic 集, 即存在正整数 k 使得对任意 $i \in \mathbb{N}$, 存在 $0 \leq j < k$ 使

得 $R_{\bar{\eta}}^{i+j}\bar{x} \in U$. 而当 $R_{\bar{\eta}}^{i+j}\bar{x} \in U$ 时, $R_{\bar{\eta}}^{i+j}\bar{y} = R_{\bar{\eta}}^{i+j}\bar{x} + d \in U + d = (\overline{1/2} + 3d/8, \overline{1/2} + 5d/8) \subset \mathbb{T}_1$. 则 k 满足命题要求.

(d) 由 (c), ψ^η 是单射. 由

$$\begin{aligned}\sigma\psi^\eta\bar{x}i = s &\Leftrightarrow R_{\bar{\eta}}\bar{x}i + 1 = s \\ &\Leftrightarrow R_{\bar{\eta}}^{i+1}\bar{x} = R_{\bar{\eta}}^i R_{\bar{\eta}}\bar{x} \in \mathbb{T}_s \\ &\Leftrightarrow \psi^\eta R_{\bar{\eta}}\bar{x}i = s\end{aligned}$$

知 $\sigma\psi^\eta = \psi^\eta R_{\bar{\eta}}$. □

设 $c \in \underline{2}^{\mathbb{N}}$, $N \subset \mathbb{N}$, N^c 为无限集. 用 γ_N 表示从 N^c 到 $\mathbb{N}$ 的唯一的保序的 1-1 映射. 定义映射 $\Phi_{N,c}: \underline{2}^{\mathbb{N}} \rightarrow \underline{2}^{\mathbb{N}}$ 如下

$$\Phi_{N,c}ai = \begin{cases} ci, & \text{若 } i \in N, \\ a\gamma_N i, & \text{若 } i \in N^c. \end{cases}$$

设 $N = \{n_0 < n_1 < n_2 < \cdots\}$, 则 $\Phi_{N,c}a$ 可以表成

$$a0 \cdots a(n_0 - 1)cn_0an_0 \cdots a(n_1 - 2)cn_1a(n_1 - 1) \cdots a(n_2 - 3)cn_2 \cdots$$

映射 $\Phi_{N,c}$ 的定义参见 [21].

后文中为简化叙述固定 $c = 111 \cdots \in \underline{2}^{\mathbb{N}}$.

性质 3.4 设 $(a', b') \in \underline{2}^{\mathbb{N}} \times \underline{2}^{\mathbb{N}}$ 是 σ 的 (2^{-k+1}) -distal 点对. 记 $a = \Phi_{N_{p,q},c}a'$, $b = \Phi_{N_{p,q},c}b'$. 则对任意 $0 < t \leq 2^{-k+1}$, 有 $F(\sigma, a, b, t) = (p, q)$. 因此, $(a, b) \in D_p^q\sigma$.

证明 设 $0 < t \leq 2^{-k+1}$. 记 $N = N_{\sigma \times \sigma}((a, b), [\Delta \underline{2}^{\mathbb{N}}]_t)$. 取 m 使 $2^{-m} < t$. 令 $M_m = \mathbb{N} \cap (\{l_{2n+1} : n \geq 0\} - [0, m))$, $M_k = \mathbb{N} \cap (\{l_{2n} : n \geq 0\} - [0, k))$. 根据性质 1.2 知 M_m 和 M_k 是零密度集.

考虑 $i \in N_{p,q} \setminus M$. 设 $i \in L_{2n} = \mathbb{N} \cap [l_{2n}, l_{2n+1})$. 根据 M_m 的定义即有

$$i \in [l_{2n}, l_{2n+1} - m).$$

于是对于任意 $0 \leq j < m$, 有 $i + j \in L_{2n} \subset N_{p,q}$, 则

$$\sigma^i a j = a(i + j) = c(i + j) = 1 = b(i + j) = \sigma^i b j.$$

于是 $\rho(\sigma^i a, \sigma^i b) \leq 2^{-m} < t$. 类似的, 当 $i \in N_{p,q}^c \setminus M_k$ 时, 对任意 $0 \leq j < k$, 有 $i + j \in N_{p,q}^c$. 此时

$$\sigma^i a j = a(i + j) = a' \gamma_{N_{p,q}}(i + j), \quad \sigma^i b j = b(i + j) = b' \gamma_{N_{p,q}}(i + j),$$

其中 $\gamma_{N_{p,q}}$ 为从 $N_{p,q}^c$ 到 $\mathbb{N}$ 的唯一保序双射. 由于存在 $0 \leq j < k$ 使得 $a' \gamma(i + j) \neq b' \gamma(i + j)$, 则 $\rho(\sigma^i a, \sigma^i b) \geq 2^{-k+1} \geq t$. 这样,

$$N_{p,q} \setminus M_m \subset N \subset (N_{p,q}^c \setminus M_k)^c = N_{p,q} \cup M_k.$$

由性质 1.2, $\mu_* N = \mu_* N_{p,q} = p$, $\mu^* N = \mu^* N_{p,q} = q$. □

性质 3.5 对任意 $u \in \underline{2}^{<\mathbb{N}}$, $u\Phi_{N_{p,q},c}\psi^\eta \mathbb{T}$ 是 σ 的一个 D_p^q 混沌集, 其中 $u \cdot$ 表示 $\underline{2}^{\mathbb{N}}$ 上的自映射 $a \mapsto ua$.

证明 设 $u \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}$, $x, y \in \mathbb{T}$, $x \neq y$. 根据性质 3.3 (c), $(\psi^\eta x, \psi^\eta y)$ 是 σ 的 distal 点对. 由性质 3.4,

$$(\Phi_{N_{p,q},c}\psi^\eta x, \Phi_{N_{p,q},c}\psi^\eta y) \in D_p^q \sigma.$$

最后根据性质 1.4,

$$(u\Phi_{N_{p,q},c}\psi^\eta x, u\Phi_{N_{p,q},c}\psi^\eta y) \in (\sigma \times \sigma)^{-|u|}(u\Phi_{N_{p,q},c}\psi^\eta x, u\Phi_{N_{p,q},c}\psi^\eta y) \subset D_p^q \sigma.$$

命题 3.6^[22, 命题 1.38] 设 $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. 记 $\bar{a} = (\overline{a_0}, \overline{a_1}, \dots, \overline{a(n-1)})$. 则 $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ 上的旋转 $R_{\bar{a}}$ 是极小旋转当且仅当每一个分量 a_i 以及每一个比值 a_i/a_j , $i \neq j$, 都是无理数. $\square$

性质 3.7 设无理数 η, ξ 满足 η/ξ 是一个无理数. 则对任意 $x, y \in \mathbb{T}$, $(\psi^\eta x, \psi^\xi y)$ 是 σ 的 distal 点对.

证明 由命题 3.6, $R_{\bar{\eta}} \times R_{\bar{\xi}}$ 是 $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ 上的极小映射. 则对任意 $x, y \in \mathbb{T}$, 有

$$N_{R_{\bar{\eta}} \times R_{\bar{\xi}}}((x, y), (\bar{0}, \overline{1/2}) \times (\overline{1/2}, \bar{1}) \cup (\overline{1/2}, \bar{1}) \times (\bar{0}, \overline{1/2}))$$

是 syndetic 集. 则 $\{i : \psi^\eta x_i \neq \psi^\xi y_i\}$ 是 syndetic 集.

性质 3.8 设无理数 η, ξ 满足 η/ξ 是一个无理数. 则对任意 $u, v \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}$, $u\Phi_{N_{p,q},c}\psi^\eta \mathbb{T} \cup v\Phi_{N_{p,q},c}\psi^\xi \mathbb{T}$ 是 σ 的一个 D_p^q 混沌集.

证明 设 $a, b \in u\Phi_{N_{p,q},c}\psi^\eta \mathbb{T} \cup v\Phi_{N_{p,q},c}\psi^\xi \mathbb{T}$, $a \neq b$. 若

$$\{a, b\} \subset u\Phi_{N_{p,q},c}\psi^\eta \mathbb{T}$$

或者

$$\{a, b\} \subset v\Phi_{N_{p,q},c}\psi^\xi \mathbb{T},$$

则由性质 3.5 知 $(a, b) \in D_p^q \sigma$. 下设

$$a \in u\Phi_{N_{p,q},c}\psi^\eta \mathbb{T}, \quad b \in v\Phi_{N_{p,q},c}\psi^\xi \mathbb{T}.$$

不妨设 $|v| \geq |u|$. 设 $a = u\Phi_{N_{p,q},c}a'$, $a' = \psi^\eta x'$; $b = v\Phi_{N_{p,q},c}b'$, $b' = \psi^\xi y'$. 设 $x'' = R_{\eta}^{|v|-|u|}x'$, $a'' = \psi^\eta x''$. 则

$$\begin{cases} \text{当 } i \in |u| + N_{p,q} \text{ 时, } ai = c(i - |u|) = 1, \\ \text{当 } i \in |v| + N_{p,q} \text{ 时, } bi = c(i - |v|) = 1, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \text{当 } i \in |u| + N_{p,q}^c \text{ 时, } ai = a'\gamma_{N_{p,q}}(i - |u|) = a''\gamma_{N_{p,q}}(i - |v|), \\ \text{当 } i \in |v| + N_{p,q}^c \text{ 时, } bi = b'\gamma_{N_{p,q}}(i - |v|), \end{cases} \quad (3.2)$$

其中 $\gamma_{N_{p,q}}$ 是从 $N_{p,q}^c$ 到 $\mathbb{N}$ 的唯一保序映射. 根据性质 3.7, (a'', b') 是 σ 的 distal 点对. 故可取 k 使得

$$\text{对任意 } i \geq 0, \text{ 存在 } j \in [0, k) \text{ 使得 } a''(i+j) \neq b'(i+j). \quad (3.3)$$

取 $t = 2^{-k+1}$. 设 $0 < s \leq t$, 记 $N = \{i \in \mathbb{N} : \rho(\sigma^i(a), \sigma^i(b)) < s\}$. 取 m 使 $2^{-m} < s$. 令 $M_m = \mathbb{N} \cap (|u| + \{l_{2n+1} : n \geq 0\} - [0, m))$. $M_k = \mathbb{N} \cap (|u| + \{l_{2n} : n \geq 0\} - [0, k))$. 注意到当 $n \rightarrow \infty$ 时, $l_{n+1} - l_n \rightarrow \infty$. 用性质 1.2 可验证 M_m 和 M_k 是零密度集.

由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, $l_{2n+1} - l_{2n} \rightarrow \infty$, $l_{2n+2} - l_{2n+1} \rightarrow \infty$, 可取 n^* 使得当 $n \geq n^*$ 时有

$$\begin{aligned} & \min(l_{2n+1} - l_{2n}, l_{2n+2} - l_{2n+1}) \\ & \geq |v| - |u| + \max(m, k) \\ & = |v| - |u| + m. \end{aligned} \quad (3.4)$$

令 $N' = |v| + N_{p,q} \cap [l_{2n^*}, \infty)$, $N'' = |v| + N_{p,q}^c \cap [l_{2n^*}, \infty)$.

考虑 $i \in N' \setminus M_m$. 设 $i \in |v| + [l_{2n}, l_{2n+1} - m)$. 由 (3.4) 推出

$$\begin{aligned} i + [0, m) & \subset [|v| + l_{2n}, |u| + l_{2n+1}) \\ & = (|u| + [l_{2n}, l_{2n+1})) \cap (|v| + [l_{2n}, l_{2n+1})). \end{aligned} \quad (3.5)$$

由 (3.5) 和 (3.1), 对任意 $j \in [0, m)$, 有 $a(i+j) = b(i+j) = 1$. 则

$$\rho(\sigma^i a, \sigma^i b) \leq 2^{-m} < s. \quad (3.6)$$

于是 $N' \setminus M_m \subset N$.

考虑 $i \in N'' \setminus M_k$. 设 $i \in |v| + [l_{2n+1}, l_{2n+2} - k)$. 由 (3.4) 推出

$$\begin{aligned} i + [0, k) & \subset [|v| + l_{2n+1}, |u| + l_{2n+2}) \\ & = (|u| + [l_{2n+1}, l_{2n+2})) \cap (|v| + [l_{2n+1}, l_{2n+2})). \end{aligned} \quad (3.7)$$

由 (3.7), (3.2) 和 (3.3), 存在 $j \in [0, k)$ 使得

$$\begin{aligned} a(i+j) & = a'' \gamma_{N_{p,q}}(i+j-|v|) \\ & \neq b' \gamma_{N_{p,q}}(i+j-|v|) = b(i+j). \end{aligned} \quad (3.8)$$

则 $\rho(\sigma^i a, \sigma^i b) \geq 2^{-k+1} = t$. 于是 $N \cap (N'' \setminus M_k) = \emptyset$.

综合上述两方面的讨论, 得到

$$\begin{aligned} (|v| + N_{p,q}) \setminus [0, |v| + l_{2n^*}) \setminus M_m & = N' \setminus M_m \subset N \subset (N'' \setminus M_k)^c \\ & = (N'')^c \cup M_k = ((|v| + N_{p,q}) \cup (\mathbb{N} \cap [0, |v| + l_{2n^*}))) \cup M_k. \end{aligned} \quad (3.9)$$

由于 $\mathbb{N} \cap [0, |v| + l_{2n^*})$, M_m 和 M_k 都是零密度集. 根据性质 1.2, 即推出 $\mu_* N = \mu_* N_{p,q} = p$, $\mu^* N = \mu^* N_{p,q} = q$. 即 $F(\sigma, a, b, s) = (p, q)$. $\square$

现在我们来证明本节的主要定理.

定理 3.9 设 $0 \leq p \leq q \leq 1$. 设 $w_0, w_1, w_2, \dots$ 是 $2^{\leq \mathbb{N}}$ 的一个排列, $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots$ 为一列无理数并满足对任意 $n \neq m$, $\eta_n/\eta_m \notin \mathbb{Q}$. 则 $S = \bigcup_{n \geq 0} w_n \Phi_{N_{p,q}, c} \psi^{\eta_n} \mathbb{T}$ 是 σ 的一个 D_p^q 混沌集, 而且 S 包含一个 Mycielski 集 C .

证明 由性质 3.8, S 是 σ 的一个 D_p^q 混沌集.

令 $\mathbb{T}_\infty = \cap (\mathbb{T} \setminus O_{R_{\eta_n}^{-1}} \{0, \overline{1/2}\})$. 则 $\mathbb{T}_\infty$ 是 $\mathbb{T}$ 的一个稠密的 $\mathcal{G}^\delta$ 子集并使得每一个 $R_{\eta_n}|_{\mathbb{T}_\infty}$ 是连续的单射 (由性质 3.3 和 3.4). 由于一个 Polish 空间的 $\mathcal{G}^\delta$ 子空间仍为 Polish 空间 (参见 [17]), 故 $\mathbb{T}_\infty$ 是一个自密的 Polish 空间. 取 K 为 $\mathbb{T}_\infty$ 的一个 Mycielski 子集. 令 $C = \bigcup_{n \geq 0} w_n \Phi_{N_{p,q}, c} \psi^{\eta_n} K$. 作为 σ -Cantor 集的连续单射像, 每一个 $w_n \Phi_{N_{p,q}, c} \psi^{\eta_n} K$ 仍然是 σ -Cantor 集. 由于每一个 $C \cap [w_n] \neq \emptyset$, 则 C 在 $2^{\mathbb{N}}$ 中稠密. 而作为混沌集, C 的内部是空的. 这样 C 做成 $2^{\mathbb{N}}$ 的一个 Mycielski 子集. $\square$

4 帐篷影射的迭代性质及其 D_p^q 混沌集

定义 $\Lambda: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ 为帐篷映射

$$\Lambda x = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 2^{-1}]; \\ 1 - 2x, & x \in [2^{-1}, 1]. \end{cases}$$

对 $i \geq 0$, 记 $c_{i,m} = m \cdot 2^{-i}$, $0 \leq m \leq 2^i$, $J_{i,m} = [c_{i,m}, c_{i,m+1}]$, $0 \leq m < 2^i$, $C_i = \{c_{i,m} : 0 \leq m \leq 2^i\}$, $\mathcal{J}_i = \{J_{i,m} : 0 \leq m < 2^i\}$. 记 $C = \bigcup_{i \geq 0} C_i$. 利用数学归纳法容易验证, 对 $i \geq 0$,

$$\Lambda^i x = \begin{cases} 2^i x - 2m, & x \in J_{i,2m}, \\ 2(m+1) - 2^i x, & x \in J_{i,2m+1}, \end{cases} \quad (4.0)$$

其中 $0 \leq m < 2^i$. 记 $I_\emptyset = \mathbb{I} = [0, 1]$, $I_0 = [0, 2^{-1}]$, $I_1 = [2^{-1}, 1]$. 对 $u \in \underline{2}^i \subset \underline{2}^{<\mathbb{N}}$, 记 $I_u = \bigcap_{0 \leq j < i} \Lambda^{-j} I_{u_j} = \{x \in \mathbb{I} : \Lambda^j x \in I_{u_j}, 0 \leq j < i\}$. 对 $i \geq 1$ 记 $\mathcal{I}_i = \{I_u : u \in \underline{2}^i\}$. 用 (4.0) 和数学归纳法可以验证如下性质.

性质 4.0 对任意 $i \geq 0$, 我们有

(a) $\mathcal{I}_i = \mathcal{J}_i$. 因此, 对任意 $I_u \in \mathcal{I}_i$, $\text{diam} I_u = \text{diam}[u] = 2^{-i}$, 对任意 $I_u \neq I_v \in \mathcal{I}_i$, $I_u \cap I_v$ 至多交于一个点, 而且 $I_u \cap I_v \subset C_i$.

(b) 对 $I_u \in \mathcal{I}_i$, $I_u = I_{u_0} \cup I_{u_1}$, $\bigcup_{u \in \underline{2}^i} I_u = \mathbb{I}$.

(c) 设 $I_u \in \mathcal{I}_i$. 把 $\mathcal{J}_{i+2}$ 中包含于 I_u 的四个小区间按它们在 $\mathbb{I}$ 上的位置从左到右排成 $I_{v_0}, I_{v_1}, I_{v_2}, I_{v_3}$. 则 $v_0(i+1) = v_3(i+1) = 0$, $v_1(i+1) = v_2(i+1) = 1$. 即 v_0, v_1, v_2, v_3 的末位分量总是排成 0, 1, 1, 0.

(d) 设 $I_u \neq I_v \in \mathcal{I}_i$. 则 $I_u \cap I_v \neq \emptyset$ 当且仅当存在 $0 \leq j' < i$, 使得

(i) 当 $0 \leq j < j'$ 时有 $u_j = v_j$,

(ii) $u_{j'} \neq v_{j'}$,

(iii) 若 $j' + 1 < i$, 则 $u(j' + 1) = v(j' + 1) = 1$,

(iv) 若 $j' + 2 \leq j < i$, 则 $u_j = v_j = 0$.

(e) 设 $I_u, I_v \in \mathcal{I}_i$. 当存在 $j' \neq j''$ 使得 $u_{j'} \neq v_{j'}$, $u_{j''} \neq v_{j''}$ 时, 有 $\rho(I_u, I_v) \geq 2^{-i}$. $\square$

定义 $\phi: \underline{2}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{I}$, ϕa 为 $\bigcap I_{a_i}$ 中的唯一点, 亦即

$$\phi a = x \text{ 当且仅当对任意 } i \geq 0, \Lambda^i x \in I_{a_i}. \quad (4.1)$$

根据性质 4.0, 该定义确切.

从 ϕ 的定义和性质 4.0 推出如下性质.

性质 4.1 (a) ϕ 为连续满射, 且 $\Lambda \phi = \phi \sigma$, 从而对任意 $i \geq 0$,

$$\Lambda^i \phi = \phi \sigma^i, \quad (4.2)$$

即 ϕ 为 σ 到 Λ 的半共轭. 事实上, 对任意 $a, b \in \underline{2}^{\mathbb{N}}$, 我们有

$$|\phi a - \phi b| \leq \rho(a, b). \quad (4.3)$$

(b) 设 $a \neq b \in \underline{2}^{\mathbb{N}}$. 则

- (b-a) 如果对某个 $i \geq 1$ 及所有 $0 \leq j < i$ 有 $a_j = b_j$, 则 $|\pi a - \pi b| \leq 2^{-i}$.
 (b-b) 如果对某个 $i_0 < i_1$ 有 $ai_0 \neq bi_0$, $ai_1 \neq bi_1$, 则 $|\phi a - \phi b| \geq 2^{-i_1}$.
 (c) 设 $a \neq b \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. 则 $\phi a = \phi b$ 当且仅当存在 $i \geq 0$ 使得
 (c-a) 对任意 $0 \leq j < i$, 有 $a_j = b_j$,
 (c-b) $ai \neq bi$,
 (c-c) $a(i+1) = b(i+1) = 1$,
 (c-d) 对任意 $j \geq i+2$, $a_j = b_j = 0$. □

性质 4.2 设 $a, b \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, $\sigma a = x$, $\sigma b = y$. 则 $E(\sigma, a, b) = E(\Lambda, x, y)$.

证明 由命题 1.5, $E(\sigma, a, b) \leq E(\Lambda, x, y)$. 下证 $E(\sigma, a, b) \geq E(\Lambda, x, y)$.

当 (x, y) 是 Λ 的 distal 点对时, $E(\Lambda, x, y) = (0, 0)$. $E(\sigma, a, b) \geq E(\Lambda, x, y)$ 显然成立. 下设 (x, y) 是 proximal 点对. 则对任意 k , 存在无穷个 i 使得 $|\Lambda^i x - \Lambda^i y| < 2^{-k}$.

设 $m \geq 1$, $k \geq 2m+1$. 记

$$M_m = \{i \in \mathbb{N} : \rho(\sigma^i a, \sigma^i b) < 2^{-m+1}\},$$

$$N_k = \{i \in \mathbb{N} : |\Lambda^i x - \Lambda^i y| < 2^{-k}\}.$$

根据性质 4.1, 如果 $|\Lambda^i x - \Lambda^i y| < 2^{-k}$, 则至多只有一个 $j \in [0, k)$ 使得 $a(i+j) \neq b(i+j)$. 此时易见至少有 $k-2m$ 个不同的 $j \in [0, k)$ 使 $a(i+j) = b(i+j)$, $a(i+j+1) = b(i+j+1), \dots, a(i+j+m-1) = b(i+j+m-1)$. 对于这些 j 即有 $\rho(\sigma^{i+j} a, \sigma^{i+j} b) \leq 2^{-m} < 2^{-m+1}$.

令 $l_0 = \min N_k$, $l_1 = l_0 + k$. 对 $n \geq 1$ 归纳地定义

$$l_{2n} = \min(N_k \cap [l_{2n-1}, \infty)), \quad l_{2n+1} = l_{2n} + k.$$

这样我们得到

$$l_0 < l_1 \leq l_2 < l_3 \leq l_4 < l_5 \leq \dots$$

而且, 根据上一段的讨论, 我们有

- (i) $l_{2n+1} - l_{2n} = k$;
 (ii) $\text{card}(M_m \cap [l_{2n}, l_{2n+1})) \geq k - 2m$;
 (iii) $N_k \cap [l_{2n+1}, l_{2n+2}) = \emptyset$.
 任取 $i > l_0$. 设 $i \in (l_{2n}, l_{2n+2}]$. 则由 (i)-(iii),

$$\xi_i M_m \geq n(k - 2m), \quad \xi_i N_k \leq (n+1)k.$$

则

$$\frac{\xi_i M_m}{i} \geq \frac{(\xi_i N_k - k)(k - 2m)}{ik}.$$

令 $i \rightarrow \infty$, 得

$$\mu^* M_m \geq \left(1 - \frac{2m}{k}\right) \mu^* N_k,$$

$$\mu_* M_m \geq \left(1 - \frac{2m}{k}\right) \mu_* N_k.$$

令 $k \rightarrow \infty$, 得

$$\mu^* M_m \geq \limsup_{t \rightarrow 0^+} F^*(\Lambda, x, y, t) = E^*(\Lambda, x, y),$$

$$\mu_* M_m \geq \limsup_{t \rightarrow 0^+} F_*(\Lambda, x, y, t) = E_*(\Lambda, x, y).$$

令 $m \rightarrow \infty$, 得

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F^*(\sigma, a, b, t) \geq E^*(\Lambda, x, y),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F_*(\sigma, a, b, t) \geq E_*(\Lambda, x, y).$$

即 $E(\sigma, a, b) \geq E(\Lambda, x, y)$. □

下文中仍固定 $c = 11 \cdots \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. $\Phi_{N_{p,q},c}$ 的定义参见前一节.

性质 4.3 设 $(a', b') \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 是 σ 的 (2^{-k+1}) -distal 点对. 记 $a = \Phi_{N_{p,q},c} a'$, $b = \Phi_{N_{p,q},c} b'$. 令 $x = \phi a$, $y = \phi b$. 则对任意 $0 < t \leq 2^{-2k+1}$, 有 $F(\Lambda, x, y, t) = (p, q)$. 因此, $(x, y) \in D_p^q \Lambda$.

证明 设 $0 < t \leq 2^{-2k+1}$. 记 $N = N_{\Lambda \times \Lambda}((x, y), [\Delta \mathbb{I}]_t)$. 取 m 使 $2^{-m} < t$. 令 $M_m = \mathbb{N} \cap (\{l_{2n+1} : n \geq 0\} - [0, m))$, $M_{2k} = \mathbb{N} \cap (\{l_{2n} : n \geq 0\} - [0, 2k))$. 根据性质 1.2, M_m 和 M_{2k} 是零密度集.

考虑 $i \in N_{p,q} \setminus M_m$. 设 $i \in L_{2n} = [l_{2n}, l_{2n+1})$. 根据 M_m 的定义即有 $i \in [l_{2n}, l_{2n+1} - m)$. 于是对于任意 $0 \leq j < m$, 有 $i + j \in L_{2n} \subset N_{p,q}$, 则

$$\sigma^i a j = a(i + j) = c(i + j) = 1 = b(i + j) = \sigma^i b j.$$

于是 $\rho(\sigma^i a, \sigma^i b) \leq 2^{-m}$. 由 (4.3), $|\Lambda^i x - L^i x| \leq 2^{-m} < t$. 类似的, 当 $i \in N_{p,q}^c \setminus M_{2k}$ 时, 对任意 $0 \leq j < 2k$, 有 $i + j \in N_{p,q}^c$. 此时

$$\sigma^i a j = a(i + j) = a' \gamma_{N_{p,q}}(i + j),$$

$$\sigma^i b j = b(i + j) = b' \gamma_{N_{p,q}}(i + j),$$

其中 $\gamma_{N_{p,q}}$ 为从 $N_{p,q}^c$ 到 $\mathbb{N}$ 的唯一保序双射. 由于存在两个不同的 j , $0 \leq j < 2k$, 使得 $a' \gamma_{N_{p,q}}(i + j) \neq b' \gamma_{N_{p,q}}(i + j)$, 由性质 4.1, (b-b) $|\Lambda^i x - L^i x| \geq 2^{-2k+1} \geq t$. 这样,

$$N_{p,q} \setminus M_m \subset N \subset (N_{p,q}^c \setminus M_{2k})^c = N_{p,q} \cup M_{2k}.$$

根据性质 1.2, $\mu_* N = \mu_* N_{p,q} = p$, $\mu^* N = \mu^* N_{p,q} = q$. □

对 $u \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}$, 定义 $\Psi_{N,c,u}^\eta : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{I}$, $\Psi_{N,c,u}^\eta = \phi u \Phi_{N,c} \psi^\eta$.

性质 4.4 $\Psi_{N,c,u}^\eta$ 是一个 Borel 单射且 $\Psi_{N,c,u}^\eta|_{\mathbb{T}_\infty}$ 连续.

证明 由性质 3.3 (a), ψ^η 是 Borel 映射. 而 $u \Phi_{N,c}$ 和 ϕ 是连续映射. 故 $\Psi_{N,c,u}^\eta = \phi u \Phi_{N,c} \psi^\eta$ 是一个 Borel 映射. 由 $\psi^\eta|_{\mathbb{T}_\infty}$ 连续可推出 $\Psi_{N,c,u}^\eta|_{\mathbb{T}_\infty}$ 连续. 由性质 3.3 (c) 和性质 4.1 (c) 即得 $\Psi_{N,c,u}^\eta = \phi u \Phi_{N,c} \psi^\eta$ 是单射. □

性质 4.5 对任意 $u \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}$, $\Psi_{N_{p,q},c,u}^\eta \mathbb{T}$ 是 Λ 的一个 D_p^q 混沌集.

证明 设 $u \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}$, $x, y \in \mathbb{T}$, $x \neq y$. 根据性质 3.3 (c), $(\psi^\eta x, \psi^\eta y)$ 是 σ 的 distal 点对. 由性质 4.3,

$$(\Psi_{N_{p,q},c,\emptyset}^\eta x, \Psi_{N_{p,q},c,\emptyset}^\eta y) = (\phi \Phi_{N_{p,q},c} \psi^\eta x, \phi \Phi_{N_{p,q},c} \psi^\eta y) \in D_p^q \Lambda.$$

由性质 1.4,

$$(\Psi_{N_{p,q},c,u}^\eta x, \Psi_{N_{p,q},c,u}^\eta y) \in (\Lambda \times \Lambda)^{-|u|} (\Psi_{N_{p,q},c,\emptyset}^\eta x, \Psi_{N_{p,q},c,\emptyset}^\eta y) \subset D_p^q \Lambda.$$

性质 4.6 设无理数 η, ξ 满足 η/ξ 是一个无理数. 则对任意 $u, v \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}$, $\Psi_{N_{p,q},c,u}^\eta \mathbb{T} \cup \Psi_{N_{p,q},c,v}^\xi \mathbb{T}$ 是 Λ 的一个 D_p^q 混沌集.

证明 设 $x, y \in \Psi_{N_{p,q},c,u}^\eta \mathbb{T} \cup \Psi_{N_{p,q},c,v}^\xi \mathbb{T}$, $x \neq y$. 若 $\{x, y\}$ 包含于 $\Psi_{N_{p,q},c,u}^\eta \mathbb{T}$ 和 $\Psi_{N_{p,q},c,v}^\xi \mathbb{T}$ 之一, 则由性质 4.5 知 $(x, y) \in D_p^q \Lambda$. 下设 $x = \Psi_{N_{p,q},c,u}^\eta x' \in \Psi_{N_{p,q},c,u}^\eta \mathbb{T}$, $y = \Psi_{N_{p,q},c,v}^\xi y' \in \Psi_{N_{p,q},c,v}^\xi \mathbb{T}$.

不妨设 $|v| \geq |u|$. 令 a', a, b', b, x'', a'' 如性质 4.5 的证明中所述. 取 k 满足

$$\text{对任意 } i \geq 0, \text{ 存在两个不同的 } j \in [0, k], \text{ 使得 } a''(i+j) \neq b'(i+j). \quad (4.4)$$

对于我们新取定的 k 以及任一 $s \leq 2^{-k+1}$ 和 $m > -\log_2 s$, 仍按照性质 3.8 的证明中的做法定义 M_m, M_k, n^*, N' 和 N'' . 记 $N = \{i \in \mathbb{N} : |\Lambda^i x, \Lambda^i y| < s\}$.

当 $i \in N' \setminus M_m$ 时, 由 (3.6) 即有

$$|\Lambda^i x - \Lambda^i y| = |\phi \sigma^i a, \phi(\sigma^i b)| \leq \rho \sigma^i a, \sigma^i b < s.$$

这样, $N' \setminus M_m \subset N$.

当 $i \in N'' \setminus M_k$ 时, 由 (3.7), (3.2) 和 (4.4), 存在两个不同的 $j \in [0, k]$ 使得

$$\begin{aligned} a(i+j) &= a'' \gamma_{N_{p,q}}(i+j-|v|) \\ &\neq b' \gamma_{N_{p,q}}(i+j-|v|) = b(i+j). \end{aligned}$$

此时, 由性质 4.1 (b-b), $|\Lambda^i x - \Lambda^i y| \geq 2^{-k+1} \geq s$, $N \cap (N'' \setminus M_k) = \emptyset$.

至此, 我们再一次得到

$$\begin{aligned} (|v| + N_{p,q}) \setminus [0, |v| + l_{2n^*}) \setminus M_m &= N' \setminus M_m \subset N \subset (N'' \setminus M_k)^c \\ &= (N'')^c \cup M_k = ((|v| + N_{p,q}) \cup (\mathbb{N} \cap [0, |v| + l_{2n^*}))) \cup M_k. \end{aligned}$$

则 $\mu_* N = \mu_* N_{p,q} = p$, $\mu^* N = \mu^* N_{p,q} = q$. 即 $F(\Lambda, x, y, s) = (p, q)$. $\square$

平行于定理 3.9, 我们有如下定理.

定理 4.7 设 $0 \leq p \leq q \leq 1$. 设 $w_0, w_1, \dots$ 是 $\mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}$ 的一个排列, $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots$ 为一列无理数并满足对任意 $n \neq m$, $\eta_n/\eta_m \notin \mathbb{Q}$. 则 $S = \bigcup_{n \geq 0} \Psi_{N_{p,q},c,w_n}^{\eta_n} \mathbb{T}$ 是 Λ 的一个 D_p^q 混沌集, 而且 S 包含一个 Mycielski 集 C .

证明 由性质 4.6, S 是 Λ 的一个 D_p^q 混沌集. 用 C' 表示定理 3.9 中的 C . 令 $C = \phi C'$. 则 $C \subset S$, C 是 Λ 的一个 D_p^q 混沌集. 由 C' 是 σ 的混沌集和性质 4.1 知 $\phi|C'$ 上是单射. 作为 σ -Cantor 集 C' 的连续单射像, C 仍然是 σ -Cantor 集. 由 C' 在 $\mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}$ 中稠密以及 $\phi: \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{I}$ 是连续满射知 C 在 $\mathbb{I}$ 中稠密. 作为第一纲集, C 内部为空. 这样 C 做成 $\mathbb{I}$ 的一个 Mycielski 子集. $\square$

5 具有满 Lebesgue 测度 D_p^q 混沌集的线段映射

Misiurewicz^[21] 构造了具有满 Lebesgue 测度 Li-Yorke 混沌集的线段映射. 罗等^[23] 构造了具有满 Lebesgue 测度分布混沌集的线段映射. 本节构造有满 Lebesgue 测度 D_p^q 混沌集的线段映射.

定理 5.0 对任意 $0 \leq p \leq q \leq 1$, 存在 $\mathbb{I}$ 上的与帐篷映射 Λ 共轭的连续映射 f 使得 f 有一个满 Lebesgue 测度的 Mycielski 子集为 D_p^q 混沌集.

证明 记 $\pi: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{T}$, $x \mapsto \bar{x}$. 令 $\lambda_n = \lambda(\Psi_{N_p, q, c, w_n}^{\eta_n} \pi)^{-1}$ 为 Lebesgue 测度 λ 在 $\Psi_{N_p, q, c, w_n}^{\eta_n} \pi$ 下的像, 相关记号如上一节. 根据性质 4.4 以及 π 的连续性, 各 λ_n 为 Borel 概率测度. 令 $\lambda_\infty = \sum 2^{-n-1} \lambda_n$. 则 λ_∞ 为 Borel 概率测度. 由于各 $\Psi_{N_p, q, c, w_n}^{\eta_n}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{I}$ 为单射, 而 π 为至多 2 对 1 的映射, 则各 λ_n 是没有原子的测度. 故

(i) λ_∞ 是没有原子的测度.

设 $U \subset \mathbb{I}$ 为一非空开集. 则存在 w_n , $|w_n|$ 足够大, 使得 $\phi[w_n] = I_{w_n} \subset U$. 于是 $\Psi_{N_p, q, c, w_n}^{\eta_n} \pi \mathbb{I} = \phi w_n \Phi_{N_p, q, c} \psi^{\eta_n} \mathbb{I} \subset \phi[w_n] = I_{w_n} \subset U$, $\lambda_n U = \lambda \mathbb{I} = 1$. 则 $\lambda_\infty U \geq 2^{-n-1}$. 即

(ii) 对 $\mathbb{I}$ 中任意开集 U , 有 $\lambda_\infty U > 0$.

由 (i) 和 (ii), 可定义 $\mathbb{I}$ 上同胚 h , $hx = \lambda_\infty[0, x]$. 对任意 $0 \leq x \leq y \leq 1$, 由 h 的定义以及 (i), 得 $\lambda[x, y] = y - x = \lambda_\infty h^{-1}[0, y] - \lambda_\infty h^{-1}[0, x] = \lambda_\infty h^{-1}[x, y]$. 这样得到

(iii) 在 Borel 集族上, λ 为 λ_∞ 在 h 下的像, 即 $\lambda = \lambda_\infty h^{-1}$.

令 $f = h\Lambda h^{-1}$. 则 h 是从 Λ 到 f 的共轭. 令 S 如定理 4.7 中所述. 由定理 4.7 和命题 1.6, hS 是 f 的 D_p^q 混沌集. 令 $\mathbb{T}_\infty = \cap (\mathbb{T} \setminus O_{R_{\eta_n}^{-1}}\{\bar{0}, \bar{1}/2\})$. 令 $E = \pi^{-1}\mathbb{T}_\infty$. 则 E^c 是 $\mathbb{I}$ 的一个稠密的可数子集. 由 λ 的正则性, 取 $\mathbb{I}$ 的一系列闭子集 $E_n \subset E$, 使得 $0 < \lambda E_n \rightarrow 1$. 根据 Cantor-Bendixson 定理 [17, 定理 6.4], 作为 Polish 空间, E_n 表成 $K_n \cup M_n$, 其中 K_n 自密, 亦即没有孤立点, M_n 是 E_n 的可数的开子集. 则 $\lambda K_n = \lambda E_n$, K_n 是 $\mathbb{I}$ 的内部为空的非空紧致子集, 故为 Cantor 集. 令 $K_\infty = \cup K_n$, 则 K_∞ 为 $\mathbb{I}$ 的满 Lebesgue 测度的 Mycielski 子集. 令 $K = \cup h\Psi_{N_p, q, c, w_n}^{\eta_n} \pi K_\infty$. 则 $K \subset hS$ 是 f 的一个 D_p^q 混沌集. 注意到每个 $h\Psi_{N_p, q, c, w_n}^{\eta_n} \pi|_{K_\infty}$ 是连续单射, 从而 $h\Psi_{N_p, q, c, w_n}^{\eta_n} \pi K_\infty$ 是一个 σ -Cantor 集. 进而 K 是一个 σ -Cantor 集. 这样, K λ -可测. 由 (iii),

$$\lambda K = \lambda_\infty h^{-1} K = \sum 2^{-n-1} \lambda_n h^{-1} K.$$

其中,

$$\begin{aligned} \lambda_n h^{-1} K &= \lambda_n h^{-1} \cup h\Psi_{N_p, q, c, w_i}^{\eta_i} \pi K_\infty \\ &\geq \lambda_n h^{-1} h\Psi_{N_p, q, c, w_n}^{\eta_n} \pi K_\infty \\ &\geq \lambda_n \Psi_{N_p, q, c, w_n}^{\eta_n} \pi K_\infty \\ &= \lambda(\Psi_{N_p, q, c, w_n}^{\eta_n} \pi)^{-1} \Psi_{N_p, q, c, w_n}^{\eta_n} \pi K_\infty \\ &\geq \lambda K_\infty \\ &= 1. \end{aligned}$$

于是 $\lambda K = 1$. K 是一个 Mycielski 集. □

参考文献

- 1 Li T Y, Yorke J A. Periodic three implies chaos. Amer Math Monthly, 1975, 82: 985–992
- 2 Devaney R. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd ed. Redwood City, CA: Addison-Wesley Publishing Company, 1989
- 3 Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Texts in Applied Mathematics, 2. Berlin: Springer-Verlag, 1990
- 4 Piórek J. On the generic chaos in dynamical systems. Univ Iagel Acta Math, 1985, 25: 293–298
- 5 Li S. ω -Chaos and topological entropy. Trans Amer Math Soc, 1993, 399: 243–249
- 6 Xiong J. Erratic time dependence of orbits of topologically mixing maps. J Univ Sci Technol China, 1991, 21: 387–396

- 7 Xiong J, Yang Z G. Chaos caused by a topologically mixing maps. In: *Dynamical Systems and Related Topics*. Singapore: World Scientific Press, 1992, 550–572
- 8 熊金城. 传递系统中的混沌. *中国科学 A 辑*, 2005, 35: 252–261
- 9 Schweizer B, Smítal J. Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems on the interval. *Trans Amer Math Soc*, 1994, 344: 737–754
- 10 Paganoni L, Smítal J. Strange distributionally chaotic triangular maps. *Chaos Solitons Fractals*, 2005, 26: 581–589
- 11 Paganoni L, Smítal J. Strange distributionally chaotic triangular maps II. *Chaos Solitons Fractals*, 2006, 28: 1356–1365
- 12 Balibrea F, Smítal J, Stefankova M. The three versions of distributional chaos. *Chaos Soliton Fractals*, 2005, 23: 1581–1583
- 13 Akin E. *Recurrence in Topological Dynamics: Furstenberg and Ellis Actions*. New York: Plenum Press, 1997
- 14 Akin E. Lectures on Cantor and Mycielski sets for dynamical systems. In: *Chapel Hill Ergodic Theory Workshops, Contemp Math 356*. Providence, RI: Amer Math Soc, 2004, 21–79
- 15 Xiong J, Lü J, Tan F. Furstenberg family and chaos. *Sci China Ser A*, 2007, 50: 1–11
- 16 Tan F, Xiong J. Chaos via Furstenberg family couples. *Topology Appl*, 2009, 156: 525–532
- 17 Kechris A S. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 156. New York: Springer-Verlag, 1995
- 18 Bobok J. Chaos in countable dynamical systems. *Topology Appl*, 2002, 126: 207–216
- 19 Birkhoff G D. Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques. *Bull Soc Math France*, 1912, 40: 305–312
- 20 Walters P. *An Introduction to Ergodic Theory*. New York: Springer-Verlag, 2000
- 21 Misiurewicz M. *Chaos almost everywhere*. Lecture Notes in Math. Berlin: Springer-Verlag, 1985
- 22 Kurka P. *Topological and Symbolic Dynamics*. Paris: Societe Mathematique de France, 2002
- 23 罗智明, 张可村. 几乎处处分布混沌. *西安交通大学学报*, 2002, 36: 422–425

Densities of trajectory approximation time sets

YUAN DaLian & XIONG JinCheng

Abstract Given $0 \leq p \leq q \leq 1$, it is proved in a symbolic shift system (and thus in an interval tent map system) that there exists a Mycielski set in which any two different points have trajectory approaching time sets with lower density p and upper density q . Also interval systems are constructed for which such a set has full Lesburge measure.

Keywords: chaos, trajectory approximation, time set, density of time set

MSC(2000): 37B05