不确定性结构全局灵敏度分析方法概述

肖思男, 吕震宙*, 王薇

西北工业大学航空学院, 西安 710072

*联系人, E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn

收稿日期: 2016-12-13; 接受日期: 2017-02-07; 网络出版日期: 2017-07-03

国家自然科学基金(编号: 51475370)和中央高校科研业务费(编号: 3102015BJ(II)CG009)资助项目

摘要 本文主要回顾了基于概率描述的不确定性结构全局灵敏度分析的一些常用方法. 根据结构输出响应的个数, 可以将全局灵敏度分析分为单输出全局灵敏度分析和多输出全局灵敏度分析. 单输出全局灵敏度分析已经发展得比较成熟, 根据不确定性度量方式的不同(方差、概率密度函数、累积分布函数等), 已经得到了多种不同的单输出全局灵敏度指标(方差灵敏度分析、矩独立灵敏度分析等). 多输出全局灵敏度分析是在单输出全局灵敏度分析的基础上发展而来的, 它主要是考虑输入变量对多个输出响应整体不确定性的影响. 多输出全局灵敏度分析需要考虑不同输出之间的相关性, 相较于单输出全局灵敏度分析更为复杂. 通过对各种全局灵敏度分析方法的原理进行比较以及算例分析, 得到了各种方法的特点及不足.

关键词 不确定性, 全局灵敏度分析, 单输出响应, 多输出响应

PACS: 02.50.-r, 02.60.Cb, 02.50.Sk, 02.70.-c

1 引言

随着工程结构系统的日益复杂化以及数值计算方法和计算机软硬件的飞速发展, 计算模型越来越多地被用以代替实际的工程结构及物理实验进行模拟和预测结构系统的实际行为. 在很多情况下, 模型中的一些输入参数无法完全确定. 例如, 由于对实际结构系统认知的不全面以及结构本身的一些可变性, 使得无法准确得到结构系统的边界条件、初始条件以及结构的物理属性等. 不确定性的存在会导致模型输出响应的不确定性, 从而导致无法准确预测结构系统的实际行为. 不确定性的表征方式包含概率方法及非

概率方法, 概率方法主要采用概率密度函数以及各阶统计矩来描述不确定性, 它具有完整的数学理论体系, 已经发展得很成熟, 并且得到了广泛的应用, 常用于描述随机不确定性(客观存在的不确定性, 不可缩减). 非概率方法常用于描述认知不确定性(由于认知水平的局限而造成的, 可缩减), 常用的有模糊理论^[1,2]、凸集模型理论^[3,4]、证据理论^[5,6]等, 近些年来也得到了许多学者的关注与应用^[7-11]. 在模糊理论中, 使用隶属度函数描述输入变量的不确定性, 适合于描述基于专家意见得到的不确定性参数^[2]. 对于实际中较为复杂的工程问题, 往往只能获得不确定性变量的上下界限, 凸集模型的建立只需要不确定事件集合的界限, 因此

引用格式: 肖思男, 吕震宙, 王薇. 不确定性结构全局灵敏度分析方法概述. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 014601
Xiao S N, Lv Z Z, Wang W. A review of global sensitivity analysis for uncertainty structure (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2018, 48: 014601, doi: 10.1360/SSPMA2016-00516

能够有效地处理这种情况^[11,12]. 证据理论是对经典概率理论的扩展, 能够对各种不完全信息、不确定信息甚至冲突信息进行合理描述和处理, 较好地符合了人的思维习惯^[12]. 本文主要针对采用概率方法来描述的随机不确定性进行分析.

不确定性分析^[13,14]可以帮助人们很好地量化模型输出响应的不确定性, 从而可以得到模型预测值的置信度. 如果能够确定影响模型输出响应不确定性的主要因素, 就可以通过控制这些主要因素以有效地降低模型输出响应的不确定性, 提高模型预测值的置信度, 然而不确定性分析无法实现这一目标. 为了解决这一问题, 人们提出了灵敏度分析, 其目的是探究模型输出不确定性向输入不确定性的分配问题^[15,16], 即探究模型输出不确定性的来源. 通过灵敏度分析, 可以根据模型输入变量对输出响应不确定性的贡献大小, 对输入变量进行重要性排序, 从而可以通过减小重要输入变量的不确定性, 以最小的代价减小模型输出响应的不确定性, 提高模型预测的稳健性. 另外, 通过给不重要输入变量设定一个确定值, 可以达到降低输入变量维数的目的, 同时还可以在结构系统不确定性优化过程中减少设计参数的数量, 以提高优化效率.

全局灵敏度分析是灵敏度分析中应用最为广泛的一种, 它能够衡量模型输入变量的不确定性在其整个分布区域内对输出响应的不确定性的影响. 常用的全局灵敏度分析方法主要有基本效应法^[17-22]、导数法^[23-28]、方差灵敏度分析法^[29-34]、矩独立灵敏度分析法^[35-40]、基于失效概率的灵敏度分析^[41,42]. 基本效应法通过基本效应(Elementary Effect)遍历输入变量空间, 进而探究模型输入变量在其分布区域变化时对模型输出响应的平均影响, 其中基本效应定义为模型输出响应相对于输入变量的差商. 基本效应法适用于维数较高且计算量较大的模型, 它的计算量随着输入变量维数的增加而线性增加^[17]. 导数法采用模型输出响应对输入变量的偏导数的平方的期望来衡量模型输入变量的相对重要性. 基本效应法中的基本效应可以看作是近似的偏导数, 因此这两种方法的物理意义相似. 对于非线性程度较低的模型, 导数法的计算效率较高, 然而对于非线性程度较高的模型, 导数法的计算代价会过高^[25]. 方差灵敏度分析法是应用最为广泛的一种灵敏度分析方法, 采用方差来衡量模型输入变量和输出响应的不确定性, 通过衡量模型输入变量方

差对输出响应方差的贡献程度来衡量输入变量的重要程度. 相比前两种全局灵敏度分析方法, 方差灵敏度分析法的计算代价过高. 由于方差只是随机变量的一个概率统计特征, 采用方差来描述模型输入和输出的不确定性在很多情况下是不充分的, 因此研究者又相继提出了采用概率密度函数、累积分布函数及特征函数等来完整地描述模型输入及输出的不确定性, 从而得到相应的矩独立灵敏度指标^[35,36,39,40]. 矩独立灵敏度分析法通过衡量模型输入变量的不确定性对输出响应的概率密度函数(累积分布函数、特征函数)的平均影响来确定输入变量的相对重要性, 相较于方差灵敏度分析法, 矩独立灵敏度分析法不仅能够更全面地衡量模型输入变量的相对重要性, 而且对于模型输入变量和输出响应的单调变换具有不变性, 因此对于模型输出响应分布区间跨度较大的情况, 可通过合理的单调变换来求得相应的灵敏度指标^[37,43].

以上提到的全局灵敏度分析方法主要针对具有单个输出的模型, 然而在实际的工程应用中, 往往同时关注模型的多个输出响应, 尤其是在多目标优化设计当中. 针对具有多个输出响应的模型进行灵敏度分析, 最直接的方法是针对每一个输出响应应用上面所提到的灵敏度分析方法进行一次灵敏度分析. 然而这种方法仅是对传统的全局灵敏度分析方法的重复, 且忽略了模型各个输出响应之间的相互关系. Campbell等人^[44]指出, 仅针对每一个模型输出响应进行单独的灵敏度分析或是对模型输出响应的特定函数进行灵敏度分析不够充分. Garcia-Cabrejo和Valocchi^[45]指出, 如果各个模型输出响应之间存在强相关性, 对每一个模型输出响应进行单独的灵敏度分析会造成冗余, 而且也很难解释这些灵敏度分析结果. 因此, Lamboni等人^[46]建议应对模型的多个输出响应这一整体进行灵敏度分析, 并且需要发展新的准则和方法. Campbell等人^[44]提出了一种进行多输出灵敏度分析的方法, 即用一组合适的基函数对模型输出响应进行展开, 对其中包含较多原始输出响应信息的成分进行灵敏度分析. 根据这一思想, Lamboni等人^[46]采用主成分分析对模型的多个输出响应进行分解, 进而采用方差灵敏度分析法对包含原始模型输出响应大部分方差的主成分进行灵敏度分析, 得到了针对多个输出响应整体的灵敏度指标. Gamboa等人^[47]对传统的方差灵敏度分析方法进行扩展, 提出了采用协方差分解的方法进行多输

出灵敏度分析. 这两种方法都采用方差来描述模型输入和输出的不确定性, 在很多情况下不够充分. 崔利杰等人^[48]针对传统的矩独立灵敏度指标进行扩展, 采用多个输出响应的联合概率密度函数来描述其不确定性, 得到了针对多输出模型的基于联合概率密度函数的矩独立灵敏度指标. 然而该方法需要求解模型多个输出响应的联合概率密度函数, 求解过程比较困难. 为此, Li等人^[49]采用概率积分转换的方法对多个输出的联合累积分布函数进行转换, 得到了针对多输出模型的基于概率积分转换的矩独立灵敏度指标. 除此之外, 王飞^[50]采用基于空间距离的方法来进行多输出模型的全局灵敏度分析, 当所用的空间距离为欧氏距离时, 所得到的灵敏度指标与基于协方差分解^[47]的灵敏度指标一致. 在实际工程中, 还会常遇到输出响应随时间变化的模型. 对于这类问题, 在实际处理中经常对时变输出响应进行离散化, 进而可以将不同时刻的输出响应看作一般意义下的多个输出响应, 采用以上所提到的多输出灵敏度分析方法进行灵敏度分析.

以上所提及的单输出全局灵敏度分析方法和多输出全局灵敏度分析方法在实际的结构设计当中能够有效地确定各个不确定性因素的相对重要性, 可以为设计人员提供有效的指导意见. 本文主要针对这些常用的全局灵敏度指标进行回顾, 分别从单输出全局灵敏度分析和多输出全局灵敏度分析这两方面进行阐述分析, 并对它们进行比较, 分析它们各自的特点及不足.

2 单输出全局灵敏度分析

假设所分析的结构可以用模型 $Y = g(\mathbf{X})$ 表示, 其中 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为模型的 n 维不确定性输入变量, Y 为所关心的输出响应, g 为模型输出响应与输入变量之间的函数关系(可以是简单的数学表达式, 或是复杂的有限元模型, 还可以是实际的物理试验等). 输入变量 $\mathbf{X}$ 的联合概率密度函数为 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, 当输入变量相互独立时, $\mathbf{X}$ 的联合概率密度函数可以表示为 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$, 其中 $f_{X_i}(x_i)$ 为 X_i 的边缘概率密度函数. 这里主要考虑输入变量独立的情况.

2.1 基本效应灵敏度分析

基本效应法最初是由Morris^[17]提出的, 用于从大

量的影响模型输出响应的基本因素中筛选出重要的影响因素. 针对复杂的模型, 该方法相对于其他方法计算代价较低. 第 i 个输入变量 X_i 的基本效应定义为

$$EE_i = \frac{g(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_i + \Delta_i, \dots, X_n) - g(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\Delta_i}, \quad (1)$$

其中, Δ_i 为输入变量沿 X_i 方向变化的步长, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为输入变量空间内的任一点并且满足 $(\mathbf{X} + \mathbf{e}_i \Delta_i) (i=1, \dots, n)$ 仍然在输入变量空间内, $\mathbf{e}_i$ 为 X_i 方向的单位向量, $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为相应的输出响应值.

式(1)所定义的基本效应 EE_i 仅是一个局部的灵敏度测度. 为了得到一个全局的灵敏的测度, 最初Morris^[17]考虑 EE_i 的分布 F_i , 提出了用 F_i 对应的均值 μ_i 和标准差 σ_i 作为输入变量 X_i 的灵敏度测度. EE_i 表示的是输入变量 X_i 在某一点处的变化对输出响应 Y 的影响, 因此, 均值 μ_i 表示输入变量 X_i 在其整个分布区间内变化时对输出响应 Y 的平均影响, 标准差 σ_i 表示 X_i 与其他变量变化之间的相互影响对输出的影响是线性的还是非线性的. 当所考虑的模型具有非单调性时, 计算所得的一组 EE_i 中可能会同时出现正数和负数, 在这种情况下计算得到的均值 μ_i 会非常小, 直接用 μ_i 来衡量 X_i 的重要性显然不合适. 因此, 最初Morris^[17]提出同时考虑均值 μ_i 和标准差 σ_i 来衡量输入变量 X_i 的重要性. 对于上述情况, 虽然得到的 μ_i 较小, 但 σ_i 值却可能较大, 因而可以认为 X_i 具有较大的重要性. 后来Campolongo等人^[18]提出用基本效应 EE_i 的绝对值的均值 μ_i^* 来衡量输入变量 X_i 的重要性, 从而避免了基本效应可能出现正负抵消的情况. 虽然Morris的方法适用于一般的问题, 但对于具有多个输出的模型却不适用^[18]. 相比较而言, μ_i^* 不仅能够避免基本效应正负抵消的情况, 而且能适用于具有多个输出的模型, 除此之外, μ_i^* 还可以衡量一组输入变量的重要性. Campolongo等人^[18]还指出当方差总指标的计算代价过高时, μ_i^* 可以用来代替方差总指标以降低计算代价.

给定一组基本效应的值, μ_i , σ_i 和 μ_i^* 的估计值如式(2)所示:

$$\mu_i = \frac{\sum_{j=1}^r EE_i^j}{r}, \sigma_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^r (EE_i^j - \mu_i)^2}{r-1}, \mu_i^* = \frac{\sum_{j=1}^r |EE_i^j|}{r}, \quad (2)$$

其中, r 表示基本效应的个数. 计算以上3个指标的关键

是产生 r 个基本效应 EE_i 的样本. 根据式(1)可以看出, 计算一个 EE_i 需要两个样本点, 因此直观的来看, 需要 $2r$ 个样本点来计算式(2)中的指标. 对于一个具有 n 个输入变量的模型, 一共需要 $2rn$ 个样本点. Morris^[17]提出了一种更有效的抽样策略, 该策略的基本过程如下: 首先在输入变量的空间内随机选取一个初始点, 然后给该点的一个坐标值增加或减少一个步长 Δ 作为第2个点, 进而给第2个点的另一个不同的坐标增加或减少一个步长 Δ 作为第3个点, 以此类推, 直至得到第 $n+1$ 个点, 这 $n+1$ 个点组成了一条轨道. 重复该过程可以得到 r 个轨道. 更多的细节可以参考文献[17,51]. 每条轨道上相邻的两个点可以计算每个输入变量的一个基本效应, r 条轨道可以得到每个输入变量的 r 个基本效应. 该方法所需的总的样本点数为 $r(n+1)$. 图1展示了三维输入变量情况下的一条轨道.

上述抽样策略虽然效率有所提高, 但其产生的轨道具有随机性, 往往需要大量的轨道数才能很好地覆盖整个输入变量的空间, 特别是对输入变量较多的情况. 为了解决这一问题, Campolongo等人^[18]提出的一种改进的抽样策略以达到用较少的轨道数来更好地覆盖输入变量空间. 其基本过程如下: 首先产生 M 条不同的轨道(一般取 $M=500-1000$), 然后从中选择覆盖率最大的 r 条轨道(如 $r=10$). 其中, 覆盖率与两条轨道

m 和 l 之间的距离 d_{ml} 有关, d_{ml} 的定义式如下:

$$d_{ml} = \begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \sqrt{\sum_{z=1}^n [X_z^{(i)}(m) - X_z^{(j)}(l)]^2}} & m \neq l, \\ 0 & \text{其他情况,} \end{cases} \quad (3)$$

其中, n 为输入变量的个数, $X_z^{(i)}(m)$ 为第 m 条轨道上第 i 个点的第 z 个坐标. 最终所选择的 r 条轨道满足它们之间的总距离最大(即覆盖率最大), 该总距离定义为

$$D_r = \sqrt{\sum_{m=1}^r \sum_{l=m+1}^r d_{ml}}. \quad (4)$$

Campolongo等人^[18]最初采用枚举的方法来选择最佳的 r 条轨道, 即从 M 条轨道中列举出所有可能的 r 条轨道的组合, 进而从中选取出总距离最大的一组. 这种选择最佳的 r 条轨道的方法效率较低, 特别是对于输入变量较多的情况.

Ruano等人^[52]之后又提出了一种较为高效的方法来选取最佳的 r 条轨道. 该方法的一个缺陷是无法保证所选的轨道达到全局最优, 但至少是局部最优. 该方法的基本过程如下: 首先从 M 条轨道中随机选择一条轨道, 记作 r_1 , 然后从其余的轨道中选出与 r_1 距离最远的一条轨道, 记作 r_2 , 再从剩余的轨道中选择与 r_1 和 r_2 的距离最远的一条轨道, 记作 r_3 , 以此类推, 直至得到 r 条轨道. 该方法的具体细节参见文献[52].

以上的抽样策略都属于轨道抽样方法, 除此之外, Campolongo等人^[21]又提出了一种径向抽样方法. 这种方法产生 r 个区块, 每一个区块包含 $n+1$ 个点, 可以用来计算每一个输入变量的一个基本效应值. 区块的构建过程如下: 首先产生一个基点 a 和一个辅助点 b , 并且将 a 作为区块的第1个点; 然后将 a 的一个坐标分量替换为相应的 b 的坐标分量, 得到区块的第2个点, 如 $(b_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, a_i 和 b_i ($i=1, \dots, n$)分别为 a 和 b 的第 i 个坐标分量; 接着将 a 的另一个坐标分量替换为相应的 b 的坐标分量, 得到区块的第3个点, 如 $(a_1, b_2, a_3, \dots, a_n)$; 以此类推, 直至 a 的最后一个坐标分量被 b 的相应坐标分量所替换, 这样便得到了一个区块. 在每一个区块中, 通过基点 a 和其余每一个点的组合可以分别计算出每一个输入变量的一个基本效应值. 重复以上过程产生 r 个区块就可以得到每个输入变量的 r 个基本效应. 三维情况下的一个区块如图2所示. 为了使所得到的区块能够很好地覆盖输入变量空间, Campolongo等人^[21]采用Sobol'拟随机序列来生成每一

图1 三维空间中的一条轨道
Figure 1 A trajectory in the space of 3-dimension.

图2 三维空间中的一个区块
Figure 2 A block in the space of 3-dimension.

个区块的基点和辅助点. 径向抽样方法计算每一个输入变量的基本效应时采用的是相同的初始点和不同的步长, 而轨道抽样方法采用的是相同的步长和不同的初始点.

之后, Xiao等人^[22]又对径向设计方法进行了改进, 提出了采用相同的初始点和相同的步长来计算每一个输入变量的基本效应. 其基本过程如下: 首先产生基点 $\mathbf{a}$ 和辅助点 $\mathbf{b}$, 计算相应的步长为 $\Delta = \min_{1 \leq i \leq k} |a_i - b_i|$, a_i 和 b_i ($i = 1, \dots, n$) 分别为 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的第 i 个坐标分量; 然后分别将 $\mathbf{a}$ 的第 i ($i = 1, \dots, n$) 个坐标分量变为 $a_i + \Delta \cdot \text{sign}(b_i - a_i)$, $\text{sign}(b_i - a_i) = \begin{cases} 1, & b_i - a_i > 0, \\ -1, & b_i - a_i < 0. \end{cases}$ 如此便得到一个区块, 图3为三维情况下的示例(等步

图3 (网络版彩图)三维空间中的一个等步长区块
Figure 3 (Color online) A block with same step size in the space of 3-dimension.

长). 进一步产生 r 个区块, 便可以计算出每个输入变量的 r 个基本效应. 与之前相同, 采用Sobol'拟随机序列生成每一区块的基点和辅助点, 以使得所得到的区块能够很好地覆盖输入变量空间.

文献^[21,22]通过比较发现, 在相同的轨道数下, 径向抽样方法的准确度在总体上要高于轨道抽样方法, 而且改进的基于相同初始点和相同步长的径向抽样方法的准确度在总体上要高于原始的径向抽样方法.

2.2 基于导数的灵敏度分析

基于导数的灵敏度分析方法是由Sobol'和Kucherenko^[23]所提出的, 该方法的定义与基本效应法类似, 可以看作是基本效应法的扩展, 同时该方法与方差灵敏度分析的总指标存在联系^[23,27]. 假设输入变量空间为 n 维单位超立方体 H^n , 对于输入变量 X_i 的基于导数的灵敏度指标 v_i 定义为

$$v_i = \int_{H^n} \left(\frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial X_i} \right)^2 d\mathbf{X}. \quad (5)$$

文献^[23]指出式(2)中的 μ_i^* 是 $\int_{H^n} |\partial g(\mathbf{X}) / \partial X_i| d\mathbf{X}$ 的近似表达. 从而可以看出, μ_i^* 和 v_i 都是用来描述输入变量 X_i 的变化所引起的输出响应的平均绝对变化.

Sobol'和Kucherenko^[23]不仅提出了式(5), 更重要的是他们得到了 v_i 与方差总指标 S_n 之间的联系. S_n 反映了输入变量 X_i 的不确定性及其与其他变量的交叉项的不确定性对输出响应 Y 的方差的贡献. S_n 越小, 则表明 X_i 越不重要. 方差灵敏度分析方法将在2.3节回顾. Sobol'和Kucherenko得到的 v_i 和 S_n 之间的不等式关系如式(6)所示^[23].

$$S_n \leq \frac{v_i}{\pi^2 V}, \quad (6)$$

其中, V 为模型输出响应 Y 的方差. 方差总指标 S_n 广泛地用于判断输入变量的相对重要性, 已经得到许多研究者的认可, 计算 S_n 需要大量的模型计算次数, 当模型较为复杂时, 计算 S_n 的代价过高. 从式(6)可以看出, $v_i / (\pi^2 V)$ 为 S_n 的上界, 从而越小的 v_i 预示着越小的 S_n . 因此, 根据 v_i 的值可以有效地检测出不重要的输入变量. 当输入变量相互独立且服从正态分布时, v_i 与 S_n 之间的关系为^[23]

$$S_n \leq \frac{\sigma_i^2 v_i}{V}, \quad (7)$$

其中, σ_i^2 为输入变量 X_i 的方差. 对于输入变量服从非均匀及非正态分布的情况, 文献[27]给出了 v_i 与 S_n 之间一般的联系.

文献[24]给出了计算 v_i 的 Monte Carlo 法. 该过程需要得到偏导数 $\partial g(\mathbf{x}) / \partial x_i$ 的 N 个样本, 进而采用样本均值来估计 v_i . 偏导数的计算采用式(8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial X_i} \\ \approx \frac{g(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i + \delta, X_{i+1}, \dots, X_n) - g(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i - \delta, X_{i+1}, \dots, X_n)}{2\delta}. \end{aligned} \quad (8)$$

类似于基本效应法的计算过程, 该法过程中总的模型计算次数为 $N(n+1)$. 除了 Monte Carlo 法之外, Sudret 和 Mai^[26] 又提出采用混沌多项式展开来计算 v_i , 该方法通过对近似原始模型 $Y = g(\mathbf{X})$ 的混沌多项式进行后处理, 能够以较低的代价计算出 v_i . 具体的细节参见文献[26].

基于导数的灵敏度指标 v_i 能够有效地检测出不重要的输入变量, 并且计算代价相比于方差总指标要低. 然而对于高度非线性的模型, 采用 v_i 对输入变量进行排序可能得到错误的结论.

2.3 方差灵敏度分析

方差灵敏度分析方法, 是应用最为广泛的一类灵敏度分析方法, 最初是由 Sobol' 所提出的^[29,30]. 方差灵敏度分析方法主要采用方差来描述模型输入变量以及输出响应的不确定性, 它可以将模型输出响应的方差归因于各个输入变量以及各个输入变量之间的交叉效应. 通过高维模型展开, $Y = g(\mathbf{X})$ 可以表示为

$$\begin{aligned} Y = g(\mathbf{X}) = g_0 + \sum_{i=1}^n g_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_{ij}(X_i, X_j) \\ + \dots + g_{12\dots n,d}(X_1, X_2, \dots, X_d). \end{aligned} \quad (9)$$

Sobol'^[29] 指出, 如果函数 g 平方可积、输入变量相互独立且展开式中每一项均值为 0, 那么展开式中所有项两两相互正交, 并且每一项可以唯一确定, 即 $g_0 = E(Y)$, $g_i = E(Y|X_i) - g_0$, $g_{ij} = E(Y|X_i, X_j) - g_i - g_j - g_0$. 进而给式(9)两边同时取方差可以得到

$$V(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} + \dots + V_{12\dots n,d}, \quad (10)$$

其中, $V_i = V(g_i) = V(E(Y|X_i))$, $V_{ij} = V(g_{ij}) = V(E(Y|X_i, X_j)) - V_i - V_j$.

根据全方差公式可得, $V(E(Y|X_i)) = V(Y) - E(V(Y|X_i))$, 其中, $E(V(Y|X_i))$ 表示当 X_i 可以被确定时, 输出响应的方差 $V(Y)$ 的平均剩余量, 因此, $V(E(Y|X_i))$ 表示 X_i 确定时 $V(Y)$ 的平均减小量. 因此, 一阶偏方差 V_i 衡量了输入变量 X_i 对输出响应方差 $V(Y)$ 的独立贡献, V_i 越大, 表示当 X_i 的不确定性(方差)减小时, 输出响应的方差减小得越多. 二阶偏方差 V_{ij} 表示了输入变量 X_i 和 X_j 之间交叉作用对输出响应方差的贡献. 另一个常用的测度为总偏方差 V_n ^[30], V_n 为式(10)中下标含有 i 的所有项之和, V_n 既包含了输入变量 X_i 对输出响应方差的独立贡献, 又包含了 X_i 与其他变量 $\mathbf{X}_{-i} = (X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ 的交叉作用对输出响应方差的贡献. V_n 还可以通过总方差减去 X_i 对应的一阶偏方差得到, 即 $V_n = V(Y) - V(E(Y|\mathbf{X}_{-i}))$.

通过对 V_i 和 V_n 进行标准化(除以总方差 $V(Y)$)便得到了主效应指标 S_i 和总效应指标 S_n 如式(11)所示:

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{V(E(Y|X_i))}{V(Y)}, \\ S_n &= \frac{V(Y) - V(E(Y|\mathbf{X}_{-i}))}{V(Y)} = \frac{E(V(Y|\mathbf{X}_{-i}))}{V(Y)}. \end{aligned} \quad (11)$$

根据上式可以得到 $0 < S_i \leq S_n < 1$. S_n 与 S_i 之间的差值表示了 X_i 与其他输入变量之间的交叉作用对输出响应的方差的贡献. 如果对于所有的输入变量都满足 $S_n = S_i$, 那么各个输入变量之间没有交叉作用.

计算式(11)中的两个指标的方法主要有 3 类: 蒙特卡罗模拟法^[32-34,53]、傅里叶幅值灵敏度检验(Fourier Amplitude Sensitivity Test, FAST)^[54-59] 以及代理模型法^[60-66]. 蒙特卡罗模拟法通用性强, 得到了许多学者的研究, 下面给出一种比较经典的蒙特卡罗法^[33,51].

首先根据输入变量的联合概率密度函数分别产生两组输入变量 $\mathbf{X}$ 的样本矩阵 A 和 B :

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1i} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2i} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Ni} & \dots & x_{Nn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \cdots & x'_{1i} & \cdots & x'_{1n} \\ x'_{21} & x'_{22} & \cdots & x'_{2i} & \cdots & x'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x'_{N1} & x'_{N2} & \cdots & x'_{Ni} & \cdots & x'_{Nn} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

A 和 B 的每一行表示输入变量的一个样本. 然后通过将 A 中的第 i 列替换为 B 的第 i 列得到矩阵 C_i , 即

$$C_i = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x'_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x'_{2i} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x'_{Ni} & \cdots & x_{Nn} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

进而分别计算矩阵 A , B 和 C_i 所对应的模型输出响应值, 即

$$y_A = g(A), \quad y_B = g(B), \quad y_{C_i} = g(C_i). \quad (14)$$

从而可以采用式(15)计算 S_i 和 S_{Ti} :

$$S_i = \frac{(1/N) \sum_{j=1}^N y_A^j y_{C_i}^j - g_0^2}{(1/N) \sum_{j=1}^N (y_A^j)^2 - g_0^2}, \quad (15)$$

$$S_{Ti} = 1 - \frac{(1/N) \sum_{j=1}^N y_B^j y_{C_i}^j - g_0^2}{(1/N) \sum_{j=1}^N (y_A^j)^2 - g_0^2}.$$

以上过程需要计算矩阵 A , B 所对应的输出响应以及 n 个 $C_i (i=1, \dots, n)$ 对应的输出响应, 因此, 模型总的调用次数为 $N(n+2)$. 可以看出, 该方法的计算代价会随着输入变量维数的增加而线性增加, 并且一般情况需要足够多的样本(N 足够大)才能得到收敛的估计值, 因此蒙特卡罗模拟法的计算代价较高.

传统的FAST方法是由Cukier等人^[54,55]提出的, 该方法的提出要早于方差灵敏度指标. 后来Saltelli等人^[57]指出, FAST方法所求得的统计量与主效应指标是一致的, 并且将传统的FAST方法进行扩展, 使其也能计算总效应指标. FAST方法首先在输入空间的每一维构造一条曲线, 并在该曲线上选取 N 个点, 以不同的频率探索每一维空间, 最后计算模型输出在每一频率及其高阶谐波上的傅里叶幅值, 由这些幅值即可求得方差灵敏度指标. 传统的傅里叶幅值灵敏度检验法通过一种较为复杂的算法为每一维输入变量分配一特定频率, 以

使得这些频率的高阶谐波不产生干涉, 同时它对样本点数 N 有一个最低要求, 且随着输入变量维数的增加, 样本数也急剧增加. 为了克服这些缺点, 文献^[58]中提出了一种随机平衡设计(Random Balance Design), 该方法采用频率1探索每一维空间, 避免了为每一维输入变量分配特定的频率, 并且计算代价得到了降低.

代理模型法的基本思想是构造显式的表达形式简单的数学函数(代理模型)逼近原始的模型, 然后基于代理模型计算方差灵敏度指标. 常用的代理模型法有多项式混沌展开^[60-62]、贝叶斯方法^[63]、态相关参数法^[64]、神经网络法^[65]、稀疏网格插值法^[66]以及低秩张量逼近^[67]等方法. 代理模型方法能够有效地降低方差灵敏度指标的计算代价, 因此常被用于模型计算代价较高的情况. 一般情况下, 在构造出代理模型后, 常采用蒙特卡罗法来估计方差灵敏度指标. 多项式混沌展开法与此不同, 它通过对构造的混沌多项式进行后处理来计算方差灵敏度指标, 可以根据构造的混沌多项式得到方差灵敏度的显式表达式, 因此其计算效率相比于其他代理模型方法更高. 代理模型法估计方差灵敏度指标的前提是所构造的代理模型能够准确地逼近原始的模型, 当模型较为复杂时, 可能无法得到能够精确逼近原始模型的代理模型, 此时将无法得到准确地方方差灵敏度估计值.

2.4 矩独立灵敏度分析

矩独立灵敏度分析方法的提出是考虑到用方差来描述模型输入变量和输出响应的不确定性不够充分. Borgonovo^[36]首先考虑通过输入变量的不确定性对输出响应的概率密度函数的影响来度量输入变量的重要性. 设输出响应 Y 的概率密度函数为 $f_Y(y)$, 当固定某一输入变量 X_i 时, Y 的条件概率密度函数为 $f_{Y|X_i}(y)$. $f_Y(y)$ 与 $f_{Y|X_i}(y)$ 之间的差异可以通过式(16)来度量:

$$s(X_i) = \int \left| f_Y(y) - f_{Y|X_i}(y) \right| dy, \quad (16)$$

$s(X_i)$ 仅为输入变量 X_i 的函数, 因此对其求期望可得

$$E_{X_i}[s(X_i)] = \int \left[\int \left| f_Y(y) - f_{Y|X_i}(y) \right| dy \right] f_{X_i}(x_i) dx_i. \quad (17)$$

上式反映了输入变量 X_i 在其分布区域内随机取值时对输出响应的概率密度函数的平均影响. Borgonovo定义的输入变量 X_i 对输出响应 Y 的矩独立灵敏度指标为

$$\delta_i = \frac{1}{2} E_{X_i} [s(X_i)]. \quad (18)$$

式(18)中的系数 $\frac{1}{2}$ 是为了保证 $\delta_i \in [0, 1]$. 采用 δ_i 来度量输入变量的重要性并不依赖于某一特定的矩, 因此称之为矩独立灵敏度指标. Plischke等人^[37]指出 δ_i 可以写成如下形式:

$$\delta_i = \frac{1}{2} \iint |f_{Y, X_i}(y, x_i) - f_Y(y) f_{X_i}(x_i)| dy dx_i, \quad (19)$$

其中, $f_{Y, X_i}(y, x_i)$ 为输出响应 Y 与输入变量 X_i 的联合概率密度函数. 根据式(19)可以看出 δ_i 可以用来表示输出响应 Y 与输入变量 X_i 之间的相关性. Borgonovo在文献^[36]给出了 δ_i 的一些性质如下:

$$0 \leq \delta_i \leq 1;$$

$$\delta_i = 0, \text{ 当且仅当 } Y \text{ 与 } X_i \text{ 相互独立};$$

$$\delta_{1,2,\dots,n} = 1, \text{ 即所有输入变量对输出响应 } Y \text{ 的重要度为 } 1;$$

$$\delta_{ij} = \delta_i, \text{ 当且仅当 } Y \text{ 与 } X_i \text{ 相关, 与 } X_j \text{ 相互独立};$$

$$\delta_i \leq \delta_{ij} \leq \delta_i + \delta_{j|}, \text{ 其中}$$

$$\delta_{j|} = \frac{1}{2} E_{X_i X_j} \left[\int |f_{Y|X_i}(y) - f_{Y|X_j}(y)| dy \right].$$

后来, Liu和Homma^[39]提出了一种基于累积分布函数的矩独立灵敏度指标, 该指标通过输入变量对输出响应的累积分布函数的影响来衡量输入变量的相对重要性. 该指标定义为

$$\delta_i^{\text{CDF}} = \frac{E_{X_i} \left(\int |F_Y(y) - F_{Y|X_i}(y)| dy \right)}{|E(Y)|}, \quad (20)$$

其中, $F_Y(y)$ 为输出响应 Y 的累积分布函数, $F_{Y|X_i}(y)$ 为输出响应 Y 相对于 X_i 的条件累积分布函数. 式(20)中的分母 $|E(Y)|$ 是为了将该指标进行标准化. Liu和Homma^[39]指出, 相比较于 δ_i , δ_i^{CDF} 所包含的信息量更多. 要准确地估计概率密度函数是比较困难的, 主要是由于求解给定点处的密度函数值的收敛速度是很慢的^[68], 并且密度函数的估计问题本身是一个不适定的计算问题^[40,69]. 然而累积分布函数的估计要优于密度函数的估计, 这是 δ_i^{CDF} 相对于 δ_i 的另一个优势, 然而Liu和Homma最初并没有意识到这一点. 后来许鑫^[40]意识到了这一点, 提出了基于特征函数以及矩母函数的矩独立灵敏度指标, 相比较于概率密度函数, 特征函数和矩母函数的估计是适定的. 更多关于基于特征函数以及

矩母函数的矩独立灵敏度指标内容可以参见文献^[40].

在很多情况下, 人们会更关心结构的失效问题, 因此有必要衡量输入变量对结构失效概率的影响, 因而Cui等人^[41]提出了基于失效概率的灵敏度指标. 考虑结构的功能函数为 $Z = G(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 结构的失效概率可以表示为 $P_f = P(G(\mathbf{X}) \leq 0) = \int_F f_Y(y) dy$, F 表示失效域. 当固定某一输入变量 X_i 时, 结构的条件失效概率为 $P_{f|X_i} = P(G(\mathbf{X}) \leq 0) = \int_F f_{Y|X_i}(y) dy$. P_f 与 $P_{f|X_i}$ 之间的差异可以表示固定 X_i 对结构失效概率的影响. Cui等人^[41]采用式(21)来描述 X_i 取不同值时对结构失效概率的平均影响.

$$\delta_i^P = \frac{1}{2} E_{X_i} \left(|P_f - P_{f|X_i}| \right) = \frac{1}{2} \int |P_f - P_{f|X_i}| f_{X_i}(x_i) dx_i. \quad (21)$$

式(21)即为输入变量对结构失效概率的灵敏度指标. 后来, Li等人^[42]对式(21)进行修改, 用平方运算代替绝对值运算, 得到如式(22)所示的基于失效概率的灵敏度指标.

$$\bar{\delta}_i^P = E_{X_i} \left(P_f - P_{f|X_i} \right)^2 = \int \left(P_f - P_{f|X_i} \right)^2 f_{X_i}(x_i) dx_i. \quad (22)$$

式(22)的优势在于它可以变换为方差灵敏度指标的形式, 从而能够更方便地计算.

结构的失效概率还可以表示为

$$\begin{aligned} P_f &= P(G(\mathbf{X}) \leq 0) \\ &= \int \cdots \int_F f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int \cdots \int_{R^n} I_F f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= E(I_F), \end{aligned} \quad (23)$$

其中, $I_F = \begin{cases} 1 & G(\mathbf{X}) \leq 0, \\ 0 & G(\mathbf{X}) > 0. \end{cases}$ 表示失效域指示函数, R^n 表示 n 维输入变量空间. 类似于式(23), 条件失效概率可以表示为

$$P_{f|X_i} = E(I_F | X_i), \quad (24)$$

其中, $I_F | X_i = \begin{cases} 1 & G_{X_i}(\mathbf{X}) \leq 0, \\ 0 & G_{X_i}(\mathbf{X}) > 0. \end{cases}$ 表示当 X_i 取特定值时的条件失效域指示函数. 将式(23)和(24)代入式(22)可得

$$\bar{\delta}_i^P = E_{X_i} (E(I_F) - E(I_F | X_i))^2 = V(E(I_F | X_i)). \quad (25)$$

从而将基于失效概率的灵敏度指标 $\bar{\delta}_i^P$ 表示为方差灵敏度指标的形式, 进而可以采用计算方差灵敏度指标的方法较为高效的计算 $\bar{\delta}_i^P$.

与方差灵敏度分析方法相比, 矩独立灵敏度分析方法所考虑的信息更多, 能够更加全面地衡量输入变量的重要性. 然而矩独立灵敏度指标的计算相对比较困难, 在实际的应用中, 方差灵敏度分析方法要比矩独立灵敏度分析方法更加方便.

2.5 算例分析

Ishigami 函数常用于比较不同的灵敏度分析方法^[30,35,36], 它的数学表达式为

$$Y = g(X) = \sin(X_1) + a\sin^2(X_2) + bX_3^4\sin(X_1), \quad (26)$$

其中, 输入变量 X_1 , X_2 和 X_3 相互独立且均服从 $[-\pi, \pi]$ 上的均匀分布. 常数 a 和 b 的取值分别为5和0.1. 表1列出了不同的全局灵敏度分析方法所得到的结果.

从表1可以看出, X_2 和 X_3 所对应的 μ_i 值很小, 然而相应的 σ_i 却较大, 说明 X_2 和 X_3 对输出响应仍然存在较大的影响, 这也可以从 X_2 和 X_3 所对应的 μ_i^* 的值看出来. 根据 μ_i^* 可以得到输入变量的相对重要性排序为 $X_2 > X_3 > X_1$. 根据 v_i 所得到的输入变量的相对重要性排序与根据 μ_i^* 得到的排序相同, 这是由于 μ_i^* 与 v_i 所表示的物理意义相似. 比较 S_i 和 $S_{\bar{n}}$ 可以发现, X_1 对输出响应的方差既存在独立贡献, 又存在交叉贡献, X_2 对输出响应的方差仅存在独立贡献, 而 X_3 对输出响应的方差仅存在交叉贡献, 这与响应函数的形式是一致的. 根据 $S_{\bar{n}}$ 可以得到输入变量的相对重要性排序为 $X_1 > X_3 > X_2$. 根据 δ_i 和 δ_i^{CDF} 所得到的输入变量的相对重要性排序分别为 $X_2 > X_1 > X_3$ 和 $X_1 > X_2 > X_3$, 虽然 δ_i 与 δ_i^{CDF} 均为矩独立的全局灵敏度指标, 然而它们所包含的信息量是不同的(δ_i^{CDF} 包含了更多信息), 这也是导致它们所得到的输入变量重要性排序不同的主要原因.

总的来看, 不同的全局灵敏度指标所得到的输入变量的重要性排序是有差异的, 这主要是它们采用不

同的方式来描述输入变量以及输出响应的不确定性. 相对而言, 矩独立灵敏度指标所包含的不确定性信息最为全面, 但是其计算比较困难; 基于方差的灵敏度指标能够反映出响应函数的构成形式, 并且计算较为方便, 已经得到了许多学者的认可; 基于导数的灵敏度指标所表达的物理意义更明确, 并且能够得到方差指标的上界, 常用来判读不重要的输入变量. 基本效应灵敏度指标是基于导数的灵敏度指标的近似表达, 其计算效率最高, 常用来对输入变量的相对重要性进行初步估计.

3 多输出全局灵敏度分析

在实际的工程结构当中, 往往存在多个输出响应. 此时仅针对每个输出响应进行灵敏度分析是不充分的^[44], 需要对多个输出响应这一整体进行灵敏度分析. 假设所分析的结构可以用模型 $\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$ 表示, 其中 $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ 为模型的 m 维输出响应, 其他与上一节相同.

3.1 方差灵敏度分析

针对具有多个输出响应的模型, Campbell等人^[44]提出了一种基于输出分解的灵敏度分析的策略, 首先将模型的多个输出响应用一组基函数表示, 然后针对展开式中每一项的系数进行灵敏度分析. 基函数的选择是多种多样的, 如多项式基函数、三角基函数、小波基函数等. 但这种方法仍然只是针对展开式中的各项逐一进行灵敏度分析, 而非针对多个输出响应这一整体. 后来Lamboni等人^[46]采用主成分分析对多个输出响应进行展开, 并在这种策略的基础上进行了扩展, 提出了一种广义的灵敏度指标来衡量输入变量对多个输出响应这一整体的相对重要性. 下面先介绍主成

表1 Ishigami函数的灵敏度分析结果

Table 1 Sensitivity analysis results for Ishigami function

输入变量	基本效应法			导数法	方差灵敏度分析		矩独立灵敏度分析	
	μ_i	σ_i	μ_i^*	v_i	S_i	$S_{\bar{n}}$	δ_i	δ_i^{CDF}
X_1	0.148	2.560	1.682	7.725	0.314	0.558	0.33	0.81
X_2	0.033	3.362	3.104	12.49	0.442	0.442	0.39	0.67
X_3	0.030	2.928	1.786	11.02	0.000	0.243	0.28	0.43

分分析. 将输出响应 Y 进行中心化(减去均值), 得到

$$Y^c = Y - \mu_Y, \quad (27)$$

其中, μ_Y 为 Y 的均值向量, Y^c 表示中心化后的输出响应.

然后对输出响应 Y 的协方差矩阵 Σ_Y 进行特征值分解, 即

$$\Sigma_Y = \Gamma \Lambda \Gamma^T, \quad (28)$$

其中, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ 为特征值组成的对角矩阵 ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ 为特征值), $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ 为特征向量矩阵 ($\gamma_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 表示与 λ_i 相对应的相互标准正交的特征向量). 此时中心化后的输出响应 Y^c 可以转换为不相关的变量 H , 即

$$H = Y^c \Gamma, \quad (29)$$

其中, $H = (H_1, H_2, \dots, H_m)$ 为主成分矩阵, 各个主成分之间相互正交. $H_k (k = 1, 2, \dots, m)$ 均值为0, 方差为 λ_k , 即 $V(H_k) = E(H_k^2) = \lambda_k$. 同时还可以得到 $\sum_{k=1}^m \lambda_k = \text{trace}(\Sigma_Y)$. 根据式(29), Y^c 可以用 H 来表示, 即

$$Y^c = H \Gamma', \quad (30)$$

其中, Γ' 为 Γ 的逆矩阵. 此时原始的输出响应可以表示为

$$Y = \mu_Y + H \Gamma'. \quad (31)$$

通常选取包含原始输出响应 Y 大部分方差的前 K 个主成分来近似表示 Y , 即

$$Y = \mu_Y + H_K \Gamma_K', \quad (32)$$

其中, H_K 包含 H 中前 K 个主成分, Γ_K 包含 Γ 中前 K 个特征向量.

Lamboni等人^[46]首先采用方差灵敏度分析的方法针对输出响应 Y 的每一个主成分进行分析, 定义了输入变量 X_i 对于输出响应 Y 的第 k 个主成分的主效应指标和总效应指标分别为

$$S_{i,k} = \frac{V_{i,k}}{V_k}, \quad (33)$$

$$S_{Ti,k} = \frac{\sum_{\omega_i} V_{\omega_i}}{V_k},$$

其中, $V_{i,k}$ 是第 k 个主成分 H_k 的一阶偏方差, $V_k = \lambda_k$ 是 H_k 的方差, ω_i 包含了方差分解式(10)中下标含有 i 的所有项. 式(33)所定义的灵敏度指标只能衡量各输入变量对输

出响应 Y 的各个主成分的相对重要性. 为了衡量输入变量对输出响应 Y 整体的影响, Lamboni等人^[46]进一步定义了广义的主效应指标和总效应指标, 即

$$GS_i = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k}{\sum_{l=1}^m \lambda_l} S_{i,k}, \quad (34)$$

$$GS_{Ti} = \sum_{\omega_i} GS_{\omega_i},$$

其中, λ_k 为第 k 个特征值(第 k 个主成分的方差).

根据式(34)可以看出, GS_i 是对 $S_{i,k} (k = 1, \dots, K)$ 的加权平均, 加权系数与相应的特征值成正比. 广义的主效应指标 GS_i 可以衡量输入变量 X_i 对输出响应 Y 前 K 个主成分所组成的整体的独立方差贡献, 而广义的总效应指标可以衡量输入变量 X_i 对输出响应 Y 前 K 个主成分所组成的整体的独立方差贡献以及与其他变量的交叉方差贡献. 由于 GS_i 和 GS_{Ti} 的定义与单输出情况下的方差灵敏度指标类似, 因此计算 GS_i 和 GS_{Ti} 的方法也和前面计算单输出情况下的方差灵敏度指标类似.

后来, Gamboa等人^[47]提出了基于协方差分解的多输出灵敏度分析方法. 首先对多个输出响应分别进行高维模型展开(式(9)), 即

$$Y_r = g_{0,r} + \sum_{i=1}^n g_i(X_i, r) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_{ij}(X_i, X_j, r) + \dots + g_{12\dots n}(X_1, X_2, \dots, X_n, r), \quad r = 1, \dots, m, \quad (35)$$

其中, r 表示第 r 个输出响应.

$$g_{0,r} = E(Y_r),$$

$$g_i(X_i, r) = E(Y_r | X_i) - g_{0,r}, \quad (36)$$

$$g_{ij}(X_i, X_j, r) = E(Y_r | X_i, X_j) - g_i(X_i, r) - g_j(X_j, r) - g_{0,r},$$

$$\dots$$

通过对式(35)两端分别取协方差可以得到

$$C(Y_1, \dots, Y_m) = \sum_{i=1}^n C_i(Y_1, \dots, Y_m) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} C_{i,j}(Y_1, \dots, Y_m) + \dots + C_{1,2,\dots,n}(Y_1, \dots, Y_m). \quad (37)$$

对于单个输出响应的情况, 式(37)将退化为式(10). 由于式(37)中每一项均为矩阵, 无法像式(11)那样定义灵敏度指标, 如果能将矩阵转化为标量, 那么就可以像式(11)那样定义出多个输出响应情况下的灵敏度指标. Gamboa等人^[47]指出可以将协方差矩阵 C 与另一

个矩阵 $\mathbf{M}$ 相乘, 然后再取迹, 从而得到一个标量, 他们还指出将 $\mathbf{M}$ 取为单位矩阵是一个很好的选择, 从而得到式(38):

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\mathbf{C}(Y_1, \dots, Y_m)] &= \sum_{i=1}^n \text{Tr}[\mathbf{C}_i(Y_1, \dots, Y_m)] \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Tr}[\mathbf{C}_{i,j}(Y_1, \dots, Y_m)] \\ &+ \dots + \text{Tr}[\mathbf{C}_{1,2,\dots,n}(Y_1, \dots, Y_m)], \end{aligned} \quad (38)$$

其中, $\text{Tr}[\cdot]$ 表示取迹. 这样, 多个输出响应情况下输入变量 X_i 的主效应指标和总效应指标可以定义为

$$\begin{aligned} S_i^M &= \frac{\text{Tr}[\mathbf{C}_i]}{\text{Tr}[\mathbf{C}]}, \\ S_{Ti}^M &= \frac{\sum_{\omega_i} \text{Tr}[\mathbf{C}_{\omega_i}]}{\text{Tr}[\mathbf{C}]} = \sum_{\omega_i} S_{\omega_i}^M, \end{aligned} \quad (39)$$

其中, ω_i 包含式(38)中所有下标含有 i 的项.

$\text{Tr}[\mathbf{C}]$ 等于所有输出响应 $Y_r (r = 1, \dots, m)$ 的方差之和, 即总的输出方差. $\text{Tr}[\mathbf{C}_i]$ 等于所有输出响应的一阶偏差之和, 从而 S_i^M 可以表示为

$$S_i^M = \frac{\sum_{r=1}^m V(E(Y_r|X_i))}{\sum_{r=1}^m V(Y_r)} = \sum_{r=1}^m \frac{V(Y_r)}{\sum_{j=1}^m V(Y_j)} S_{i,r}, \quad (40)$$

其中, $S_{i,r} = \frac{V(E(Y_r|X_i))}{V(Y_r)}$ 为输入变量 X_i 对于输出响应 Y_r 的主效应指标. 从而可以看出, S_i^M 是对 $S_{i,r} (r = 1, \dots, m)$ 加权平均, 加权系数与每一个输出响应的方差成正比. S_i^M 可以衡量输入变量 X_i 对输出响应 $\mathbf{Y}$ 整体的独立方差贡献, S_{Ti}^M 可以衡量输入变量 X_i 对输出响应 $\mathbf{Y}$ 整体的独立方差贡献以及与其他变量的交叉方差贡献. 计算 S_i^M 与 S_{Ti}^M 的方法与前面计算单输出情况下方差灵敏度指标类似. Garcia-Cabrejo和Valocchi^[45]指出, 当主成分分解得到的前 K 个主成分包含输出响应 $\mathbf{Y}$ 的全部方差时, 式(34)与(39)是等价的.

3.2 矩独立灵敏度分析

同样考虑到用方差来描述模型输入变量和输出响应的不确定性在有些情况下不够充分, 崔利杰等人^[48]通过输入变量对多个输出响应的联合概率密度函数的影响来度量输入变量的相对重要性. 设输出响应 $\mathbf{Y}$ 的联合概率密度函数为 $f_Y(\mathbf{y})$, 当固定某一输入变量 X_i 时, $\mathbf{Y}$ 的条件概率密度函数为 $f_{Y|X_i}(\mathbf{y})$. 类似于单个输出的

情况, $f_Y(\mathbf{y})$ 与 $f_{Y|X_i}(\mathbf{y})$ 之间的差异可以通过以下方式度量:

$$s(X_i) = \int \dots \int |f_Y(\mathbf{y}) - f_{Y|X_i}(\mathbf{y})| d\mathbf{y}, \quad (41)$$

其中, $d\mathbf{y} = dy_1 dy_2 \dots dy_m$. $s(X_i)$ 仅为 X_i 的函数, X_i 对输出响应 $\mathbf{Y}$ 的联合概率密度函数的平均影响可以由 $s(X_i)$ 的数学期望来描述, 即

$$E_{X_i}[s(X_i)] = \int s(X_i) f_{X_i}(x_i) dx_i. \quad (42)$$

为了保证所得到的灵敏度指标值在0-1, 取式(43)作为输入变量 X_i 对输出响应 $\mathbf{Y}$ 整体的矩独立灵敏度指标:

$$\delta_i^M = \frac{1}{2} E_{X_i}[s(X_i)]. \quad (43)$$

式(43)所定义多个输出情况下的矩独立灵敏度指标可以看作是对单个输出情况下的矩独立灵敏度指标式(18)的推广, 因此具有相同的性质.

由于累积分布函数相比于概率密度函数更加容易计算, Li等人^[49]采用联合累积分布函数来描述输入变量和输出响应的不确定性, 进而通过多维概率积分转换的方法得到了新的矩独立灵敏度指标. 下面先介绍概率积分转换的基本内容.

单变量情况下的概率积分转换已经发展得比较完善. 给定一个随机变量 Y , 其相应的累积分布函数为 $F_Y(y)$, Y 的概率积分转换为一个标准均匀分布变量 $V = F_Y(y)$, $V \sim U(0, 1)$. 对于多维随机向量 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$, 其对应的联合累积分布函数为 $F_Y(Y_1, \dots, Y_m)$, $\mathbf{Y}$ 的 m 维概率积分转换为 $V = F_Y(Y_1, \dots, Y_m)$. 随机变量 V 的累积分布函数 $K_V(v)$ 称为 $\mathbf{Y}$ 的概率积分转换分布, 因此, $K_V(v) = P(V \leq F_Y(Y_1, \dots, Y_m))$ 且分布于区间 $[0, 1]$. 与单变量情况不同, 此时 $K_V(v)$ 一般不再是一个标准均匀分布, 这是由于随机向量 $\mathbf{Y}$ 各个分量之间的相关性造成的, 仅当 $\mathbf{Y}$ 的任意分量两两之间的相关系数为-1或1时, $K_V(v)$ 才是一个标准均匀分布^[70]. 可以看出, $K_V(v)$ 包含了随机向量 $\mathbf{Y}$ 各个分量之间的相关性信息.

设 $K_V(v) = P(V \leq F_Y(Y_1, \dots, Y_m))$ 为输出响应 $\mathbf{Y}$ 的概率积分转换分布, 当固定某一输入变量 X_i 时, 输出响应 $\mathbf{Y}$ 的条件概率积分转换分布为 $K_{V|X_i}(v) = P(V \leq F_{Y|X_i}(Y_1, \dots, Y_m))$. $K_V(v)$ 与 $K_{V|X_i}(v)$ 之间的差异可以采用式(44)来描述:

$$s'(X_i) = \int_0^1 |K_V(v) - K_{V|X_i}(v)| dv. \quad (44)$$

$s'(X_i)$ 仅为 X_i 的函数, X_i 对输出响应 Y 的概率积分转化分布的平均影响可以由 $s'(X_i)$ 的数学期望来描述, 即

$$E_{X_i}[s'(X_i)] = \int s'(X_i) f_{X_i}(x_i) dx_i. \quad (45)$$

同样为了保证所得到的灵敏度指标值在0-1, 定义下面的灵敏度指标:

$$\eta_i = \frac{1}{2} E_{X_i}[s'(X_i)]. \quad (46)$$

η_i 与 δ_i^M 有类似的性质, 具体参见文献[49]. 与 δ_i^M 相比, η_i 更容易计算.

与单个输出的情况类似, 多个输出情况下的矩独立灵敏度分析方法所考虑的信息更多, 能够更加全面地衡量输入变量的重要性, 然而矩独立灵敏度指标的计算相对比较困难, 在实际的应用中, 多输出的方差灵敏度分析方法要比矩独立灵敏度分析方法更加方便.

3.3 基于空间距离的灵敏度分析

多个输出响应可以构成一个多维的输出空间, 采用多维空间中的距离度量, 可以很好地描述某一输入变量固定前后输出响应某一特征的差异. 输出响应的均值 $E(Y)$ 可以描述输出响应的平均水平. 在多维输出空间中, 当固定某一输入变量 X_i 时, 输出响应的条件均值为 $E(Y|X_i)$. $E(Y)$ 与 $E(Y|X_i)$ 之间的距离 $d^2(E(Y), E(Y|X_i))$ 可以衡量输入变量 X_i 对输出响应 Y 的均值向量的影响. 进一步, 当输入变量 X_i 按照其密度函数取不同值时, $d^2(E(Y), E(Y|X_i))$ 的平均值就可以衡量输入变量 X_i 对输出响应 Y 的均值向量的平均影响, 即 $E_{X_i}(d^2(E(Y), E(Y|X_i)))$, 对其进行标准化, 可以得到基于空间距离的全局灵敏度主指标为

$$S_i^D = \frac{E_{X_i}(d^2(E(Y), E(Y|X_i)))}{E(d^2(Y, E(Y)))}, \quad (47)$$

其中, $E(d^2(Y, E(Y)))$ 表示多维输出空间中某一点 $Y=(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ 偏离输出响应 Y 的均值点 $E(Y) = (E(Y_1), \dots, E(Y_m))$ 的平均距离. S_i^D 越大, 表示当 X_i 的不确定性减小时, 输出响应的均值点偏离原始均值点越远.

首先选择欧氏距离作为空间的距离度量, 则有

$$d^2(E(Y), E(Y|X_i)) = (E(Y) - E(Y|X_i))$$

$$\cdot (E(Y) - E(Y|X_i))^T,$$

$$d^2(Y, E(Y)) = (Y - E(Y))(Y - E(Y))^T. \quad (48)$$

将式(48)代入式(47)可得:

$$\begin{aligned} S_i^D &= \frac{E_{X_i}((E(Y) - E(Y|X_i))(E(Y) - E(Y|X_i))^T)}{E((Y - E(Y))(Y - E(Y))^T)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^m E_{X_i}(E(Y_j) - E(Y_j|X_i))^2}{\sum_{j=1}^m E(Y_j - E(Y_j))^2} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^m V(E(Y_j|X_i))}{\sum_{j=1}^m V(Y_j)}. \end{aligned} \quad (49)$$

根据式(49)可以看出多个输出响应情况下基于欧式距离的全局灵敏度指标与Gamboa等人[47]提出的基于协方差分解的主效应指标一致. 这说明式(49)从多维空间中欧式距离的角度解释了Gamboa等人所提出的多个输出响应情况下全局灵敏度指标的合理性. 根据式(49)还可以得到

$$E((Y - E(Y))(Y - E(Y))^T) = \sum_{j=1}^m V(Y_j), \quad (50)$$

即 $E((Y - E(Y))(Y - E(Y))^T)$ 可以看作是多个输出响应整体的不确定性描述. 同样还可以定义基于空间距离的全局灵敏度总指标:

$$\begin{aligned} S_n^D &= \frac{E(d^2(Y, E(Y))) - E_{X_{-i}}(d^2(E(Y), E(Y|X_{-i})))}{E(d^2(Y, E(Y)))} \\ &= 1 - \frac{E_{X_{-i}}(d^2(E(Y), E(Y|X_{-i})))}{E(d^2(Y, E(Y)))}, \end{aligned} \quad (51)$$

其中, S_n^D 表示输入变量 X_i 之外的其他变量 X_{-i} 的不确定性消除后输出整体不确定性的剩余比例, 它既包含输入变量 X_i 的不确定性对输出响应整体不确定性的独立影响, 还包含输入变量 X_i 与其他变量的交叉作用的不确定性对输出响应整体不确定性的影响.

然而欧式距离有以下3个不足之处: (1) 欧式距离的值与各个输出响应的量纲有关; (2) 欧式距离没有考虑各个输出响应的相对重要性程度; (3) 欧式距离没有考虑各个输出响应间存在的相关性. 这使相应的全局灵敏度指标也存在这些不足. 在实际工程应用中, 可以通过先对各个输出数据进行标准化来消除不同输出响应的量纲对欧式距离的影响. 为了表现各个输出响应不确定性的相对重要性程度, 则可以按实际问

题的具体需要引入具体的权重矩阵来加以解决. 后来王飞^[50]采用加权马氏距离作为空间距离的度量, 进而得到相应全局灵敏度指标. 当采用马氏距离时, 可以得到

$$d_M^2(\mathbf{Y}, \mathbf{E}(\mathbf{Y})) = (\mathbf{Y} - \mathbf{E}(\mathbf{Y})) \times (\text{cov}(\mathbf{Y}))^{-1} \times (\mathbf{Y} - \mathbf{E}(\mathbf{Y}))^T, \quad (52)$$

其中, $\text{cov}(\mathbf{Y})$ 表示输出响应 $\mathbf{Y}$ 的协方差矩阵. 在多维空间中, 马氏距离可以看作是对于欧氏距离的一种加权, 相当于对每一个输出响应按照本身的方差以及与其他输出响应的相关程度, 即协方差矩阵, 进行加权处理, 同时, $(\text{cov}(\mathbf{Y}))^{-1}$ 也标准化了多维输出响应的样本数据. 所以马氏距离同时考虑到了多维输出响应之间相关性和各个输出响应之间不同量纲对于最终距离度量的影响. 但是马氏距离依然没能区分出各个输出响应离散程度的相对重要性, 即使用马氏距离造成了每个输出响应的方差归一化, 忽视了每个输出模式不确定性的相对重要性程度. 为此可以考虑将权重因素引入到马氏距离, 构建新的加权马氏距离. 采用文献^[71]中所提出的利用主成分分析的方法得到的一种权重矩阵, 即

$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{R}(\text{cov}(\mathbf{Y}))^{-1} \mathbf{R} / \text{Tr}^2(\mathbf{R}), \quad (53)$$

其中, $\mathbf{R}$ 表示输出响应 $\mathbf{R}$ 的相关系数矩阵, $\text{Tr}(\mathbf{R})$ 表示 $\mathbf{R}$ 的迹. 为了使权重矩阵 $\mathbf{W}_0$ 中每个权重系数属于区间 $[0, 1]$, 对其进行如下归一化处理得到新的权重矩阵 $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 / \text{sum}(|\mathbf{W}_0|), \quad (54)$$

其中, $\text{sum}(|\mathbf{W}_0|)$ 表示对 $\mathbf{W}_0$ 中所有元素的绝对值求和. 从而得到了如下的加权马氏距离:

$$d_{WM}^2(\mathbf{Y}, \mathbf{E}(\mathbf{Y})) = (\mathbf{Y} - \mathbf{E}(\mathbf{Y})) \mathbf{W} (\mathbf{Y} - \mathbf{E}(\mathbf{Y}))^T. \quad (55)$$

将式(55)代入式(47)可以得到基于加权马氏距离的多输出响应情况下的全局灵敏度主指标:

$$S_i^{DWM} = \frac{E_{X_i}[(\mathbf{E}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}_i) - \mathbf{E}(\mathbf{Y})) \mathbf{W} (\mathbf{E}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}_i) - \mathbf{E}(\mathbf{Y}))^T]}{E[(\mathbf{Y} - \mathbf{E}(\mathbf{Y})) \mathbf{W} (\mathbf{Y} - \mathbf{E}(\mathbf{Y}))^T]}. \quad (56)$$

类似地可以定义多个输出响应情况下基于加权马氏距离的全局灵敏度总指标为

$$S_{\pi}^{DWM} = 1 - \frac{E_{X_i}[(\mathbf{E}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}_i) - \mathbf{E}(\mathbf{Y})) \mathbf{W} (\mathbf{E}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}_i) - \mathbf{E}(\mathbf{Y}))^T]}{E[(\mathbf{Y} - \mathbf{E}(\mathbf{Y})) \mathbf{W} (\mathbf{Y} - \mathbf{E}(\mathbf{Y}))^T]}. \quad (57)$$

在特殊情况下, 基于加权马氏距离的多输出全局灵敏度指标具有如下性质: (1) 在 $m = 1$, 即只有一个输出响应时, 基于加权马氏距离的全局灵敏度指标退化为单个输出响应情况下的基于方差的全局灵敏度指标; (2) 在各个输出响应相互独立的情况下, 基于加权马氏距离多个输出响应情况下的全局灵敏度指标退化为基于欧氏距离多个输出响应情况下的全局灵敏度指标.

3.4 算例分析

考虑如下具有3个输出响应的函数^[49]:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 0.03 - \frac{X_1 X_2^2}{2} \left(\frac{3.81}{X_3 X_7} + \frac{1.13}{X_4 X_8} \right), \\ Y_2 &= X_5 X_3 - 1.185 X_1 X_2, \\ Y_3 &= X_6 X_4 - 0.75 X_1 X_2, \end{aligned} \quad (58)$$

其中, 输入变量均服从正态分布, 其分布参数列于表2中. 表3是不同的全局灵敏度分析方法所得到的结果.

本文中基于输出分解和基于协方差分解的多输出全局灵敏度指标基本上是等价的, 并且基于协方差分解的多输出全局灵敏度指标计算更为方便, 因而这里只列出了基于协方差分解的多输出全局灵敏度指标所得到的结果. 基于欧式距离的全局灵敏度指标与基于协方差分解的全局灵敏度指标也是等价的, 故而未列出. 基于协方差分解的全局灵敏度指标所得到的输入变量的重要性排序为 $X_5 > X_3 > X_6 > X_1 > X_4 > X_2 > X_8 > X_7$,

表2 输入变量的分布参数
Table 2 Distribution parameters for the input variables

输入变量	均值	标准差
X_1	20000	1400
X_2	12	0.12
X_3	0.04	0.0048
X_4	9.82×10^{-4}	5.892×10^{-5}
X_5	1.34×10^7	2.412×10^6
X_6	3.35×10^8	4.02×10^7
X_7	2×10^{10}	1.2×10^9
X_8	1×10^{11}	6×10^9

表3 式(58)的灵敏度分析结果

Table 3 Sensitivity analysis results for eq. (58)

输入变量	方差灵敏度分析		矩独立灵敏度分析		基于马氏距离的灵敏度分析	
	G_{Si}	GS_{Ti}	δ_i^M	η_i	S_i^{DWM}	S_{Ti}^{DWM}
X_1	0.035	0.035	0.508	0.018	0.069	0.071
X_2	0.001	0.001	0.465	0.003	0.001	0.003
X_3	0.257	0.265	0.497	0.010	0.235	0.245
X_4	0.024	0.025	0.482	0.008	0.031	0.033
X_5	0.578	0.587	0.589	0.023	0.528	0.537
X_6	0.097	0.097	0.639	0.039	0.126	0.127
X_7	0	0	0.463	0.002	0	0.001
X_8	0	0	0.473	0.006	0	0.001

两种矩独立灵敏度指标所得到的输入变量的重要性排序相同, 均为 $X_6 > X_5 > X_1 > X_3 > X_4 > X_8 > X_2 > X_7$. 可以看出, 矩独立灵敏度指标得到的输入变量的重要性排序与基于协方差分解的全局灵敏度指标得到的输入变量的重要性排序并不一致, 这是由于两者用来描述不确定性的方式不同所引起的. 虽然矩独立灵敏度指标所包含的不确定性信息更全面, 但其计算代价更高, 基于协方差分解的全局灵敏度指标是由单输出情况下的方差分解式推广而来, 表达直观, 计算更为方便. 基于马氏距离的全局灵敏度指标得到的输入变量的排序与基于协方差分解的全局灵敏度指标得到的排序结果一致, 但是各个输入变量的相对重要性有所变化.

4 结论

实际的工程结构中存在大量的不确定性, 虽然越来越多的计算模型被用来代替实际的工程结构, 然而由于对实际结构系统认知的不全面以及结构本身的一些可变性, 使得所得到的计算模型仍然含有大量不确定性. 全局灵敏度分析能够很好地侦测出模型输出不确定性的来源, 从而可以指导设计人员有效降低模型输出不确定性. 针对结构输出响应的个数, 可以将全局灵敏度分析分为单输出全局灵敏度分析和多输出全局灵敏度分析. 单输出全局灵敏度分析已经发展得比较成熟, 常用的单输出全局灵敏度分析方法有基本效应分析法、导数法、方差灵敏度分析法及矩独立灵敏度分析. 矩独立灵敏度分析方法所描述的结构不确定性最为全面, 然而其计算代价却是最高. 方差灵敏度分析方法是基于响应函数的高维模型展开

得到的, 能够反映响应函数的组成结构, 已经得到了许多学者的研究, 得到了许多高效的计算方法, 因而应用更为广泛. 导数法具有很直观的物理意义, 并且能够得到方差灵敏度指标的上界, 可以用来很好地检测对输出响应影响较小的变量. 基本效应法所对应的全局灵敏度指标是导数法所对应的全局灵敏度指标的一种近似表示, 其计算代价非常低, 能够适用于高维问题, 常用以初步判断各输入变量的相对重要性. 对于实际的工程问题, 可以根据对输出响应不确定性描述的要求来选择灵敏度分析方法. 如果需要描述输出响应的完整不确定性, 则可以选择矩独立灵敏度分析方法; 如果只需要考虑输出响应的方差, 那么可以选择方差灵敏度分析方法. 实际的工程问题更多地会考虑计算代价的问题, 因此也可以根据实际问题所能承受的计算代价来选择相应的灵敏度分析方法.

多输出全局灵敏度分析主要是同时考虑多个输出响应, 现有的多输出全局灵敏度分析方法多数是从单输出全局灵敏度分析推广而来的, 因而拥有类似的特征. 多输出全局灵敏度分析除了能够处理具有多个输出响应的模型, 还能处理输出响应随时间变化的模型. 对于输出响应随时间变化的模型, 常需要衡量输入变量的不确定性对一段时间内输出响应整体特征的影响. 由于输出响应一般是随时间连续变化的, 在实际处理当中经常会对时变输出响应进行离散化, 进而将离散后各时间点的输出响应作为多个输出响应, 再进行多输出灵敏度分析. 然而对时变输出响应离散化, 会带来输出响应的维数灾难问题, 因此, 在处理时变输出响应问题的时候, 还需要解决输出响应的维数

灾难问题. 已有的主成分分析、核主成分分析等方法能够有效地降低输出响应的维数, 可以应用于时变输出响应的灵敏度分析之中. 然而在采用各种方法降低输出响应的维数时, 需要对相应的降维方法的适用范围进行分析, 以有效达到降低输出响应维数的目的.

本文所考虑的不确定性都是采用概率理论进行表征的, 然而, 除此之外, 还可以采用非概率的方法对不确定性进行描述, 如模糊理论、凸集模型理论、证据理论等. 非概率方法在近些年来得到了许多学者的

关注, 已经被应用于不确定性定量分析与可靠性分析之中, 然而在灵敏度分析中应用的相对较少. 灵敏度分析是为了探究模型输出不确定性向输入不确定性的分配问题, 对于描述不确定性的方法并没有限制, 因此也可以采用非概率方法进行灵敏度分析. 相比较于概率方法, 非概率方法在信息量较少的情况下具有更强的适用性和实用性. 因此基于非概率方法的灵敏度分析也是值得探索的.

参考文献

- 1 Zadeh L A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets Syst*, 1999, 100: 9–34
- 2 Wang C, Qiu Z P. Fuzzy finite difference method for heat conduction analysis with uncertain parameters. *Acta Mech Sin*, 2014, 30: 383–390
- 3 Ben-Haim Y, Elishakoff I. *Convex Models of Uncertainties in Applied Mechanics*. Amsterdam: Elsevier Science Publisher, 1990
- 4 Elishakoff I, Elisseeff P, Glegg S A L. Nonprobabilistic, convex-theoretic modeling of scatter in material properties. *AIAA J*, 1994, 32: 843–849
- 5 Shafer G. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton: Princeton University Press, 1976
- 6 Yager R, Fedrizzi M, Kacprzyk J. *Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence*. New York: John Wiley, 1994
- 7 Qiu Z, Wang J. The interval estimation of reliability for probabilistic and non-probabilistic hybrid structural system. *Eng Failure Anal*, 2010, 17: 1142–1154
- 8 Li L, Lu Z, Cheng L, et al. Importance analysis on the failure probability of the fuzzy and random system and its state dependent parameter solution. *Fuzzy Sets Syst*, 2014, 250: 69–89
- 9 Shah H, Hosder S, Winter T. Quantification of margins and mixed uncertainties using evidence theory and stochastic expansions. *Reliab Eng Syst Safety*, 2015, 138: 59–72
- 10 Zhang Z, Jiang C, Wang G G, et al. First and second order approximate reliability analysis methods using evidence theory. *Reliab Eng Syst Safety*, 2015, 137: 40–49
- 11 Wang C, Qiu Z. Hybrid uncertain analysis for temperature field prediction with random, fuzzy and interval parameters. *Int J Thermal Sci*, 2015, 98: 124–134
- 12 Jiang C, Zhang Z, Han X, et al. An evidence-theory-based reliability analysis method for uncertain structures (in Chinese). *Chin J Theor Appl Mechan*, 2013, 45: 103–115 [姜潮, 张哲, 韩旭, 等. 一种基于证据理论的结构可靠性分析方法. *力学学报*, 2013, 45: 103–115]
- 13 Hofer E. Sensitivity analysis in the context of uncertainty analysis for computationally intensive models. *Comp Phys Commun*, 1999, 117: 21–34
- 14 Iman R L, Johnson M E, Watson C C. Uncertainty analysis for computer model projections of hurricane losses. *Risk Anal*, 2005, 25: 1299–1312
- 15 Saltelli A, Tarantola S. On the relative importance of input factors in mathematical models. *J Am Statist Associat*, 2002, 97: 702–709
- 16 Saltelli A. Sensitivity analysis for importance assessment. *Risk Anal*, 2002, 22: 579–590
- 17 Morris M D. Factorial sampling plans for preliminary computational experiments. *Technometrics*, 1991, 33: 161–174
- 18 Campolongo F, Cariboni J, Saltelli A. An effective screening design for sensitivity analysis of large models. *Environ Model Softw*, 2007, 22: 1509–1518
- 19 Pujol G. Simplex-based screening designs for estimating metamodels. *Reliab Eng Syst Safety*, 2009, 94: 1156–1160
- 20 Saltelli A, Campolongo F, Cariboni J. Screening important inputs in models with strong interaction properties. *Reliab Eng Syst Safety*, 2009, 94: 1149–1155
- 21 Campolongo F, Saltelli A, Cariboni J. From screening to quantitative sensitivity analysis. A unified approach. *Comp Phys Commun*, 2011, 182: 978–988
- 22 Xiao S, Lu Z, Xu L. A new effective screening design for structural sensitivity analysis of failure probability with the epistemic uncertainty. *Reliab Eng Syst Safety*, 2016, 156: 1–14
- 23 Sobol' I M, Kucherenko S. Derivative based global sensitivity measures and their link with global sensitivity indices. *Math Comp Simul*, 2009, 79: 3009–3017

- 24 Kucherenko S, Rodriguez-Fernandez M, Pantelides C, et al. Monte Carlo evaluation of derivative-based global sensitivity measures. *Reliability Eng Syst Safety*, 2009, 94: 1135–1148
- 25 Sobol' I M, Kucherenko S. A new derivative based importance criterion for groups of variables and its link with the global sensitivity indices. *Comp Phys Commun*, 2010, 181: 1212–1217
- 26 Sudret B, Mai C V. Computing derivative-based global sensitivity measures using polynomial chaos expansions. *Reliab Eng Syst Safety*, 2015, 134: 241–250
- 27 Lamboni M, Iooss B, Popelin A L, et al. Derivative-based global sensitivity measures: General links with Sobol' indices and numerical tests. *Math Comp Simul*, 2013, 87: 45–54
- 28 Roustant O, Fruth J, Iooss B, et al. Crossed-derivative based sensitivity measures for interaction screening. *Math Comp Simul*, 2014, 105: 105–118
- 29 Sobol' I M. Sensitivity analysis for non-linear mathematical models. *Math Model Comp Exp*, 1993, 1: 407–414
- 30 Homma T, Saltelli A. Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models. *Reliab Eng Syst Safety*, 1996, 52: 1–17
- 31 Saltelli A, Sobol' I M. Sensitivity analysis for nonlinear mathematical models: Numerical experience. *Math Model*, 1995, 7: 16–28
- 32 Sobol' I M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Math Comp Simul*, 2001, 55: 271–280
- 33 Saltelli A. Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices. *Comp Phys Commun*, 2002, 145: 280–297
- 34 Saltelli A, Annoni P, Azzini I, et al. Variance based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total sensitivity index. *Comp Phys Commun*, 2010, 181: 259–270
- 35 Chun M H, Han S J, Tak N I. An uncertainty importance measure using a distance metric for the change in a cumulative distribution function. *Reliab Eng Syst Safety*, 2000, 70: 313–321
- 36 Borgonovo E. A new uncertainty importance measure. *Reliab Eng Syst Safety*, 2007, 92: 771–784
- 37 Plischke E, Borgonovo E, Smith C L. Global sensitivity measures from given data. *Eur J Oper Res*, 2013, 226: 536–550
- 38 Liu Q, Homma T. A new computational method of a moment-independent uncertainty importance measure. *Reliab Eng Syst Safety*, 2009, 94: 1205–1211
- 39 Liu Q, Homma T. A new importance measure for sensitivity analysis. *J Nucl Sci Tech*, 2010, 47: 53–61
- 40 Xu X. Research on moment independent importance and neighborhood importance theoretics and application (in Chinese). Dissertation for the Doctoral Degree. Xi'an: Northwestern Western Polytechnical University, 2014 [许鑫. 矩独立和邻域重要性理论及应用研究. 博士学位论文. 西安: 西北工业大学, 2014]
- 41 Cui L J, Lü Z Z, Zhao X P. Moment-independent importance measure of basic random variable and its probability density evolution solution. *Sci China Technol Sci*, 2010, 53: 1138–1145
- 42 Li L Y, Lu Z Z, Feng J, et al. Moment-independent importance measure of basic variable and its state dependent parameter solution. *Struct Safety*, 2012, 38: 40–47
- 43 Borgonovo E, Tarantola S, Plischke E, et al. Transformations and invariance in the sensitivity analysis of computer experiments. *J R Stat Soc B*, 2014, 76: 925–947
- 44 Campbell K, McKay M D, Williams B J. Sensitivity analysis when model outputs are functions. *Reliab Eng Syst Safety*, 2006, 91: 1468–1472
- 45 Garcia-Cabrejo O, Valocchi A. Global sensitivity analysis for multivariate output using polynomial chaos expansion. *Reliab Eng Syst Safety*, 2014, 126: 25–36
- 46 Lamboni M, Monod H, Makowski D. Multivariate sensitivity analysis to measure global contribution of input factors in dynamic models. *Reliab Eng Syst Safety*, 2011, 96: 450–459
- 47 Gamboa F, Janon A, Klein T, et al. Sensitivity indices for multivariate outputs. *Comp R Math*, 2013, 351: 307–310
- 48 Cui L J, Lü Z Z, Zhao X P. Importance measures of basic variable under multiple failure modes and their solutions. *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2010, 40: 1532–1541 [崔利杰, 吕震宙, 赵新攀. 多失效模式下基本变量的重要性测度及其解法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2010, 40: 1532–1541]
- 49 Li L, Lu Z, Wu D. A new kind of sensitivity index for multivariate output. *Reliab Eng Syst Safety*, 2016, 147: 123–131
- 50 Wang F. Global sensitivity analysis for structure system with multivariate outputs (in Chinese). Dissertation for the Master's Degree. Xi'an: Northwestern Western Polytechnical University, 2016 [王飞. 多输出情况下结构系统的全局灵敏度分析. 硕士学位论文. 西北工业大学: 西安, 2016]
- 51 Saltelli A. Global Sensitivity Analysis. The Primer. New York: John Wiley & Sons, 2008
- 52 Ruano M V, Ribes J, Seco A, et al. An improved sampling strategy based on trajectory design for application of the Morris method to systems with many input factors. *Environ Model Softw*, 2012, 37: 103–109

- 53 Jansen M J W. Analysis of variance designs for model output. [Comp Phys Commun](#), 1999, 117: 35–43
- 54 Cukier R I, Fortuin C M, Shuler K E, et al. Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. I Theory. [J Chem Phys](#), 1973, 59: 3873–3878
- 55 Cukier R I, Levine H B, Shuler K E. Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems. [J Comp Phys](#), 1978, 26: 1–42
- 56 Saltelli A, Bolado R. An alternative way to compute Fourier amplitude sensitivity test (FAST). [Comp Stat Data Anal](#), 1998, 26: 445–460
- 57 Saltelli A, Tarantola S, Chan K P S. A quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output. [Technometrics](#), 1999, 41: 39–56
- 58 Tarantola S, Gatelli D, Mara T A. Random balance designs for the estimation of first order global sensitivity indices. [Reliab Eng Syst Safety](#), 2006, 91: 717–727
- 59 Mara T A. Extension of the RBD-FAST method to the computation of global sensitivity indices. [Reliab Eng Syst Safety](#), 2009, 94: 1274–1281
- 60 Crestaux T, Le Maître O, Martinez J M. Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis. [Reliab Eng Syst Safety](#), 2009, 94: 1161–1172
- 61 Sudret B. Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. [Reliab Eng Syst Safety](#), 2008, 93: 964–979
- 62 Blatman G, Sudret B. Efficient computation of global sensitivity indices using sparse polynomial chaos expansions. [Reliab Eng Syst Safety](#), 2010, 95: 1216–1229
- 63 Oakley J E, O’Hagan A. Probabilistic sensitivity analysis of complex models: A Bayesian approach. [J R Stat Soc B](#), 2004, 66: 751–769
- 64 Ratto M, Pagano A, Young P. State dependent parameter metamodelling and sensitivity analysis. [Comp Phys Commun](#), 2007, 177: 863–876
- 65 Marseguerra M, Masini R, Zio E, et al. Variance decomposition-based sensitivity analysis via neural networks. [Reliab Eng Syst Safety](#), 2003, 79: 229–238
- 66 Buzzard G T, Xiu D. Variance-based global sensitivity analysis via sparse-grid interpolation and cubature. [Commun Comput Phys](#), 2011, 9: 542–567
- 67 Konakli K, Sudret B. Global sensitivity analysis using low-rank tensor approximations. [Reliab Eng Syst Safety](#), 2016, 156: 64–83
- 68 Chen X. On the problem of best convergence rates of density estimates. [Chin Ann Math](#), 1984, 5: 185–192
- 69 Vapnik V N. The Nature of Statistical Learning Theory. 2nd ed. New York: Springer-Verlag Inc., 2000
- 70 Genest C, Rivest L P. On the multivariate probability integral transformation. [Stat Probab Lett](#), 2001, 53: 391–399
- 71 Zhao L, Luo H, Liu J. Weighted Mahalanobis distance and the weight-determining method—the arithmetic of tourism information recommender system (in Chinese). [Math Econ](#), 2007, 24: 185–188 [赵琳, 罗汉, 刘京. 加权马氏距离判别分析方法及其权值确定——旅游信息服务系统的智能推荐. [经济数学](#), 2007, 24: 185–188]

A review of global sensitivity analysis for uncertainty structure

XIAO SiNan, LV ZhenZhou* & WANG Wei

School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China

This paper mainly reviews some widely used global sensitivity analysis methods for uncertainty structure, in which the uncertainty is described by probability theory. Global sensitivity analysis can be divided into single output global sensitivity analysis and multivariate global sensitivity analysis based on the number of output response of the structure. The single output global sensitivity analysis has been studied by many researchers and obtains widely development. Due to the different ways of representing uncertainty in probability theory (variance, probability density function, cumulative distribution function, etc.), different global sensitivity analysis methods (variance based method, moment-independent method, etc.) have been proposed. For example, the variance based global sensitivity analysis method can reflect the structure of the model itself and has been widely studied and applied in engineering; while the moment independent global sensitivity analysis method has a more comprehensive description of the uncertainty and reflects more uncertainty information. The multivariate output global sensitivity analysis is developed based on the single output global sensitivity analysis and it mainly focuses on the effects of input variables on the uncertainty of the whole multivariate output. For the models with multivariate outputs, the correlation between different outputs exists and it should be considered when performing the global sensitivity analysis. Comparing to the single output global sensitivity analysis, the multivariate output global sensitivity analysis is much more complicated and computational demanding since there are more uncertainty information for the multivariate outputs. The basic theories of different global sensitivity analysis methods are described in detail in order to have better understanding of these methods. Numerical examples are also used to compare these different methods. Through the comparison, the advantages and shortage of different global sensitivity analysis methods are obtained.

uncertainty, global sensitivity analysis, single output response, multivariate output response

PACS: 02.50.-r, 02.60.Cb, 02.50.Sk, 02.70.-c

doi: [10.1360/SSPMA2016-00516](https://doi.org/10.1360/SSPMA2016-00516)