2- 范畴 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中的导出 2- 函子

黄芳^②, 陈少晗^①, 陈伟^①, 郑驻军^{①*}

① 华南理工大学理学院数学系, 广州 510640;

② 河南大学数学与信息科学学院, 开封 475004

E-mail: zhengzj@scut.edu.cn

收稿日期: 2010-10-22; 接受日期: 2011-10-12; * 通信作者

摘要 本文构造了 $\mathcal{R}$ -2- 模的单射分解, 定义了右导出 2- 函子, 并给出它的一个重要性质.

关键词 $\mathcal{R}$ -2- 模; 单射分解; 右导出 2- 函子

MSC (2000) 主题分类 20G20, 16B50

1 研究背景

本文是我们研究高维同调代数理论系列文章的第五篇. 在参考文献 [1] 中, 我们给出了 $\mathcal{R}$ -2- 模的定义, 并证明了 2- 范畴 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 是一个 2-Abel Gpd- 范畴. 接着我们利用参考文献 [2] 中的方法, 分别给出了对称 2- 群和 $\mathcal{R}$ -2- 模的射影分解, 在 2- 范畴 (2-SGp) 和 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中定义一类左导出 2- 函子并给出左导出 2- 函子的一个非常重要的性质 [3,4].

如经典的同调理论, 2- 范畴 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 是否有充分多的射影对象是我们构造高维同调函子的关键. 幸运的是, Pirashvili 解决了这个问题. 他证明了 2- 范畴 (2-SGp) 和 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 有充分多的射影对象和单射对象 [5,6]. 具体来说, ($\mathcal{R}$ -2- 模) 有充分多的射影对象是指, 对任意给定的 $\mathcal{R}$ -2- 模 $\mathcal{A}$, 都存在满射 $F: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{P}$ 是 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中的射影对象. 同时他还在参考文献 [6] 中证明了 2- 范畴 $\mathcal{GCG}$ 与 Φ 上的 2- 模是 2- 等价的, 其中 Φ 是对称 2- 群, 对象是所有整数, 从对象 n 到对象 m 之间的映射是 $\delta_{n,m}$, 也就是说, 如果 $n \neq m$, 则没有映射; 否则, 是恒等映射. 这正是 Freyd-Mitchell 嵌入定理在高维范畴理论中推广情形. 因此, 我们为了研究任意 2-Abel 范畴中的导出 2- 函子, 只需研究 2- 模构成的 2- 范畴即可.

我们在本文给出了 2- 范畴 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中 $\mathcal{R}$ -2- 模的单射分解并证明了 $\mathcal{R}$ -2- 模的单射分解在 2- 上链同伦意义下是唯一存在的 (详见命题 2 和定理 1). 这些结果使得我们能够在 2- 范畴 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中给出右导出 2- 函子的概念.

我们将在以后的工作中研究导出 2- 函子 $\mathcal{E}xt$ 2- 函子的应用以及怎样在 2-Abel 范畴中给出谱序列. 同时, 我们也将讨论 Lie 2- 代数的表示、扩张和我们研究的高维同调代数理论之间的关系.

在第 2 节中, 回顾了一些和 $\mathcal{R}$ -2- 模有关的概念和结论, 比如相对核 (余核)、相对 2- 正合等 [4]. 同时还给出上同调 $\mathcal{R}$ -2- 模的定义及其具体的描述. 在第 3 节中, 我们主要给出了 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中两个 2- 上链复形之间的 2- 上链同伦的概念并证明了如果两个 2- 上链复形之间的映射是 2- 上链同伦的, 则这两个映射诱导的上同调 $\mathcal{R}$ -2- 模之间的映射是等价的. 在最后一节中, 对于一个 $\mathcal{R}$ -2- 模 $\mathcal{M}$, 我们构造出了 $\mathcal{M}$ 的单射分解及其存在性, 并证明了如果 $\mathcal{M}$ 有两个单射分解, 则这两个单射分解之间存在映

射并且在 2- 上链同伦意义下是唯一的. 最后, 利用单射分解, 我们定义了右导出 2- 函子. 进而根据右导出函子的性质, 我们由一个 $\mathcal{R}$ -2- 模的扩张可得到一个长的 2- 正合序列, 这是本文的一个重要结论.

注 1 本文中所提到的 $\mathcal{R}$ -2- 模记为 $(\mathcal{A}, I, \cdot, a, b, i, z)$, 其中 $\mathcal{R}$ 是一个 2- 环, $\mathcal{A}$ 是一个带有 $\mathcal{R}$ -2- 模结构 “ $\cdot$ ” 的对称 2- 群, I 是 “ $\cdot$ ” 意义下的单位对象, 而 a, b, i, z 满足参考文献 [1] 中条件的自然同构 [1,7,8].

注 2 我们在图形中省略复合运算符号 “ $\circ$ ”.

2 预备知识

本节回顾相对核、相对余核以及相对 2- 正合的概念 [4], 之后给出 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中 2- 上链复形的上调同调 $\mathcal{R}$ -2- 模的定义, 并给出了上链同伦的定义及其相关结论 [9–12].

($\mathcal{R}$ -2- 模) 中的序列 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 包含两个 1- 映射 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 和一个 2- 映射 $\varphi : G \circ F \Rightarrow 0$, 记为 (F, φ, G) .

序列 (F, φ, G) 的相对核 $(\text{Ker}(F, \varphi), e_{(F, \varphi)}, \varepsilon_{(F, \varphi)})$ 是一个 $\mathcal{R}$ -2- 模:

- 对象是一个对 $(A \in \text{obj}(\mathcal{A}), a : F(A) \rightarrow 0)$, 满足 $G(a) = \varphi_A$;
- 映射 $f : (A, a) \rightarrow (A', a')$ 是 $\mathcal{A}$ 中的映射 $f : A \rightarrow A'$ 并且满足 $a' \circ F(f) = a$;
- $\mathcal{R}$ -2 模结构是由 $\mathcal{A}$ 的 $\mathcal{R}$ -2- 模结构诱导得到的.
- 忠实函子 $e_{(F, \varphi)} : \text{Ker}(F, \varphi) \rightarrow \mathcal{A}$ 定义为 $e_{(F, \varphi)}(A, a) = A$, 自然变换 $\varepsilon_{(F, \varphi)} : F \circ e_{(F, \varphi)} \Rightarrow 0$ 定义为 $(\varepsilon_{(F, \varphi)})_{(A, a)} = a$.

序列 (F, φ, G) 在 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中的相对余核 $(\text{Coker}(\varphi, G), p_{(\varphi, G)}, \pi_{(\varphi, G)})$ 是一个 $\mathcal{R}$ -2- 模, 描述如下:

- 对象是 $\mathcal{C}$ 中所有对象构成的集合;
- 从 X 到 Y 的映射是 $(B, f) : X \rightarrow Y$ 的等价类, 其中 $B \in \text{obj}(\mathcal{B}), f : X \rightarrow G(B) + Y$. 称两个映射 $(B, f), (B', f') : X \rightarrow Y$ 是等价的, 如果存在 $A \in \text{obj}(\mathcal{A})$ 和 $a : B \rightarrow F(A) + B'$ 使得下图是可换的:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & G(B) + Y \\
 f' \downarrow & & \downarrow G(a) + 1 \\
 G(B') + Y & & G(F(A) + B') + Y \\
 \simeq \downarrow & \xleftarrow{\varphi_A + 1 + 1} & \downarrow \simeq \\
 0 + G(B') + Y & & GF(A) + G(B') + Y.
 \end{array}$$

- $\mathcal{R}$ -2- 模结构是由 $\mathcal{C}$ 的 $\mathcal{R}$ -2- 模结构诱导得到的.
- 本质满射函子 $p_{(\varphi, G)} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Coker}(\varphi, G)$ 定义为 $p_{(\varphi, G)}(X) = X$, 自然变换 $\pi_{(\varphi, G)} : p_{(\varphi, G)} \circ G \Rightarrow 0$ 定义为 $(\pi_{(\varphi, G)})_B = 1_{G(B)}$.

定义 1 在 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中考虑下图,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & \curvearrowright & \alpha \uparrow & & \gamma \uparrow & \curvearrowright & \\
 \mathcal{A}' & \xrightarrow{L} & \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{B} & \xrightarrow{G} & \mathcal{C} \xrightarrow{M} \mathcal{C}' \\
 & & \varphi \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

其中 α 与 φ , φ 与 γ 分别相容. 根据相对核 $\text{Ker}(G, \gamma)$ 的万有性质, 得到 (F, φ) 通过 $(e_{(F, \varphi)}, \varepsilon_{(F, \varphi)})$ 的分解 (F', φ') . 利用 $e_{(F, \varphi)}$ 的消去性质得到 2- 映射 $\bar{\alpha}$, 如下图所示,

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{A}' & \xrightarrow{L} & \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{B} & \xrightarrow{G} & \mathcal{C} \xrightarrow{M} \mathcal{C}' \\
 & & \searrow \pi(\alpha, F) \Downarrow & & \downarrow \varphi' \Uparrow & & \nearrow \overline{\gamma} \Downarrow \\
 & & 0 & & \downarrow p(\alpha, F) & & 0 \\
 & & & & \text{Coker}(\alpha, F) & &
 \end{array}$$

称序列 $(L, \alpha, F, \varphi, G, \gamma, M)$ 是相对 2- 正合的, 如果函子 G' 是忠实的并且 $\overline{\gamma}$ -full.

注 3 函子 G' 是 $\overline{\gamma}$ full 的, 即 G' 关于映射 h 是 full 的, 其中 $h: G'(C_1) \rightarrow G'(C_2)$ 满足 $M(h) \circ \overline{\gamma}_{C_2} = \overline{\gamma}_{C_1}$.

定义 2 $(\mathcal{R}$ -2- 模) 中 $\mathcal{R}$ -2- 模构成的 2- 上链复形是一个序列, 记为 $(\mathcal{A}, L, \alpha)$.

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \xrightarrow{L_0} \mathcal{A}_1 \xrightarrow{L_1} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{L_2} \cdots \xrightarrow{L_{n-1}} \mathcal{A}_n \xrightarrow{L_n} \mathcal{A}_{n+1} \xrightarrow{L_{n+1}} \mathcal{A}_{n+2} \xrightarrow{L_{n+2}} \cdots$$

以及 $(\mathcal{R}$ -2- 模) 中的一类 2- 映射 $\{\alpha_n: L_{n+1} \circ L_n \Rightarrow 0\}_{n \geq 0}$, 对所有的 n , 这些 2- 映射使得下图可换

$$\begin{array}{ccc}
 L_{n+1}L_nL_{n-1} & \xrightarrow{L_{n+1}\alpha_{n-1}} & L_{n+1}0 \\
 \alpha_n L_{n-1} \Downarrow & & \Downarrow \text{can} \\
 0L_{n-1} & \xrightarrow{\text{can}} & 0
 \end{array}$$

其中 2- 映射 can 是 $(\mathcal{R}$ -2-Mod) 中的典则 2- 映射, 通过作用在 $\mathcal{R}$ -2- 模 0 的对象是恒等映射定义的.

考虑上面 2- 上链复形的一部分

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & \nearrow \alpha_{n-2} \Uparrow & & \nearrow \alpha_n \Uparrow & & \nearrow & \\
 \mathcal{A}_{n-2} & \xrightarrow{L_{n-2}} & \mathcal{A}_{n-1} & \xrightarrow{L_{n-1}} & \mathcal{A}_n & \xrightarrow{L_n} & \mathcal{A}_{n+1} \xrightarrow{L_{n+1}} \mathcal{A}_{n+2} \\
 & & \searrow \alpha_{n-1} \Downarrow & & \searrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

利用相对核 $\text{Ker}(L_n, \alpha_n)$ 的万有性质, 得到下图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & \nearrow \alpha_{n-2} \Uparrow & & \nearrow \alpha_n \Uparrow & & \nearrow & \\
 \mathcal{A}_{n-2} & \xrightarrow{L_{n-2}} & \mathcal{A}_{n-1} & \xrightarrow{L_{n-1}} & \mathcal{A}_n & \xrightarrow{L_n} & \mathcal{A}_{n+1} \xrightarrow{L_{n+1}} \mathcal{A}_{n+2} \\
 & \searrow \alpha_{n-2} \Downarrow & & \searrow \alpha'_{n-1} \Uparrow & & \searrow e(L_n, \alpha_n) & \\
 & & 0 & & L'_{n-1} & & \\
 & & & & \text{Ker}(L_n, \alpha_n) & &
 \end{array}$$

对 $n \geq 2$, 2- 上链复形 $\mathcal{A}$ 的第 n 个上同调 $\mathcal{R}$ -2- 模 $\mathcal{H}^n(\mathcal{A})$ 定义为相对余核 $\text{Coker}(\overline{\alpha_{n-2}}, L'_{n-1})$.

另外, 为了给出 $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{H}^1(\mathcal{A})$, 我们需要在 2- 上链复形 $\mathcal{A}$ 的左边加两个 1- 映射 0 和两个自然 2- 映射 $\text{can } 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \mathcal{A}_0 \xrightarrow{L_0} \mathcal{A}_1 \xrightarrow{L_1} \cdots$, $\text{can}: L_0 \circ 0 \Rightarrow 0$, $\text{can}: 0 \circ 0 \Rightarrow 0$.

利用相对核和相对余核的存在性, 我们具体给出上同调 $\mathcal{R}$ -2- 模 $\mathcal{H}^n(\mathcal{A})$ 中的对象和映射 (类似 [13] 中关于对称 2- 群的情形).

- $\mathcal{H}^n(\mathcal{A}_.)$ 中的对象是相对核 $\text{Ker}(L_n, \alpha_n)$ 中的对象, 也就是对

$$(A_n \in \text{obj}(\mathcal{A}_n), a_n : L_n(A_n) \rightarrow 0)$$

并满足 $L_{n+1}(a_n) = (\alpha_n)_{A_n}$.

- 映射 $(A_n, a_n) \rightarrow (A'_n, a'_n)$ 是一个等价类

$$(X_{n-1} \in \text{obj}(\mathcal{A}_{n-1}), x_{n-1} : A_n \rightarrow L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n)$$

使得下图可换

$$\begin{array}{ccc} L_n(A_n) & \xrightarrow{L_n(x_{n-1})} & L_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) \\ a_n \downarrow & & \downarrow \simeq \\ 0 & & L_n L_{n-1}(X_{n-1}) + L_n(A'_n) \\ a'_n \uparrow & & \downarrow (\alpha_{n-1})_{X_{n-1}} + 1 \\ L_n(A'_n) & \xleftarrow{\simeq} & 0 + L_n(A'_n). \end{array}$$

称两个映射 $(X_{n-1}, x_{n-1}), (X'_{n-1}, x'_{n-1}) : (A_n, a_n) \rightarrow (A'_n, a'_n)$ 是等价的, 如果存在对

$$(X_{n-2} \in \text{obj}(\mathcal{A}_{n-2}), x_{n-2} : X_{n-1} \rightarrow L_{n-2}(X_{n-2}) + X'_{n-1})$$

使得下图可换

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{x_{n-1}} & L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n \\ \downarrow x'_{n-1} & & \downarrow L_{n-1}(x_{n-2}) + 1 \\ & & L_{n-1}(L_{n-2}(X_{n-2}) + X'_{n-1}) + A'_n \\ & & \downarrow \simeq \\ & & L_{n-1}L_{n-2}(X_{n-2}) + L_{n-1}(X'_{n-1}) + A'_n \\ & & \downarrow (\alpha_{n-2})_{X_{n-2}} + 1 \\ L_{n-1}(X'_{n-1}) + A'_n & \xleftarrow{\simeq} & 0 + L_{n-1}(X'_{n-1}) + L_n(A'_n). \end{array}$$

($\mathcal{R}$ -2- 模) 中两个 2- 上链复形之间的映射 $(F, \lambda) : (\mathcal{A}, L, \alpha) \rightarrow (\mathcal{B}, M, \beta)$ 包含 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中的一组 1- 映射 $\{F_n : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{B}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 和一组 2- 映射 $\{\lambda_n : F_{n+1} \circ L_n \Rightarrow M_n \circ F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, 如下图所示

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \uparrow \alpha_{n-1} \Downarrow & & & & \\ \cdots & \xrightarrow{L_{n-2}} & \mathcal{A}_{n-1} & \xrightarrow{L_{n-1}} & \mathcal{A}_n & \xrightarrow{L_n} & \mathcal{A}_{n+1} \xrightarrow{L_{n+1}} \mathcal{A}_{n+2} \longrightarrow \cdots \\ & \searrow F_{n-1} & \downarrow \lambda_{n-1} \Downarrow & \downarrow F_n & \downarrow \lambda_n \Downarrow & \downarrow F_{n+1} & \downarrow \lambda_{n+1} \Downarrow \downarrow F_{n+2} \\ \cdots & \xrightarrow{M_{n-2}} & \mathcal{B}_{n-1} & \xrightarrow{M_{n-1}} & \mathcal{B}_n & \xrightarrow{M_n} & \mathcal{B}_{n+1} \xrightarrow{M_{n+1}} \mathcal{B}_{n+2} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \beta_{n-1} \Downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

并且对所有的 n, λ_n 使得下图可换

$$\begin{array}{ccccc}
 F_{n+1}L_nL_{n-1} & \xrightarrow{\lambda_n L_{n-1}} & M_n F_n L_{n-1} & \xrightarrow{M_n \lambda_{n-1}} & M_n M_{n-1} F_{n-1} \\
 \downarrow F_{n+1} \alpha_{n-1} & & & & \downarrow \beta_{n-1} F_{n-1} \\
 F_{n+1} 0 & \xrightarrow{\text{can}} & 0 & \xleftarrow{\text{can}} & 0 F_{n-1}
 \end{array}$$

对每个 n , 通过相对核和相对余核的万有性质, (F, λ) 可诱导出上同调 $\mathcal{R}$ -2- 模之间的 $\mathcal{R}$ - 同态 $\mathcal{H}^n(F) : \mathcal{H}^n(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}^n(\mathcal{B})$. $\mathcal{H}^n(F)$ 首先是上同调对称 2- 群之间的同态并且还由 $\mathcal{R}$ - 同态 F_n 诱导的自然同构 $\mathcal{H}^n(F)_2 : \mathcal{H}^n(F)(r \cdot (A_n, a_n)) \rightarrow r \cdot \mathcal{H}^n(F)(A_n, a_n)$.

注 4 (1) 对 $(\mathcal{R}$ -2- 模) 中任意一个在每一点都相对 2- 正合的 2- 上链复形, 它的上同调 $\mathcal{R}$ -2- 模总是 0 $\mathcal{R}$ -2- 模 (只有一个对象和一个映射) ^[1, 7].

(2) 对 $(\mathcal{R}$ -2- 模) 中的 2- 上链复形之间的映射 $\mathcal{A} \xrightarrow{(F, \lambda)} \mathcal{B} \xrightarrow{(G, \mu)} \mathcal{C}$. 它们的复合映射是 $(G_n \circ F_n, (\mu_n \circ F_n) \star (G_{n+1} \circ \lambda_n))$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, 其中 $\star$ 是 2- 范畴中的 2- 映射的竖直复合 ^[1, 7, 14]. 另外, $\mathcal{H}^n(G \circ F) \simeq \mathcal{H}^n(G) \circ \mathcal{H}^n(F)$.

3 上链同伦

在经典的同调代数中, 为了构造右导出函子, 首先需要证明如果两个上链复形之间的映射是上链同伦的, 那么它们诱导的上同调群之间的映射是等价的. 这条性质保证了右导出函子的定义是有意义的. 在本节中, 我们回顾了 2- 上链同伦的概念. 证明了如果两个 2- 上链复形之间的映射是 2- 上链同伦的, 那么它们诱导的上同调 $\mathcal{R}$ -2- 模之间的映射是等价的. 这和经典的同调代数中的结论是类似的, 是定义右导出 2- 函子的重要条件.

定义 3 令 $(F, \lambda), (G, \mu) : (\mathcal{A}, L, \alpha) \rightarrow (\mathcal{B}, M, \beta)$ 是 2- 上链映射, 如果在 $(\mathcal{R}$ -2- 模) 中存在一组 1- 映射 $\{H_{n-1} : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{B}_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 和一组 2- 映射 $\{\tau_n : F_n \Rightarrow M_{n-1} \circ H_{n-1} + H_n \circ L_n + G_n : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{B}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 使得对每个 n 都有下图可换

$$\begin{array}{ccc}
 F_{n+1}L_n & \xrightarrow{\lambda_n} & M_n F_n \\
 \downarrow \tau_{n+1} L_n & & \downarrow M_n \tau_n \\
 (M_n H_n + H_{n+1} L_{n+1} + G_{n+1}) L_n & & M_n (M_{n-1} H_{n-1} + H_n L_n + G_n) \\
 \downarrow \text{can} & & \downarrow \text{can} \\
 M_n H_n L_n + H_{n+1} L_{n+1} L_n + G_{n+1} L_n & & M_n M_{n-1} H_{n-1} + M_n H_n L_n + M_n G_n \\
 \downarrow 1 + H_{n+1} \alpha_n + 1 & & \downarrow \beta_{n-1} H_{n-1} + 1 + 1 \\
 M_n H_n L_n + H_{n+1} (0) + G_{n+1} L_n & & 0 + M_n H_n L_n + M_n G_n \\
 \downarrow \text{can} & & \downarrow \text{can} \\
 M_n H_n L_n + G_{n+1} L_n & \xrightarrow{1 + \mu_n} & M_n H_n L_n + M_n G_n
 \end{array}$$

我们就称 $(F, \lambda.)$ 和 $(G, \mu.)$ 在 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中是 2- 上链同伦的.

下面的命题是 2- 上链同伦的一个最基本的性质, 对我们定义右导出 2- 函子起到重要的作用.

命题 1 令 $(F, \lambda.), (G, \mu.) : (\mathcal{A}, L, \alpha.) \rightarrow (\mathcal{B}, M, \beta.)$ 是 2- 上链映射, 如果它们是 2- 上链同伦的, 那么它们诱导的上同调 $\mathcal{R}$ -2- 模之间的映射 $\mathcal{H}^n(F.)$ 和 $\mathcal{H}^n(G.)$ 是等价的.

证明 为了证明上述诱导的映射是等价的, 根据 Gpd- 范畴 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 的性质, 只需对每个 n 都构造一个 2- 映射 $\varphi_n : \mathcal{H}^n(F.) \Rightarrow \mathcal{H}^n(G.)$.

首先有下面的诱导映射

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(F.) : \mathcal{H}^n(\mathcal{A}.) &\rightarrow \mathcal{H}^n(\mathcal{B}.) \\ (A_n, a_n) &\mapsto (F_n(A_n), b_n), \\ [X_{n-1}, x_{n-1}] &\mapsto [F_{n-1}(X_{n-1}), \overline{x_{n-1}}] \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(G.) : \mathcal{H}^n(\mathcal{A}.) &\rightarrow \mathcal{H}^n(\mathcal{B}.) \\ (A_n, a_n) &\mapsto (G_n(A_n), b'_n), \\ [X_{n-1}, x_{n-1}] &\mapsto [G_{n-1}(X_{n-1}), \overline{x_{n-1}}'], \end{aligned}$$

其中 b_n 是复合映射

$$M_n F_n(A_n) \xrightarrow{(\lambda_n)_{A_n}^{-1}} F_{n+1} L_n(A_n) \xrightarrow{F_{n+1}(a_n)} F_{n+1}(0) \simeq 0,$$

$\overline{x_{n-1}}$ 是复合映射

$$\begin{aligned} F_n(A_n) &\xrightarrow{F_n(x_{n-1})} F_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) \simeq F_n L_{n-1}(X_{n-1}) + F_n(A'_n) \\ &\xrightarrow{(\lambda_{n-1})_{X_{n-1}} + 1} M_{n-1} F_{n-1}(X_{n-1}) + F_n(A'_n), \end{aligned}$$

b'_n 和 $\overline{x_{n-1}}'$ 可以类似的给出.

对给定 $\mathcal{H}^n(\mathcal{A}.)$ 中的对象 (A_n, a_n) , 令 $Y_{n-1} = H_{n-1}(A_n)$. 考虑 $\mathcal{B}_n$ 中的复合映射

$$\begin{aligned} y_{n-1} : F_n(A_n) &\xrightarrow{(\tau_n)_{A_n}} (M_{n-1} \circ H_{n-1} + H_n \circ L_n + G_n)(A_n) \\ &\xrightarrow{1 + H_n(a_n) + 1} M_{n-1}(H_{n-1}(A_n)) + H_n(0) + G_n(A_n) \\ &\simeq M_{n-1}(Y_{n-1}) + 0 + G_n(A_n) \simeq M_{n-1}(Y_{n-1}) + G_n(A_n). \end{aligned}$$

可得 $\mathcal{H}^n(\mathcal{B}.)$ 中的映射

$$[Y_{n-1} \in \text{obj}(\mathcal{B}_{n-1}), y_{n-1} : F_n(A_n) \rightarrow M_{n-1}(Y_{n-1}) + G_n(A_n)] : (F_n(A_n), b_n) \rightarrow (G_n(A_n), b'_n),$$

并使得下图可换

$$\begin{array}{ccc} M_n F_n(A_n) & \xrightarrow{M_n(y_{n-1})} & M_n(M_{n-1} H_{n-1}(A_n) + G_n(A_n)) \\ b_n \downarrow & & \downarrow \simeq \\ 0 & & M_n M_{n-1} H_{n-1}(A_n) + M_n G_n(A_n) \\ b'_n \uparrow & & \downarrow (\beta_{n-1})_{H_{n-1}(A_n)} + 1 \\ M_n G_n(A_n) & \xleftarrow{\simeq} & 0 + M_n G_n(A_n). \end{array}$$

根据 $(\tau_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ 的相容性条件, 有下面的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 M_n(M_{n-1}H_{n-1} + H_nL_n + G_n)(A_n) & \xrightarrow{\simeq} & M_nM_{n-1}H_{n-1}(A_n) + M_nH_nL_n(A_n) + M_nG_n(A_n) & & \\
 \uparrow M_n((\tau_n)_{A_n}) & & \downarrow 1 + M_nH_n(a_n) + 1 & \searrow (\beta_{n-1})_{H_{n-1}(A_n)} + 1 & \\
 M_nF_n(A_n) & \xrightarrow{M_n(y_{n-1})} & M_nM_{n-1}H_{n-1}(A_n) + M_nG_n(A_n) & & 0 + M_nH_nL_n(A_n) + M_nG_n(A_n) \\
 \downarrow ((\lambda_n)_{A_n})^{-1} & & \downarrow (\beta_{n-1})_{H_{n-1}(A_n)} + 1 & & \downarrow \simeq \\
 F_{n+1}L_n(A_n) & & 0 + M_nG_n(A_n) & & M_nH_nL_n(A_n) + M_nG_n(A_n) \\
 \downarrow (\tau_{n+1})_{L_n(A_n)} & \searrow F_{n+1}(a_n) & \downarrow ((\mu_n)_{A_n})^{-1} & & \downarrow 1 + ((\mu_n)_{A_n})^{-1} \\
 (M_nH_n + H_{n+1}L_{n+1} + G_{n+1})L_n(A_n) & \xrightarrow{(M_nH_n + H_{n+1}L_{n+1} + G_{n+1})(a_n)} & G_{n+1}L_n(A_n) & & M_nH_nL_n(A_n) + G_{n+1}L_n(A_n) \\
 & & \downarrow G_{n+1}(a_n) & & \downarrow M_nH_n(a_n) + G_{n+1}(a_n) \\
 & & G_{n+1}(0) & \xrightarrow{\simeq} & M_nH_n(0) + G_{n+1}(0) \\
 & & & & \downarrow \simeq \\
 & & & & 0+0 \\
 & & & & \nearrow \simeq \\
 & & & & M_nH_nL_n(A_n) + 0 + G_{n+1}L_n(A_n). \\
 \downarrow \simeq & & & & \\
 M_nH_nL_n(A_n) + H_{n+1}L_{n+1}L_n(A_n) + G_{n+1}L_n(A_n) & & & & \\
 \downarrow 1 + H_{n+1}((\alpha_n)_{A_n}) + 1 & & & & \\
 M_nH_nL_n(A_n) + H_{n+1}(0) + G_{n+1}L_n(A_n) & \xrightarrow{\simeq} & M_nH_nL_n(A_n) + 0 + G_{n+1}L_n(A_n). & &
 \end{array}$$

因此 $[Y_{n-1}, y_{n-1}]$ 是 $\mathcal{H}^n(\mathcal{B})$ 中的映射.

定义 $(\varphi_n)_{(A_n, a_n)} = [Y_{n-1}, y_{n-1}]$. 接下来, 我们验证 φ_n 是 $(\mathcal{R}\text{-}2\text{-模})$ 中的 2-映射. 任给 $\mathcal{H}^n(\mathcal{A})$ 中的映射 $[X_{n-1}, x_{n-1}] : (A_n, a_n) \rightarrow (A'_n, a'_n)$, 其中 $X_{n-1} \in \text{obj}(\mathcal{A}_{n+1})$ 和 $x_{n-1} : A_n \rightarrow L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n$ 满足下图可换,

$$\begin{array}{ccc}
 L_n(A_n) & \xrightarrow{L_n(x_{n-1})} & L_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) \\
 a_n \downarrow & & \downarrow \simeq \\
 0 & & L_nL_{n-1}(X_{n-1}) + L_n(A'_n) \\
 a'_n \uparrow & & \downarrow (\alpha_{n-1})_{X_{n-1}} + 1 \\
 L_n(A'_n) & \xleftarrow{\simeq} & 0 + L_n(A'_n).
 \end{array}$$

我们有

$$\mathcal{H}^n(F)[X_{n-1}, x_{n-1}] = [F_{n-1}(X_{n-1}), \overline{x_{n-1}}], \quad \mathcal{H}^n(G)[X_{n-1}, x_{n-1}] = [G_{n-1}(X_{n-1}), \overline{x_{n-1}}'],$$

其中 $\overline{x_{n-1}}$ 和 $\overline{x_{n-1}}'$ 分别是如下复合映射

$$\begin{aligned}
 \overline{x_{n-1}} : F_n(A_n) & \xrightarrow{F_n(x_{n-1})} F_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) \simeq F_nL_{n-1}(X_{n-1}) + F_n(A'_n) \\
 & \xrightarrow{(\lambda_{n-1})_{X_{n-1}} + 1} M_{n-1}F_{n-1}(X_{n-1}) + F_n(A'_n), \\
 \overline{x_{n-1}}' : G_n(A_n) & \xrightarrow{G_n(x_{n-1})} G_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) \simeq G_nL_{n-1}(X_{n-1}) + G_n(A'_n) \\
 & \xrightarrow{(\mu_{n-1})_{X_{n-1}} + 1} M_{n-1}G_{n-1}(X_{n-1}) + G_n(A'_n).
 \end{aligned}$$

综上所述, 我们得到下面的交换图

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H}^n(F)(A_n, a_n) & \xrightarrow{(\varphi_n)_{(A_n, a_n)} = [H_{n-1}(A_n), y_{n-1}]} & \mathcal{H}^n(G)(A_n, a_n) \\
 \downarrow [F_{n-1}(X_{n-1}), \overline{x_{n-1}}] & & \downarrow [G_{n-1}(X_{n-1}), \overline{x_{n-1}}'] \\
 \mathcal{H}^n(F)(A'_n, a'_n) & \xrightarrow{(\varphi_n)_{(A'_n, a'_n)} = [H_{n-1}(A'_n), y'_{n-1}]} & \mathcal{H}^n(G)(A'_n, a'_n),
 \end{array}$$

则 τ 可诱导映射

$$\begin{aligned}
 [Y_{n-2} \triangleq H_{n-2}(X_{n-1}), y_{n-2}] : \\
 ([H_{n-1}(A'_n), y'_{n-1}] \circ [F_{n-1}(X_{n-1}), \overline{x_{n-1}}]) \\
 \rightarrow [G_{n-1}(X_{n-1}), \overline{x_{n-1}}'] \circ [H_{n-1}(A_n), y_{n-1}].
 \end{aligned}$$

这是因为

$$\begin{aligned}
 ((H'), y'_{n-1}) \circ F_{n-1}(X_{n-1}), \overline{x_{n-1}}) &= [F_{n-1}(X_{n-1}) + H_{n-1}(A'_n), (1 + y'_{n-1}) \circ \overline{x_{n-1}}'], \\
 [G_{n-1}(X_{n-1}), \overline{x_{n-1}}'] \circ [H_{n-1}(A_n), y_{n-1}] &= [H_{n-1}(A_n) + G_{n-1}(X_{n-1}), (1 + \overline{x_{n-1}}') \circ y_{n-1}].
 \end{aligned}$$

因此 y_{n-2} 是复合映射

$$\begin{aligned}
 &F_{n-1}(X_{n-1}) + H_{n-1}(A'_n) \\
 &\xrightarrow{(\tau_{n-1})_{X_{n-1}} + 1} (M_{n-2}H_{n-2} + H_{n-1}L_{n-1} + G_{n-1})(X_{n-1}) + H_{n-1}(A'_n) \\
 &\simeq M_{n-2}H_{n-2}(X_{n-1}) + H_{n-1}L_{n-1}(X_{n-1}) + G_{n-1}(X_{n-1}) + H_{n-1}(A'_n) \\
 &\simeq M_{n-2}H_{n-2}(X_{n-1}) + G_{n-1}(X_{n-1}) + H_{n-1}(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) \\
 &\xrightarrow{1 + 1 + H_{n-1}(x_{n-1}^{-1})} M_{n-2}H_{n-2}(X_{n-1}) + G_{n-1}(X_{n-1}) + H_{n-1}(A_n) \\
 &\simeq M_{n-2}H_{n-2}(X_{n-1}) + H_{n-1}(A_n) + G_{n-1}(X_{n-1}).
 \end{aligned}$$

另外分别根据自然变换的定义, 对称 monoidal 函子的性质, $\mathcal{R}$ -2- 模的性质, τ_n 满足的交换图以及把 H_n 作用在 $[X_{n-1}, x_{n-1}]$ 满足的交换图上可得如下交换图 (见图 1-6).

$$\begin{array}{ccc}
 F_n(A_n) & \xrightarrow{F_n(x_{n-1})} & F_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) \\
 (\tau_n)_{A_n} \downarrow & & \downarrow (\tau_n)_{L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n} \\
 (M_{n-1}H_{n-1} + H_nL_n + G_n)(A_n) & \xrightarrow{(M_{n-1}H_{n-1} + H_nL_n + G_n)(x_{n-1})} & (M_{n-1}H_{n-1} + H_nL_n + G_n)(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n)
 \end{array}$$

图 1

$$\begin{array}{ccc}
 F_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) & \xrightarrow{\simeq} & F_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) \\
 (\tau_n)_{L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n} \downarrow & & \downarrow (\tau_n)_{L_{n-1}(X_{n-1})} + (\tau_n)_{A'_n} \\
 (M_{n-1}H_{n-1} + H_nL_n + G_n)(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) & \xrightarrow{\simeq} & (M_{n-1}H_{n-1} + H_nL_n + G_n)L_{n-1}(X_{n-1}) + (M_{n-1}H_{n-1} + H_nL_n + G_n)(A'_n)
 \end{array}$$

图 2

$$\begin{array}{ccc}
(M_{n-1}H_{n-1} + H_nL_n + G_n)(A_n) & \xrightarrow{\simeq} & M_{n-1}H_{n-1}(A_n) + H_nL_n(A_n) + G_n(A_n) \\
\downarrow (M_{n-1}H_{n-1} + H_nL_n + G_n)(x_{n-1}) & & \downarrow M_{n-1}H_{n-1}(x_{n-1}) + H_nL_n(x_{n-1}) + G_n(x_{n-1}) \\
(M_{n-1}H_{n-1} + H_nL_n + G_n)(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) & \xrightarrow{\simeq} & M_{n-1}H_{n-1}(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) + H_nL_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) + G_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n)
\end{array}$$

图 3

$$\begin{array}{ccc}
M_{n-1}H_{n-1}(A_n) + H_nL_n(A_n) + G_n(A_n) & \xrightarrow{M_{n-1}H_{n-1}(x_{n+1}) + H_nL_n(x_{n-1}) + G_n(x_{n-1})} & M_{n-1}H_{n-1}(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) + H_nL_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) + G_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) \\
\downarrow 1 + H_n(a_n) + 1 & & \downarrow \simeq \\
M_{n-1}H_{n-1}(A_n) + H_n(0) + G_n(A_n) & & M_{n-1}H_{n-1}L_{n-1}(X_{n-1}) + H_nL_nL_{n-1}(X_{n-1}) + G_nL_{n-1}(X_{n-1}) + (M_{n-1}H_{n-1} + H_nL_n + G_n)(A'_n) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow 1 + H_n((\alpha_{n-1})x_{n-1}) + 1 + 1 \\
M_{n-1}H_{n-1}(A_n) + G_n(A_n) & & M_{n-1}H_{n-1}L_{n-1}(X_{n-1}) + H_n(0) + G_nL_{n-1}(X_{n-1}) + (M_{n-1}H_{n-1} + H_nL_n + G_n)(A'_n) \\
\downarrow 1 + G_n(x_{n-1}) & & \downarrow \simeq \\
M_{n-1}H_{n-1}(A_n) + G_n(L_{n-1}(X_{n-1})A'_n) & \xrightarrow{M_{n-1}H_n(x_{n-1}^{-1}) + G_n(x_{n-1}^{-1})} & M_{n-1}H_{n-1}(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) + H_nL_n(A'_n) + G_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow 1 + H_n(a'_n) + 1 \\
M_{n-1}H_{n-1}(A_n) + G_n(L_{n-1}(X_{n-1})) + G_n(A'_n) & & M_{n-1}H_{n-1}(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) + H_n(0) + G_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) \\
\downarrow 1 + (\mu_{n-1})x_{n-1} + 1 & & \downarrow \simeq \\
M_{n-1}H_{n-1}(A_n) + M_{n-1}(G_{n-1}(X_{n-1})) + G_n(A'_n) & & M_{n-1}H_{n-1}(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) + G_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow M_{n-1}H_{n-1}(x_{n-1}^{-1}) + 1 \\
M_{n-1}(H_{n-1}(A_n) + G_{n-1}(X_{n-1})) + G_n(A'_n) & & M_{n-1}H_{n-1}(A_n) + G_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
M_{n-1}H_{n-1}(A_n) + M_{n-1}G_{n-1}(X_{n-1}) + G_n(A'_n) & \xrightarrow{1 + (\mu_{n-1})x_{n-1} + 1} & M_{n-1}H_{n-1}(A_n) + G_nL_{n-1}(X_{n-1}) + G_n(A'_n)
\end{array}$$

图 4

$$\begin{array}{ccc}
M_{n-1}H_{n-1}(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) + H_nL_n(A'_n) + G_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) & \xrightarrow{\simeq} & M_{n-1}H_{n-1}L_{n-1}(X_{n-1}) + G_nL_{n-1}(X_{n-1}) + (M_{n-1}H_{n-1} + H_nL_n + G_n)(A'_n) \\
\downarrow 1 + H_n(a'_n) + 1 & & \downarrow 1 + (\mu_{n-1})x_{n-1} + 1 \\
M_{n-1}H_{n-1}(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) + H_n(0) + G_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) & & M_{n-1}H_{n-1}L_{n-1}(X_{n-1}) + M_{n-1}G_{n-1}(X_{n-1}) + (M_{n-1}H_{n-1} + H_nL_n + G_n)(A'_n) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
M_{n-1}H_{n-1}(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) + G_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) & & M_{n-1}H_{n-1}(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) + M_{n-1}G_{n-1}(X_{n-1}) + H_nL_n(A'_n) + G_n(A'_n) \\
\downarrow M_{n-1}H_{n-1}(x_{n-1}^{-1}) + 1 & & \downarrow M_{n-1}H_{n-1}(x_{n-1}^{-1}) + 1 + H_n(a'_n) + 1 \\
M_{n-1}H_{n-1}(A_n) + G_n(L_{n-1}(X_{n-1}) + A'_n) & & M_{n-1}H_{n-1}(A_n) + M_{n-1}G_{n-1}(X_{n-1}) + H_n(0) + G_n(A'_n) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
M_{n-1}H_{n-1}(A_n) + G_nL_{n-1}(X_{n-1}) + G_n(A'_n) & & M_{n-1}H_{n-1}(A_n) + M_{n-1}G_{n-1}(X_{n-1}) + G_n(A'_n) \\
\downarrow 1 + (\mu_{n-1})x_{n-1} + 1 & & \downarrow \simeq \\
M_{n-1}H_{n-1}(A_n) + M_{n-1}G_{n-1}(X_{n-1}) + G_n(A'_n) & \xrightarrow{\simeq} & M_{n-1}(H_{n-1}(A_n) + G_{n-1}(X_{n-1})) + G_n(A'_n)
\end{array}$$

图 5

$$\begin{array}{ccc}
F_nL_{n-1}(X_{n-1}) & \xrightarrow{(\lambda_{n-1})x_{n-1}} & M_{n-1}F_{n-1}(X_{n-1}) \\
\downarrow (\tau_n)L_{n-1}(x_{n-1}) & & \downarrow M_{n-1}((\tau_{n-1})x_{n-1}) \\
(M_{n-1}H_{n-1} + H_nL_n + G_n)L_{n-1}(X_{n-1}) & & M_{n-1}(M_{n-2}H_{n-2} + H_{n-1}L_{n-1} + G_{n-1})(X_{n-1}) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
M_{n-1}H_{n-1}L_{n-1}(X_{n-1}) + H_nL_nL_{n-1}(X_{n-1}) + G_nL_{n-1}(X_{n-1}) & & M_{n-1}M_{n-2}H_{n-2}(X_{n-1}) + M_{n-1}H_{n-1}L_{n-1}(X_{n-1}) + M_{n-1}G_{n-1}(X_{n-1}) \\
\downarrow 1 + H_n((\alpha_{n-1})x_{n-1}) + 1 & & \downarrow (\beta_{n-2})H_{n-1}(x_{n-1}) + 1 + 1 \\
M_{n-1}H_{n-1}L_{n-1}(X_{n-1}) + H_n(0) + G_nL_{n-1}(X_{n-1}) & & 0 + M_{n-1}H_{n-1}L_{n-1}(X_{n-1}) + M_{n-1}G_{n-1}(X_{n-1}) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
M_{n-1}H_{n-1}L_{n-1}(X_{n-1}) + G_nL_{n-1}(X_{n-1}) & \xrightarrow{1 + (\mu_{n-1})x_{n-1}} & M_{n-1}H_{n-1}L_{n-1}(X_{n-1}) + M_{n-1}G_{n-1}(X_{n-1})
\end{array}$$

图 6

因此 $[Y_{n-2}, y_{n-2}]$ 使得下面的图形可换,

$$\begin{array}{ccc}
 F_n(A_n) & \xrightarrow{(1+y'_{n-1})\overline{y_{n-1}}} & M_{n-1}(F_{n-1}(X_{n-1}) + H_{n-1}(A'_n)) + G_n(A'_n) \\
 \downarrow (1+\overline{y_{n-1}})y_{n-1} & & \downarrow M_{n-1}(y_{n-2}) + 1 \\
 M_{n-1}(H_{n-1}(A_n) + G_{n-1}(X_{n-1})) + G_n(A'_n) & & M_{n-1}(M_{n-2}H_{n-1}(X_{n-1}) + H_{n-1}(A_n) + G_{n-1}(X_{n-1})) + G_n(A'_n) \\
 \simeq \uparrow & & \downarrow \simeq \\
 0 + M_{n-1}(H_{n-1}(A_n) + G_{n-1}(X_{n-1})) + G_n(A'_n) & \xleftarrow{(\beta_{n-2})H_{n-1}(X_{n-1}) + 1} & M_{n-1}M_{n-2}H_{n-1}(X_{n-1}) + M_{n-1}(H_{n-1}(A_n) + G_{n-1}(X_{n-1})) + G_n(A'_n).
 \end{array}$$

对任给 $\mathcal{H}^n(\mathcal{A})$ 中的对象 (A_n, a_n) 和 (A'_n, a'_n) , 有

$$(A_n, a_n) + (A'_n, a'_n) = (A_n + A'_n, a_n + a'_n) \text{ 满足 } L_{n+1}(a_n + a'_n) = (\alpha_n)_{A_n + A'_n},$$

并且有下面的交换图

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H}^n(F)((A_n, a_n) + (A'_n, a'_n)) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{H}^n(F)(A_n, a_n) + \mathcal{H}_n(F)(A'_n, a'_n) \\
 (\varphi_n)_{(A_n, a_n) + (A'_n, a'_n)} = [H_{n-1}(A_n + A'_n), \overline{y_{n-1}}] \downarrow & & \downarrow (\varphi_n)_{(A_n, a_n)} + (\varphi_n)_{(A'_n, a'_n)} = [H_{n-1}(A_n), y_{n-1}] + [H_{n-1}(A'_n), y'_{n-1}] \\
 \mathcal{H}^n(G)((A_n, a_n) + (A'_n, a'_n)) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{H}^n(G)(A_n, a_n) + \mathcal{H}_n(G)(A'_n, a'_n),
 \end{array}$$

其中 $\overline{y_{n-1}}, y_{n-1}, y'_{n-1}$ 是由 τ_n 诱导得到的. 事实上,

$$[H_{n-1}(A_n), y_{n-1}] + [H_{n-1}(A'_n), y'_{n-1}] = [H_{n-1}(A_n) + H_n(A'_n), y_{n-1} + y'_{n-1}],$$

因此

$$(\varphi_n)_{(A_n, a_n) + (A'_n, a'_n)} = (\varphi_n)_{(A_n, a_n)} + (\varphi_n)_{(A'_n, a'_n)}.$$

另外, 任给 $r \in \text{obj}(\mathcal{R})$, $(A_n, a_n) \in \text{obj}(\mathcal{H}^n(\mathcal{A}))$, 从 $\mathcal{R}$ - 同态 H_{n-1} 可得下面的图可换.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H}^n(F)(r \cdot (A_n, a_n)) & \xrightarrow{\simeq} & r \cdot \mathcal{H}^n(F)(A_n, a_n) \\
 (\varphi_n)_{r \cdot (A_n, a_n)} = [H_{n-1}(r \cdot A_n), \overline{y_{n-1}}] \downarrow & & \downarrow (r \cdot \varphi_n)_{(A_n, a_n)} = [r \cdot H_{n-1}(A'_n), r \cdot y_{n-1}] \\
 \mathcal{H}^n(G)(r \cdot (A_n, a_n)) & \xrightarrow{\simeq} & r \cdot \mathcal{H}^n(G)(A_n, a_n).
 \end{array}$$

由上面的推理可知, 对每个 n , φ_n 是 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中的 2- 映射. □

根据严格 2- 函子的定义及性质, 易得下面的引理.

引理 1 令 $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ 是两个 2- 环, $(F, \lambda), (G, \mu) : (\mathcal{A}, L, \alpha) \rightarrow (\mathcal{B}, M, \beta)$ 是由 $\mathcal{R}$ -2- 模构成的 2- 上链复形之间的映射, 并且是 2- 上链同伦的, $T : (\mathcal{R}\text{-2-Mod}) \rightarrow (\mathcal{S}\text{-2-Mod})$ 是一个严格的 2- 函子. 则 $T(F, \lambda)$ 与 $T(G, \mu)$ 在 $(\mathcal{S}\text{-2-Mod})$ 中是 2- 上链同伦的.

4 右导出 2- 函子

本节主要给出右导出 2- 函子的定义及性质. 首先, 对任给的 $\mathcal{R}$ -2- 模, 我们定义了它的单射分解并给出其具体的构造.

定义 4 令 $\mathcal{I}$ 是一个 $\mathcal{R}$ -2- 模. $\mathcal{I}$ 称为 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中的单射对象, 如果对 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中的每一个 1- 映射 $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I}$ 及任给的忠实函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, 在 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中都有存在 1- 映射 $G' : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{I}$ 和 2- 映射 $h : G' \circ F \Rightarrow G$.

定义 5 令 $\mathcal{R}$ 是一个 2- 环, $\mathcal{A}$ 是一个 $\mathcal{R}$ -2- 模. $\mathcal{A}$ 的单射分解是 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中的一个 2- 上链复形, 并且这个 2- 上链复形在每一点处都是相对 2- 正合的, 如下图所示

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& \searrow & \text{can} \uparrow & \searrow & \alpha_2 \uparrow & \searrow & \\
0 & \xrightarrow{0} & \mathcal{A} & \xrightarrow{F_0} & \mathcal{I}_0 & \xrightarrow{F_1} & \mathcal{I}_1 \xrightarrow{F_2} \mathcal{I}_2 \xrightarrow{F_3} \dots \\
& \nearrow & \alpha_1 \downarrow & \nearrow & & & \\
& & 0 & & & &
\end{array}$$

其中 $\mathcal{I}_n$ ($n \geq 0$) 是 $(\mathcal{R}\text{-}2\text{-模})$ 中的单射对象.

命题 2 $(\mathcal{R}\text{-}2\text{-模})$ 中任一对象 $\mathcal{A}$ 都存在单射分解.

证明 我们利用相对余核的性质来构造 $\mathcal{A}$ 的单射分解.

由于 $(\mathcal{R}\text{-}2\text{-模})$ 有充分多的单射对象, 所以存在忠实映射 $F_0: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I}_0$, 其中 $\mathcal{I}_0$ 是 $(\mathcal{R}\text{-}2\text{-模})$ 中的单射对象, 从而得到下面的序列

$$\begin{array}{ccccc}
& & 0 & & \\
& \searrow & \text{can} \uparrow & \searrow & \\
0 & \xrightarrow{0} & \mathcal{A} & \xrightarrow{F_0} & \mathcal{I}_0
\end{array}$$

其中 $0: \mathcal{M} \rightarrow 0$ 是 $(\mathcal{R}\text{-}2\text{-模})$ 中的 0 映射, can 是 $(\mathcal{R}\text{-}2\text{-模})$ 中的典则 2-映射.

考虑上述序列, 在 $(\mathcal{R}\text{-}2\text{-模})$ 中存在相对余核 $(\text{Coker}(\text{can}, F_0), p_{(\text{can}, F_0)}, \pi_{(\text{can}, F_0)})$, 这个相对余核就是 $(\text{Coker} F_0, p_{F_0}, \pi_{F_0})$. 对 $\text{Coker} F_0$, 存在忠实映射 $\overline{F}_1: \text{Coker} F_0 \rightarrow \mathcal{I}_1$, 其中 $\mathcal{I}_1$ 是 $(\mathcal{R}\text{-}2\text{-模})$ 中的单射对象. 令 $F_1 = \overline{F}_1 \circ p_{F_0}: \mathcal{I}_0 \rightarrow \mathcal{I}_1$, 从而得到序列

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& \searrow & \alpha_1 \uparrow & \searrow & \text{id} \uparrow & \searrow & \\
0 & \xrightarrow{0} & \mathcal{A} & \xrightarrow{F_0} & \mathcal{I}_0 & \xrightarrow{F_1} & \mathcal{I}_1 \\
& \searrow & \pi_{F_0} \downarrow & \searrow & p_{F_0} \downarrow & \searrow & \\
& & 0 & & \text{Coker} F_0 & & \\
& & & & \overline{F}_1 & &
\end{array}$$

其中 $\alpha_1: F_1 \circ F_0 \Rightarrow 0$ 是复合映射 $\overline{F}_1 \circ p_{F_0} \circ F_0 \xrightarrow{\overline{F}_1 \pi_{F_0}} \overline{F}_1 \circ 0 = 0$ 并且与 can 相容.

考虑上面新得到的序列, 在 $(\mathcal{R}\text{-}2\text{-模})$ 中存在相对余核 $(\text{Coker}(\alpha_1, F_1), p_{(\alpha_1, F_1)}, \pi_{(\alpha_1, F_1)})$. 对 $\mathcal{R}\text{-}2\text{-模}$ $\text{Coker}(\alpha_1, F_1)$ 来讲, 存在忠实映射 $\overline{F}_2: \text{Coker}(\alpha_1, F_1) \rightarrow \mathcal{I}_2$, 其中 $\mathcal{I}_2$ 是 $(\mathcal{R}\text{-}2\text{-模})$ 中的单射对象. 令 $F_2 = \overline{F}_2 \circ p_{(\alpha_1, F_1)}: \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{I}_2$, 从而得到序列

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & \text{Coker}(\alpha_1, F_1) & & \\
& & & & \downarrow p_{(\alpha_1, F_1)} & & \\
& \searrow & 0 & \searrow & \text{id} & \searrow & \\
0 & \xrightarrow{0} & \mathcal{A} & \xrightarrow{F_0} & \mathcal{I}_0 & \xrightarrow{F_1} & \mathcal{I}_1 \xrightarrow{F_2} \mathcal{I}_2 \\
& \searrow & \alpha_1 \downarrow & \searrow & \alpha_2 \downarrow & \searrow & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

其中 $\alpha_2: F_2 \circ F_1 \Rightarrow 0$ 是复合映射 $F_2 \circ F_1 = \overline{F}_2 \circ p_{(\alpha_1, F_1)} \circ F_1 \xrightarrow{\overline{F}_2 \pi_{F_1}} \overline{F}_2 \circ 0 = 0$ 并且与 α_1 相容.

按照上述方法依次类推, 可以得到一个由 $\mathcal{R}\text{-}2\text{-模}$ 构成的 2-上链复形

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& \searrow & \text{can} \uparrow & \searrow & \alpha_2 \uparrow & \searrow & \\
0 & \xrightarrow{0} & \mathcal{A} & \xrightarrow{F_0} & \mathcal{I}_0 & \xrightarrow{F_1} & \mathcal{I}_1 \xrightarrow{F_2} \mathcal{I}_2 \xrightarrow{F_3} \dots \\
& \nearrow & \alpha_1 \downarrow & \nearrow & & & \\
& & 0 & & & &
\end{array} \quad (*)$$

接下来, 我们验证 2- 上链复形 $(*)$ 在每一点都是相对 2- 正合的.

显然, 在 $\mathcal{A}$ 点处是相对 2- 正合的. 根据 p_{F_0} 的消去性质, 存在 $\overline{\alpha_2} : F_2 \circ \overline{F_1} \Rightarrow 0$ 定义为 $(\overline{\alpha_2})_y \triangleq (\alpha_2)_y : F_2 \circ \overline{F_1}(y) \rightarrow 0, \forall y \in \text{obj}(\mathcal{I}_0)$. 因为 $p_{F_0}(x) = x$, 任给 $X, Y \in \text{obj}(\text{Coker} F_0)$ 和 $\mathcal{I}_1$ 中的映射 $g : \overline{F_1}(X) \rightarrow \overline{F_1}(Y)$ 都有如下可换图,

$$\begin{array}{ccc} F_2 \overline{F_1}(X) & \xrightarrow{F_2(g)} & F_2 \overline{F_1}(Y) \\ (\overline{\alpha_2})_X \searrow & & \swarrow (\overline{\alpha_2})_Y \\ & 0 & \end{array}$$

利用 $F_1 = \overline{F_1} \circ p_{F_0}$ 和 $\overline{\alpha_2}$ 的存在性, 可得 $\mathcal{I}_1$ 中的映射 $g : F_1(X) \rightarrow F_1(Y)$ 以及下面的交换图 (图 7),

$$\begin{array}{ccc} F_2 F_1(X) & \xrightarrow{F_2(g)} & F_2 F_1(Y) \\ (\alpha_2)_X \searrow & & \swarrow (\alpha_2)_Y \\ & 0 & \end{array}$$

图 7

另外, 由 $\alpha_2 = \overline{F_2} \circ \pi_{(\alpha_1, F_1)}$, 可得

$$\begin{aligned} (\alpha_2)_X &= \overline{F_2}((\pi_{(\alpha_1, F_1)})_X) = \overline{F_2}([X, 1_{F_1(X)}]) \\ (\alpha_2)_Y &= \overline{F_2}((\pi_{(\alpha_1, F_1)})_Y) = \overline{F_2}([Y, 1_{F_1(Y)}]), \end{aligned}$$

进而可得 $(\alpha_2)_Y^{-1} = \overline{F_1}([Y^*, 1_0])$, 其中 Y^* 是 Y 在 $\mathcal{I}_0$ 中的逆元. 有

$$\overline{F_2} p_{(\alpha_1, F_1)}(g) = (\alpha_2)_Y^{-1} \circ (\alpha_2)_X,$$

也就是说

$$\overline{F_2}([0, g]) = \overline{F_2}([Y^*, 1_0] \circ [X, 1_{F_1(X)}]) = \overline{F_2}([X + Y^*, 1_{F_1(X)}])$$

把 $\overline{F_2} p_{(\alpha_1, F_1)} F_1(X)$ 映为 $\overline{F_2} p_{(\alpha_1, F_1)} F_1(Y)$. 因为映射 $\overline{F_2}$ 是忠实的, 可得

$$[0, g] = [X + Y^*, 1_{F_1(X)}] : F_1(X) \rightarrow F_1(Y),$$

从而存在 $B \in \text{obj}(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{I}_0$ 中映射 $f : 0 \rightarrow F_0(B) + X + Y^*$ 使得下图可换,

$$\begin{array}{ccc} p_{(\alpha_1, F_1)} F_1(X) & \xrightarrow{g} & F_1(0) + p_{(\alpha_1, F_1)} F_1(Y) \\ \downarrow 1_{F_1(X)} & & \downarrow F_1(f) + 1 \\ F_1(X + Y^*) + p_{(\alpha_1, F_1)} F_1(Y) & & F_1(F_0(B) + X + Y^*) + p_{(\alpha_1, F_1)} F_1(Y) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ 0 + F_1(X + Y^*) + p_{(\alpha_1, F_1)} F_1(Y) & \xleftarrow{(\alpha_1)_B + 1} & F_1 F_0(B) + F_1(X + Y^*) + p_{(\alpha_1, F_1)} F_1(Y). \end{array}$$

$\text{Coker} F_0$ 中的映射 $[B, f] : 0 \rightarrow X + Y^*$, 可以写成如下复合映射

$$[B, f] = ([B, 1_{F_0(B)}] + 1_{X+Y^*}) \circ [0, f].$$

因此有

$$\overline{F_1}([B, f]) = \overline{F_1}([B, 1_{F_0(B)}] + 1_{X+Y^*}) \circ [0, f] = \overline{F_1}([B, 1_{F_0(B)}] + 1_{X+Y^*}) \circ \overline{F_1}([0, f])$$

$$\begin{aligned}
&= (\overline{F_1}([B, 1_{F_0(B)}]) + 1_{\overline{F_1}(X+Y^*)}) \circ \overline{F_1}([0, f]) \\
&= (\overline{F_1}((\pi_{F_0})_B) + 1_{\overline{F_1}(X+Y^*)}) \circ \overline{F_1}([0, f]) \\
&= ((\alpha_1)_B + 1_{\overline{F_1}(X+Y^*)}) \circ F_1(f).
\end{aligned}$$

利用 $\text{Coker} F_0$ 中的映射 $[B, f]: 0 \rightarrow X + Y^*$, 计算之后可得

$$[B, f]^{-1} = [B^*, 1_{F_0(B)}^{-1} + f^{-1}]: X + Y^* \rightarrow 0, \quad [B, f] + 1_Y: Y \rightarrow X$$

和

$$[B^*, \bar{f}] := ([B, f] + 1_Y)^{-1} = [B^*, 1_{F_0(B)}^{-1} + f^{-1} + 1_Y]: X \rightarrow Y.$$

从交换图 7 可得

$$((\alpha_1)_B + 1_{F_1(X+Y^*)} + 1_{F_1(Y)}) \circ (F_1(f) + 1_{F_1(Y)}) \circ g = 1_{F_1(X)},$$

进而有 $g = \overline{F_1}([B^*, \bar{f}])$. 因此存在 $\text{Coker} F_0$ 中的映射 $[B^* \in \text{obj}(\mathcal{A}), \bar{f}]: X \rightarrow Y$ 使得 $\overline{F_1}([B^*, \bar{f}]) = g$, 即忠实映射 $\overline{F_1}$ 是 α_2 -full 的. 所以上述 2- 上链复形在 $\mathcal{I}_0$ 处是相对 2- 正合的.

类似地, 可以证明我们构造的 2- 上链复形 $(*)$ 在每一点处都是相对 2- 正合的. $\square$

定理 1 $\mathcal{R}$ 是一个 2- 环, $(L: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I}, \alpha)$ 是 $\mathcal{R}$ -2- 模 $\mathcal{A}$ 的单射分解, $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是 $(\mathcal{R}$ -2- 模) 中的 1- 映射. 对任给 $\mathcal{B}$ 的单射分解 $(M: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{J}, \beta)$, 存在由 F 诱导的 $(\mathcal{R}$ -2- 模) 中的 2- 上链复形之间的映射 $(F, \varepsilon): \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$, 其中 $\{\varepsilon_n: F_n \circ L_n \Rightarrow M_n \circ F_{n-1}\}_{n \geq 0}$ (这里 $F_{-1} = F$) 如下图所示

如果存在另外的单射分解之间的映射, 它们是 2- 上链同伦的.

证明 因为 L_0 是忠实的, 而 J_0 是 $(\mathcal{R}$ -2- 模) 中单射对象, 故存在 1- 映射 $F_0: \mathcal{I}_0 \rightarrow \mathcal{J}_0$ 和 2- 映射 $\varepsilon_0: F_0 \circ L_0 \Rightarrow M_0 \circ F$.

由 $F_0: \mathcal{I}_0 \rightarrow \mathcal{J}_0$ 可得映射

$$\begin{aligned}
\overline{F_0}: \text{Coker} L_0 &\rightarrow \text{Coker} M_0 \\
X &\mapsto F_0(X), \\
X &\xrightarrow{[A, f]} Y \mapsto F_0(X) \xrightarrow{[F(A), g]} F_0(Y),
\end{aligned}$$

其中 g 是复合映射

$$F_0(X) \xrightarrow{F_0(f)} F_0(L_0(A) + Y) \simeq F_0 L_0(A) + F_0(Y) \xrightarrow{(\varepsilon_0)_A + 1} M_0 F(A) + F_0(Y).$$

同时有下面的交换图,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_0 & \xrightarrow{p_{L_0}} & \text{Coker } L_0 \\ F_0 \downarrow & & \downarrow \overline{F_0} \\ \mathcal{J}_0 & \xrightarrow{p_{M_0}} & \text{Coker } M_0 \end{array}$$

由于单射分解在每点处都是相对 2- 正合的, 存在忠实映射 $\overline{L_1} : \text{Coker } F_0 \rightarrow \mathcal{I}_1$, $\overline{M_1} : \text{Coker } G_0 \rightarrow \mathcal{J}_1$ 以及 2- 映射 $\varphi_1 : \overline{L_1} \circ p_{L_0} \Rightarrow L_1$, $\psi_1 : \overline{M_1} \circ p_{M_0} \Rightarrow M_1$. 进而存在 1- 映射 $F_1 : \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{J}_1$ 和 2- 映射 $\overline{\varepsilon_1} : F_1 \circ \overline{L_1} \Rightarrow \overline{M_1} \circ \overline{F_0}$.

利用 $\overline{\varepsilon_1}$ 和 $\overline{F_0} \circ p_{L_0} = p_{M_0} \circ F_0$, 可以定义 2- 映射 $\varepsilon_1 : F_1 \circ L_1 \Rightarrow M_1 \circ F_0$ 为

$$F_1 \circ L_1 \xrightarrow{F_1(\varphi_1^{-1})} F_1 \circ \overline{L_1} \circ p_{L_0} \xrightarrow{\overline{\varepsilon_1} p_{L_0}} \overline{M_1} \circ \overline{F_0} \circ p_{L_0} = \overline{M_1} \circ p_{M_0} \circ F_0 \xrightarrow{\psi_1 F_0} M_1 \circ F_0,$$

并且与 ε_0 相容.

接下来, 我们对 n 利用归纳法来给出 F_n 和 $\varepsilon_n : F_n \circ L_n \Rightarrow M_n \circ F_{n-1}$. 当 $i \leq n$ 时, 假设 F_i 和 ε_i 都存在. 对映射 $F_n : \mathcal{I}_n \rightarrow \mathcal{J}_n$, 有下面的诱导映射

$$\begin{aligned} \overline{F_n} : \text{Coker}(\alpha_n, L_n) &\rightarrow \text{Coker}(\beta_n, M_n) \\ X &\mapsto F_n(X), \\ X &\xrightarrow{[X_{n-1}, x_{n-1}]} Y \mapsto F_n(X) \xrightarrow{[F_{n-1}(X_{n-1}), y_{n-1}]} F_n(Y), \end{aligned}$$

其中 y_{n-1} 是复合映射

$$\begin{aligned} F_n(X) &\xrightarrow{F_n(x_{n-1})} F_n(L_n(X_{n-1}) + Y) \simeq F_n L_n(X_{n-1}) + F_n(Y) \\ &\xrightarrow{(\varepsilon_n)_{X_{n-1}+1}} M_n F_{n-1}(X_{n-1}) + F_n(Y). \end{aligned}$$

同时还有下面的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_n & \xrightarrow{p(\alpha_n, L_n)} & \text{Coker}(\alpha_n, L_n) \\ F_n \downarrow & & \downarrow \overline{F_n} \\ \mathcal{J}_n & \xrightarrow{p(\beta_n, M_n)} & \text{Coker}(\beta_n, M_n). \end{array}$$

根据 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的单射分解在每点处都是相对 2- 正合的, 可以得到下图,

$$\begin{array}{ccccc} & & L_{n+1} & & \\ & \nearrow & \uparrow \varphi_{n+1} & \searrow & \\ \mathcal{I}_n & \xrightarrow{p(\alpha_n, L_n)} & \text{Coker}(\alpha_n, L_n) & \xrightarrow{\overline{L_{n+1}}} & \mathcal{I}_{n+1} \\ F_n \downarrow & & \downarrow \overline{F_n} & \xleftarrow{\overline{\varepsilon_{n+1}}} & \downarrow F_{n+1} \\ \mathcal{J}_n & \xrightarrow{p(\beta_n, M_n)} & \text{Coker}(\beta_n, M_n) & \xrightarrow{\overline{M_{n+1}}} & \mathcal{J}_{n+1} \\ & \searrow & \downarrow \psi_{n+1} & \nearrow & \\ & & M_{n+1} & & \end{array}$$

其中, F_{n+1} 和 $\overline{\varepsilon_{n+1}}$ 的存在性是根据 $\mathcal{J}_{n+1}$ 是单射对象得到的. 类似 ε_1 的定义, 可根据 $\overline{\varepsilon_{n+1}}, \varphi_{n+1}, \psi_{n+1}$ 定义 2- 映射 ε_{n+1} 并且它与 ε_n 相容.

下面, 我们将要验证 (F, ε) 在 2- 上链同伦意义下是唯一存在的. 假设存在另外的映射 (G, μ) 满足要求. 我们对 n 进行归纳证明存在 1- 映射 $H_n: \mathcal{I}_{n+1} \rightarrow \mathcal{J}_n$, 和 2- 映射 $\tau_n: F_n \Rightarrow M_n \circ H_{n-1} + H_n \circ L_{n+1} + G_n$. 当 $n < 0$, $\mathcal{I}_n = 0$, 因此 $H_n = 0$. 如果 $n = 0$, 存在 1- 映射 $F_0 - G_0: \text{Coker} L_0 \rightarrow \mathcal{J}_0$. 由于映射 $\overline{L_1}: \text{Coker} L_0 \rightarrow \mathcal{I}_1$ 是忠实的并且 $\mathcal{J}_0$ 是单射对象, 存在 1- 映射 $H_0: \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{J}_0$ 和 2- 映射 $\tau'_0: H_1 \circ \overline{L_1} \Rightarrow F_0 - G_0$. 进而得到 2- 映射 $\tau_0: F_0 \Rightarrow H_0 \circ L_1 + G_0$.

对 n 进行归纳, 假设当 $i < n$ 时, 存在映射 $(H_i, \tau_i)_{i \leq n}$ 满足 $H_i: \mathcal{I}_i \rightarrow \mathcal{J}_{i-1}$, $\tau_i: F_i \Rightarrow M_i \circ H_{i-1} + H_i \circ L_{i+1} + G_i$. 考虑 1- 映射 $F_n - G_n - M_n \circ H_{n-1}: \text{Coker}(\alpha_n, L_n) \rightarrow \mathcal{J}_n$ 和忠实映射 $\overline{L_{n+1}}: \text{Coker}(\alpha_n, L_n) \rightarrow \mathcal{I}_{n+1}$, 以及单射对象 $\mathcal{J}_n$, 存在 1- 映射 $H_n: \mathcal{I}_{n+1} \rightarrow \mathcal{J}_n$ 和 2- 映射 $\tau'_n: H_n \circ \overline{L_{n+1}} \Rightarrow F_n - G_n - M_n \circ H_{n-1}$. 从而得到 2- 映射 $\tau: F_n \Rightarrow M_n \circ H_{n-1} + H_n \circ L_{n+1} + G_n$. $\square$

注 5 $F_0 - G_0: \text{Coker} L_0 \rightarrow \mathcal{J}_0$ 可以通过如下方法给出:

对 $\text{Coker} L_0$ 中的对象 X , 定义 $(F_0 - G_0)(X) = F_0(X) - G_0(X)$.

对 $\text{Coker} L_0$ 中的映射 $[A, f]: X \rightarrow Y$, 其中 $A \in \text{obj}(\mathcal{A})$, $f: X \rightarrow L_0(A) + Y$, 有

$$F_0(X) \xrightarrow{F_0(f)} F_0(L_0(A) + Y) \simeq F_0 L_0(A) + F_0(Y) \xrightarrow{(\varepsilon_0)_A + 1} M_0 F(A) + F_0(Y)$$

和

$$G_0(X) \xrightarrow{G_0(f)} G_0(L_0(A) + Y) \simeq G_0 L_0(A) + G_0(Y) \xrightarrow{(\mu_0)_A + 1} M_0 F(A) + G_0(Y).$$

定义

$$(F_0 - G_0)([A, f]) = ((\varepsilon_0)_A + 1) \circ F_0(f) - ((\mu_0)_A + 1) \circ G_0(f): \\ F_0(X) - G_0(X) \rightarrow F_0(Y) - G_0(Y).$$

首先 $F_0 - G_0$ 的定义是合理的. 也就是说, 任给 $\text{Coker} L_0$ 中两个等价映射

$$[A, f] = [A', f']: X \rightarrow Y,$$

存在映射 $a: A \rightarrow A'$ 满足

$$(L_0(a) + 1) \circ f = f'.$$

经计算可得,

$$(F_0 - G_0)([A, f]) = (F_0 - G_0)([A', f']).$$

$F_0 - G_0$ 是函子, 也就是说, 任给 $\text{Coker} L_0$ 中的映射 $X \xrightarrow{[A_1, f_1]} Y \xrightarrow{[A_2, f_2]} Z$, 有

$$(F_0 - G_0)([A_2, f_2] \circ [A_1, f_1]) = (F_0 - G_0)([A_2, f_2]) \circ (F_0 - G_0)([A_1, f_1])$$

这是因为

$$[A_2, f_2] \circ [A_1, f_1] = [A_1 + A_2, (1 + f_2) \circ f_1],$$

并且

$$(F_0 - G_0)([A_2, f_2] \circ [A_1, f_1]) \\ = (F_0 - G_0)([A_1 + A_2, (1 + f_2) \circ f_1]) \\ = ((\varepsilon_0)_{A_1 + A_2} + 1) \circ F_0((1 + f_2) \circ f_1) - ((\mu_0)_{A_1 + A_2} + 1) \circ G_0((1 + f_2) \circ f_1)$$

$$\begin{aligned}
 &= ((\varepsilon_0)_{A_1} + (\varepsilon_0)_{A_2} + 1) \circ F_0(1 + f_2) \circ F_0(f_1) - ((\mu_0)_{A_1} + (\mu_0)_{A_2} + 1) \circ G_0(1 + f_2) \circ G_0(f_1) \\
 &= ((\varepsilon_0)_{A_2} + 1) \circ F_0(f_2) - ((\mu_0)_{A_2} + 1) \circ G_0(f_2)((\varepsilon_0)_{A_1} + 1) \circ F_0(f_1) - ((\mu_0)_{A_1} + 1) \circ G_0(f_1) \\
 &= (F_0 - G_0)([A_2, f_2]) \circ (F_0 - G_0)([A_1, f_1]).
 \end{aligned}$$

因为 F_0, G_0 是 $\mathcal{R}$ -2- 模之间的 $\mathcal{R}$ - 同态, 所以 $F_0 - G_0$ 也是.

$F_n - G_n - M_n \circ H_{n-1} : \text{Coker}(\alpha_n, L_n) \rightarrow \mathcal{J}_n$ 的定义如下:

任给 $\text{Coker}(\alpha_n, L_n)$ 中的对象 X , 定义

$$(F_n - G_n - M_n H_{n-1})(X) = F_n(X) - G_n(X) - M_n H_{n-1}(X).$$

任给 $\text{Coker}(\alpha_n, L_n)$ 中的映射 $[X_{n-1}, x_{n-1}] : X \rightarrow Y$, 其中

$$X_{n-1} \in \text{obj}(\mathcal{I}_{n-1}), \quad x_{n-1} : L_n(X_{n-1}) \rightarrow Y.$$

考虑如下复合映射

$$\begin{aligned}
 F_n(X) &\xrightarrow{F_n(x_{n-1})} F_n(L_n(X_{n-1}) + Y) \simeq F_n L_n(X_{n-1}) + F_n(Y) \\
 &\xrightarrow{(\varepsilon_n)_{X_{n-1}} + 1} M_n F_{n-1}(X_{n-1}) + F_n(Y), \\
 G_n(X) &\xrightarrow{G_n(x_{n-1})} G_n(L_n(X_{n-1}) + Y) \simeq G_n L_n(X_{n-1}) + G_n(Y) \\
 &\xrightarrow{(\mu_n)_{X_{n-1}} + 1} M_n G_{n-1}(X_{n-1}) + G_n(Y),
 \end{aligned}$$

和

$$M_n H_{n-1}(X) \xrightarrow{M_n H_{n-1}(x_{n-1})} M_n H_{n-1}(L_n(X_{n-1}) + Y) \simeq M_n H_{n-1} L_n(X_{n-1}) + M_n H_{n-1}(Y)$$

以及 2- 映射 $\tau_{n-1} : F_{n-1} \Rightarrow M_{n-1} H_{n-2} + H_{n-1} L_n + G_{n-1}$, 可得映射

$$(F_n - G_n - M_n H_{n-1})([X_{n-1}, x_{n-1}]).$$

类似地, $F_n - G_n - M_n H_{n-1}$ 是 $\mathcal{R}$ -2- 模之间的 $\mathcal{R}$ - 同态.

5 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中的导出 2- 函子

本节给出了从 2- 范畴 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 到 2- 范畴 ($\mathcal{S}$ -2-Mod) 的右导出 2- 函子的概念, 其中 2- 范畴 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 和 ($\mathcal{S}$ -2-Mod) 都有充分多的单射对象 [5,6]

定义 6 $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ 是两个 2- 环. 一个加法严格 2- 函子 $T: (\mathcal{R}\text{-2- 模}) \rightarrow (\mathcal{S}\text{-2-Mod})$ 称为左相对 2- 正合的, 如果它把在 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 处相对 2- 正合的序列

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \nearrow & & \\
 0 & \xrightarrow{0} & \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{B} & \xrightarrow{G} & \mathcal{C} \xrightarrow{0} 0 \\
 & & \uparrow \text{can} & & \uparrow \text{can} & & \\
 & & & \downarrow \varphi & & & \\
 & & & 0 & & &
 \end{array}$$

映成在 $T(\mathcal{A})$ 和 $T(\mathcal{B})$ 处相对 2- 正合的序列

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & \nearrow & \text{can} \uparrow\uparrow & \searrow & & & \\
 0 & \xrightarrow{0} & T(\mathcal{A}) & \xrightarrow{T(F)} & T(\mathcal{B}) & \xrightarrow{T(G)} & T(\mathcal{C}) \\
 & & & & \downarrow T(\varphi) \Downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

利用注 4, 命题 1 和定理 1, 有下面的推论

推论 1 令 $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ 是两个 2- 环, $T: (\mathcal{R}\text{-2- 模}) \rightarrow (\mathcal{S}\text{-2-Mod})$ 是加法严格 2- 函子, $\mathcal{A}$ 是 $(\mathcal{R}\text{-2- 模})$ 中的任意对象. 对 $\mathcal{A}$ 的两个单射分解 $\mathcal{I}, \mathcal{J}$, 上同调 $\mathcal{S}\text{-2- 模}$ $\mathcal{H}(T(\mathcal{I}))$ 和 $\mathcal{H}(T(\mathcal{J}))$ 是等价的.

令 $T: (\mathcal{R}\text{-2- 模}) \rightarrow (\mathcal{S}\text{-2-Mod})$ 是加法严格 2- 函子, 存在 2- 函子

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}^i T &: (\mathcal{R}\text{-2-Mod}) \rightarrow (\mathcal{S}\text{-2-Mod}) \\
 \mathcal{A} &\mapsto \mathcal{R}^i T(\mathcal{A}), \\
 \mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} &\mapsto \mathcal{R}^i T(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathcal{R}^i T(F)} \mathcal{R}^i T(\mathcal{B}),
 \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{R}^i T(\mathcal{A})$ 定义为 $\mathcal{H}^i(T(\mathcal{I}))$, $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 的单射分解. 根据推论 1 和加法 2- 函子的性质可知 $\mathcal{R}^i T$ 的定义是合理的.

推论 2 令 $T: (\mathcal{R}\text{-2- 模}) \rightarrow (\mathcal{S}\text{-2-Mod})$ 是右相对 2- 正合的 2- 函子, $\mathcal{A}$ 是 $(\mathcal{R}\text{-2- 模})$ 中的单射对象. 则 $\mathcal{R}^i T(\mathcal{A}) = 0$, 对 $i > 0$.

下面的定理是导出 2- 函子的一个基本的、也是非常重要的性质.

定理 2 令 $T: (\mathcal{R}\text{-2- 模}) \rightarrow (\mathcal{S}\text{-2-Mod})$ 是左相对 2- 正合严格 2- 函子. 则右导出 2- 函子 $\mathcal{R}^* T$ 把 $(\mathcal{R}\text{-2- 模})$ 中相对 2- 正合序列

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A} & \xrightarrow{0} & \mathcal{C} \\
 & \varphi \uparrow\uparrow & \\
 \mathcal{A} & \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} & \mathcal{C}
 \end{array}$$

(上述序列在 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 处是相对 2- 正合的) 映成 $(\mathcal{S}\text{-2-Mod})$ 中的在每一点处都相对 2- 正合的长序列

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & \nearrow & \uparrow \mathcal{R}^n T(\varphi) & \searrow & \uparrow \psi_n & & \\
 \cdots & \longrightarrow & \mathcal{R}^n T(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathcal{R}^n T(F)} & \mathcal{R}^n T(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\mathcal{R}^n T(G)} & \mathcal{R}^n T(\mathcal{C}) \xrightarrow{\Delta_n} \mathcal{R}^{n+1} T(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathcal{R}^{n+1} T(F)} \mathcal{R}^{n+1} T(\mathcal{B}) \longrightarrow \cdots \\
 & & & & \downarrow \Sigma_n & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

为了证明这个定理, 我们需要下面的几个引理.

引理 2 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 是 $(\mathcal{R}\text{-2- 模})$ 中的单射对象, 则积范畴 $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ 也是 $(\mathcal{R}\text{-2- 模})$ 中的单射对象.

证明 已知 $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ 是 $\mathcal{R}\text{-2- 模}$. 因此只需验证它是单射对象即可. 首先我们有典则映射

$$\mathcal{I} \xleftarrow{p_1} \mathcal{I} \times \mathcal{J} \xrightarrow{p_2} \mathcal{J}, \quad \mathcal{I} \xrightarrow{i_1} \mathcal{I} \times \mathcal{J} \xleftarrow{i_2} \mathcal{J}.$$

任给映射 $G: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I} \times \mathcal{J}$, 可得到下面的复合映射

$$G_1: \mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{I} \times \mathcal{J} \xrightarrow{p_1} \mathcal{I}, \quad G_2: \mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{I} \times \mathcal{J} \xrightarrow{p_2} \mathcal{J}.$$

因为 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 是 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中的单射对象, 所以对忠实映射 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, 存在 1- 映射 $G'_1: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{I}$, $G'_2: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{J}$ 和 2- 映射

$$h_1: G'_1 \circ F \Rightarrow G_1, \quad h_2: G'_2 \circ F \Rightarrow G_2.$$

任给 $A \in \text{obj}(\mathcal{A})$, 可定义 1- 映射 $G': \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{I} \times \mathcal{J} = G' = (i_1 G'_1, i_2 G'_2)$ 和 2- 映射 $h: G' \circ F \Rightarrow G: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I} \times \mathcal{J}$ 为复合映射

$$\begin{aligned} h_A: G'F(A) &= (i_1 G'_1, i_2 G'_2)(F(A)) = (i_1 G'_1 F(A), i_2 G'_2 F(A)) \\ &\simeq (G'_1 F(A), G'_2 F(A)) \xrightarrow{((h_1)_A, (h_2)_A)} (G_1(A), G_2(A)) = G(A). \end{aligned}$$

因此 $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ 是 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中的单射对象.

引理 3 令 $(F, \varphi, G): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 是 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中的一个扩张, $(\mathcal{I}, L, \alpha)$ ($\mathcal{J}, N, \beta$) 分别是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{C}$ 的单射分解. 则存在 $\mathcal{B}$ 的单射分解 $(\mathcal{K}, M, \gamma)$ 使得 $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J}$ 构成 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中的 2- 链复形的扩张.

证明 我们将从下面几步具体构造 $\mathcal{B}$ 的单射分解 $(\mathcal{K}, M, \gamma)$.

第一步, 因为 $\mathcal{I}_0$ 是单射对象, 对忠实映射 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 和 1- 映射 $L_0: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I}_0$, 都存在 1- 映射 $\overline{L}_0: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{I}_0$ 和 2- 映射 $h_0: \overline{L}_0 \circ F \Rightarrow L_0$. 定义

$$\begin{aligned} M_0: \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{I}_0 \times \mathcal{J}_0 \\ B &\mapsto M_0(B) = (\overline{L}_0(B), N_0 G(B)), \\ (B_1) &\xrightarrow{g} (B_2) \mapsto (\overline{L}_0(g), N_0 G(g)). \end{aligned}$$

下面说明 M_0 是单的. 任给 $\mathcal{B}$ 中的两个映射 $g_1, g_2: B_1 \rightarrow B_2$ 满足

$$M_0(g_1) = M_0(g_2): M_0(B_1) \rightarrow M_0(B_2),$$

也就是说,

$$(\overline{L}_0(g_1), N_0 G(g_1)) = (\overline{L}_0(g_2), N_0 G(g_2)),$$

由 $\mathcal{I}_0 \times \mathcal{J}_0$ 的定义, 有 $N_0 G(g_1) = N_0 G(g_2)$. 利用忠实映射 N_0 , 可得 $G(g_1) = G(g_2): G(B_1) \rightarrow G(B_2)$. 从余核的万有性质和扩张的定义可知存在 full 和忠实 1- 映射 $G_0: \text{Coker} F \rightarrow \mathcal{C}$ 和 2- 映射 $\psi_0: G_0 \circ p_F \Rightarrow G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$. 运算之后可得等式

$$G_0 p_F(g_1) = G_0 p_F(g_2): G(B_1) \rightarrow G(B_2),$$

即在 $\text{Coker} F$ 中 $[0, g_1] = [0, g_2]: B_1 \rightarrow B_2$, 因此 $g_1 = g_2$.

进而可得

$$\begin{array}{ccccc}
& & 0 & & \\
& \curvearrowright & \uparrow \varphi & \curvearrowright & \\
A & \xrightarrow{F} & B & \xrightarrow{G} & C \\
L_0 \downarrow & \lambda_0 \Rightarrow & M_0 \downarrow & \mu_0 \Rightarrow & N_0 \downarrow \\
\mathcal{I}_0 & \xrightarrow{i_0} & \mathcal{I}_0 \times \mathcal{J}_0 & \xrightarrow{p_0} & \mathcal{J}_0 \\
& \curvearrowleft & \downarrow \text{id} & \curvearrowleft & \\
& & 0 & &
\end{array}$$

是 $(\mathcal{R}\text{-}2\text{-模})$ 中的扩张, 其中 $\lambda_0 : i_0 \circ L_0 \Rightarrow M_0 \circ F$ 是 h_0 , $\mu_0 : p_0 \circ M_0 \Rightarrow N_0 \circ G$ 是一个恒等映射.

第二步, 利用相对 2-正合的定义, 有忠实 1-映射

$$\overline{L}_1 : \text{Coker} L_0 \rightarrow \mathcal{I}_1, \quad \overline{N}_1 : \text{Coker} N_0 \rightarrow \mathcal{J}_1$$

如下图所示,

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{I}_0 & \xrightarrow{p_{L_0}} & \text{Coker} L_0 & \xrightarrow{\overline{L}_1} & \mathcal{I}_1 \\
i_0 \downarrow & & \downarrow \overline{i}_0 & \dashrightarrow L'_1 & \downarrow i_1 \\
\mathcal{I}_0 \times \mathcal{J}_0 & \xrightarrow{p_{M_0}} & \text{Coker} M_0 & \xrightarrow{\overline{M}_1} & \mathcal{I}_1 \times \mathcal{J}_1 \\
p_0 \downarrow & & \downarrow \overline{p}_0 & & \downarrow p_1 \\
\mathcal{J}_0 & \xrightarrow{p_{N_0}} & \text{Coker} N_0 & \xrightarrow{\overline{N}_1} & \mathcal{J}_1,
\end{array}$$

其中 $\overline{M}_1 : \text{Coker} M_0 \rightarrow \mathcal{I}_1 \times \mathcal{J}_1$ 定义为

$$\overline{M}_1(X_0, Y_0) = \overline{L}'_1(X_0, Y_0), \text{ 对任给 } (X_0, Y_0) \in \text{obj}(\mathcal{I}_0 \times \mathcal{J}_0).$$

从第一步可知, $\overline{M}_1$ 是忠实映射.

因此有复合 1-映射

$$M_1 = \overline{M}_1 \circ p_{M_0} : \mathcal{I}_0 \times \mathcal{J}_0 \rightarrow \mathcal{I}_1 \times \mathcal{J}_1$$

及 2-映射

$$\gamma_1 : M_1 \circ M_0 \Rightarrow \overline{M}_1 p_{M_0} M_0 \Rightarrow \overline{M}_1 \circ 0 \Rightarrow 0$$

使得

$$\begin{array}{ccccc}
& & 0 & & \\
& \curvearrowright & \uparrow \text{id} & \curvearrowright & \\
\mathcal{I}_1 & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{I}_1 \times \mathcal{J}_1 & \xrightarrow{p_1} & \mathcal{J}_1 \\
L_1 \uparrow & \lambda_1 \Rightarrow & M_1 \uparrow & \mu_1 \Rightarrow & N_1 \uparrow \\
\mathcal{I}_0 & \xrightarrow{i_0} & \mathcal{I}_0 \times \mathcal{J}_0 & \xrightarrow{p_0} & \mathcal{J}_0 \\
& \curvearrowleft & \downarrow \text{id} & \curvearrowleft & \\
& & 0 & &
\end{array}$$

是 $(\mathcal{R}\text{-}2\text{-模})$ 中的扩张之间的映射, 其中 λ_1 和 μ_1 可按第一步的方法给出.

第三步, 利用相对 2-正和的定义, 有忠实 1-映射

$$\overline{L}_2 : \text{Coker}(\alpha_1, L_1) \rightarrow \mathcal{I}_2 \quad \text{和} \quad \overline{N}_2 : \text{Coker}(\beta_1, N_1) \rightarrow \mathcal{J}_2,$$

如下图所示

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{I}_1 & \xrightarrow{p(\alpha_1, L_1)} & \text{Coker}(\alpha_1, L_1) & \xrightarrow{\overline{L}_2} & \mathcal{I}_2 \\
 i_1 \downarrow & & \downarrow \overline{i}_1 & \nearrow & \downarrow i_2 \\
 \mathcal{I}_1 \times \mathcal{J}_1 & \xrightarrow{p(\gamma_1, M_1)} & \text{Coker}(\gamma_1, M_1) & \xrightarrow{\overline{M}_2} & \mathcal{I}_2 \times \mathcal{J}_2 \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow \overline{p}_1 & & \downarrow p_2 \\
 \mathcal{J}_1 & \xrightarrow{p(\beta_1, N_1)} & \text{Coker}(\beta_1, N_1) & \xrightarrow{\overline{N}_2} & \mathcal{J}_2
 \end{array}$$

其中 $\overline{M}_2 : \text{Coker}(\gamma_1, M_1) \rightarrow \mathcal{I}_2 \times \mathcal{J}_2$ 可按第二步的方法给出, 并且易知它是忠实的.

因此有复合 1- 映射

$$M_2 = \overline{M}_2 \circ p_{(\gamma_1, M_1)} : \mathcal{I}_1 \times \mathcal{J}_1 \rightarrow \mathcal{I}_2 \times \mathcal{J}_2$$

和 2- 映射

$$\gamma_2 : M_2 \circ M_1 \Rightarrow \overline{M}_2 \circ 0 \Rightarrow 0$$

使得

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 & \searrow & \text{id} \uparrow & \nearrow & \\
 \mathcal{I}_2 & \xrightarrow{i_2} & \mathcal{I}_2 \times \mathcal{J}_2 & \xrightarrow{p_2} & \mathcal{J}_2 \\
 L_2 \uparrow & \lambda_2 \Rightarrow & M_2 \uparrow & \mu_2 \Rightarrow & N_2 \uparrow \\
 \mathcal{I}_1 & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{I}_1 \times \mathcal{J}_1 & \xrightarrow{p_1} & \mathcal{J}_1 \\
 & \nearrow & \text{id} \downarrow & \searrow & \\
 & & 0 & &
 \end{array}$$

是 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中扩张之间的映射, 其中 λ_2 和 μ_2 可按第一步的方法给出.

按照这个步骤一直做下去, 可得 2- 上链复形 $(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, M, \gamma)$. 这个 2- 上链复形是由 $\mathcal{R}$ -2- 模的积构成的. 显然, 它在每一点处都是相对 2- 正和的并且 $(i, \text{id}, p) : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ 是 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中的一个扩张.

由以上证明可知, 对所有 $n \geq 0$, $\mathcal{K}_n$ 是单射对象. □

利用 $\mathcal{R}$ -2- 模的 (bi) 积的万有性质以及加法 2- 函子的性质 [7], 可得下面的引理

引理 4 令 $T : (\mathcal{R}\text{-2- 模}) \rightarrow (\mathcal{S}\text{-2-Mod})$ 是一个加法严格 2- 函子, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 ($\mathcal{R}$ -2- 模) 中的对象. 则有 $T(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ 与 $T(\mathcal{A}) \times T(\mathcal{B})$ 在 ($\mathcal{S}$ -2-Mod) 中是等价的.

定理 2 的证明. 首先设 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I}$ 和 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{J}$ 分别是 $\mathcal{R}$ -2- 模 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{C}$ 的单射分解. 利用引理 2 和引理 3, 存在 $\mathcal{B}$ 的单射分解 $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{I} \times \mathcal{J}$, 进而得到单射分解之间的扩张 $\mathcal{I} \xrightarrow{i} \mathcal{I} \times \mathcal{J} \xrightarrow{p} \mathcal{J}$. 再利用引理 4, 可得 2- 上链复形之间的扩张

$$T(\mathcal{I}) \xrightarrow{T(i)} T(\mathcal{I} \times \mathcal{J}) \xrightarrow{T(p)} T(\mathcal{J}).$$

按照参考文献 [7, 13] 中的结论, 长序列

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & \searrow & \uparrow \mathcal{R}^n T(\varphi) & \nearrow & \uparrow \psi_n & \nearrow & \\
 \cdots & \longrightarrow & \mathcal{R}^n T(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathcal{R}^n T(F)} & \mathcal{R}^n T(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\mathcal{R}^n T(G)} & \mathcal{R}^n T(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\Delta_n} & \mathcal{R}^{n+1} T(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathcal{R}^{n+1} T(F)} & \mathcal{R}^{n+1} T(\mathcal{B}) & \longrightarrow \cdots \\
 & & & & \downarrow \Sigma_n & & & & & & & \\
 & & & & 0 & & & & & & &
 \end{array}$$

在每一点处都是 2- 正合的.

致谢 作者对审稿人提出的宝贵建议表示衷心的感谢.

参考文献

- 1 Huang F, Chen S H, Chen W, et al. 2-Modules and the representation of 2-rings. Intern J Pure Appl Math, in press
- 2 del Río A, Martínez-Moreno J, Vitale E M. Chain complexes of symmetric categorical groups. J Pure Appl Algebra, 2005, 196: 279–312
- 3 Huang F, Chen S H, Chen W, et al. Derived 2-functors in (2-SGp). Sci China Math, 2011, 54: 2537–2552
- 4 Huang F, Chen S H, Chen W, et al. Higher dimensional homology algebra IV: Projective resolutions and derived 2-functors in $(\mathcal{R}\text{-}2\text{-Mod})$. ArXiv:1008.3260v1
- 5 Pirashvili T. Projective and injective objects in symmetric categorical groups. ArXiv:hep-th/1007.0121v1
- 6 Pirashvili T. On abelian 2-categories and derived 2-functors. ArXiv:hep-th/1007.4138v2
- 7 Dupont M. Abelian categories in dimension 2. Ph.D. thesis. Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, 2008
- 8 Jibladze M, Pirashvili T. Third Mac Lane cohomology via categorical rings. J Homotopy Relat Struct, 2007, 2: 187–216
- 9 Gelfand S, Manin Y. Methods of Homological Algebra. New York: Springer, 1996
- 10 Kashiwara M, Schapira P. Categories and Sheaves. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften vol. 332. New York: Springer-Verlag, 2006
- 11 Kontsevich M. Homological Algebra of Mirror Symmetry. In: International Congress of Mathematicians, Zürich 1994. Boston: Birkhäuser, 1995
- 12 Weibel C. An intruction to Homological Algebra. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 13 Bourn D, Vitale E M. Extensions of symmetric cat-groups. Homology Homotopy Appl, 2002, 4: 103–162
- 14 Baues H J, Jibladze M. Secondary derived functors and the Adams spectral sequence. Topology, 2006, 45: 295–324
- 15 Huang F, Chen S H, Chen W, et al. Higher dimensional homology algebra II: Projectivity. ArXiv:1006.4677v1.
- 16 Kasangian S, Vitale E M. Factorization systems for symmetric cat-groups. Theory Appl Categ, 2000, 7: 47–70

Injective resolutions and derived 2-functors in $(\mathcal{R}\text{-}2\text{-Mod})$

HUANG Fang, CHEN ShaoHan, CHEN Wei & ZHENG ZhuJun

Abstract In this paper, we will construct the injective resolution of any $\mathcal{R}$ -2-module, define the right derived 2-functor, and give some related properties of the derived 2-functor in $(\mathcal{R}\text{-}2\text{-Mod})$.

Keywords: $\mathcal{R}$ -2-module, injective resolution, right derived 2-functor

MSC(2000): 20G20, 16B50

doi: 10.1360/012010-840