论文

五维转动压扁黑洞解的新形式及其热力学

朱晓丹, 吴迪*, 吴双清, 杨树政

西华师范大学物理与空间科学学院, 南充 637002

* 联系人, E-mail: wdcwnu@163.com

收稿日期: 2016-04-15; 接受日期: 2016-05-12; 网络出版日期: 2016-06-13

国家自然科学基金资助项目 (编号: 10975058, 11275157, 11573022)

摘要 本文对五维转动压扁黑洞进行新的研究. 首先通过直接求解真空中的 Einstein 场方程, 得到转动不带电的压扁黑洞解比较简单的新形式, 然后利用抵消项方法研究其热力学性质. 本文给出的转动不带电的压扁黑洞解的新形式及其相关的热力学表达式与先前他人给出的结果相比, 显得非常简洁、优美, 为下一步研究五维转动带电的压扁黑洞做好了热身准备.

关键词 压扁黑洞, 五维精确解, 黑洞热力学

PACS: 04.20.Jb, 04.50.-h, 04.50.Gh, 04.70.Dy

1 引言

五维和更高维的时空具有比四维时空更加丰富多彩的性质. 例如, 人们发现把四维时空的黑洞唯一性定理推广到五维时不再成立, 而且高维时空可以具有多种不同的渐近拓扑结构和视界拓扑结构. 在五维的渐近平直时空中, 除视界拓扑为三维球 S^3 的黑洞解外, 人们发现了另外一种视界拓扑为 $S^2 \times S^1$ 的黑环解. 把四维的渐近平直黑洞解简单地加上一个类空维度, 可以得到平庸的五维黑弦解. 此外, 五维时空还存在一类本文感兴趣的、所谓的压扁黑洞解, 其视界拓扑为压扁的三维球, 但在类空无穷远处的渐近结构与五维 Kaluza-Klein (KK) 磁单极的渐近拓扑相同, 都为四维 Minkowski 空间与携带扭曲的 $U(1)$ 纤

维丛结构的一维圆圈 S^1 的直积. 将这类解的维数约化到四维以后, 成为四维 KK 理论的严格解, 所以, 通常又称其为 KK 黑洞解.

第一个五维静态带电的压扁黑洞解最早由 Ishihara 和 Matsuno^[1] 得到, 他们对五维静态带电的 Reissner-Nordström 黑洞解施加一个压扁变换得到五维静态带电的 KK 压扁黑洞解. 事实上, 他们使用的方法是一个相当简单的解生成技术, 通过对度规的某些分量乘上一个压扁函数的不同幂次后, 可得到同一理论的一个新解. Cai 等人^[2] 随后利用抵消项方法^[3] 和 Abbott-Deser 方法^[4] 研究了该黑洞解的热力学性质. Kurita 等人^[5] 首次把压扁黑洞的额外维长度和引力张力视作一对共轭的热力学变量引入到热力学第一定律和积分形式的 Smarr 质量公式中.

引用格式: 朱晓丹, 吴迪, 吴双清, 等. 五维转动压扁黑洞解的新形式及其热力学. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2016, 46: 070401

Zhu X D, Wu D, Wu S Q, et al. New form of the five-dimensional rotating squashed black hole solution and its thermodynamics (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2016, 46: 070401, doi: 10.1360/SSPMA2016-00205

此后, 他们^[6]又采用参考背景方法对该黑洞的热力学性质做了深入地探讨. 文献[7]采用参考背景方法重新研究了此黑洞的热力学, 证明该静态压扁黑洞的 Hawking-Horowitz 质量与抵消项质量和 Abbott-Deser 质量相等. 这些工作^[2,5-7]都表明, 对于压扁黑洞而言, 直接进入热力学第一定律的微分形式和积分形式的质量是抵消项质量或 Abbott-Deser 质量, 而不是 Komar 质量.

由于压扁变换的简单、易操作性, 这一方法随后很快成功地被用于从一些已知解生成新的具有压扁视界的 KK 黑洞解^[8-16]. 例如: Wang^[8]利用压扁变换从五维等转动的 Myers-Perry 黑洞解出发得到了真空 Einstein 引力的中性转动压扁黑洞解. 此外, Einstein-Maxwell-dilaton (EMd) 引力的压扁黑洞解^[9,10]、五维最小超引力理论的压扁黑洞解^[11]、五维 $U(1)^3$ 超引力理论的压扁黑洞解^[12], 以及以 Gödel 宇宙为背景的五维压扁黑洞解^[13-16]先后被构造出来. 压扁黑洞除了在构造新的严格解和研究热力学性质^[2,5-7,10,16-19]方面引起人们的极大兴趣外, 关于它们的一些其他性质, 例如: Kerr/CFT 对应性^[19]、测地线运动^[20]、Hawking 辐射^[10,21-24]、微扰稳定性^[25-27]、准正则模^[28]、强引力透镜^[29,30]等不同方面在近十年内都已得到了大量的研究.

尽管使用压扁变换方法得到新的精确解非常简便, 但仍需要进一步地再作坐标变换得到合理的渐近结构以后才能正确地分析其热力学性质和其他的一些性质. 对于简单的静态(带电)压扁黑洞解而言, 坐标变换不会带来多少复杂性. 对于转动带电的黑洞解, 特别是带多个电荷的超引力黑洞解, 经过简单的压扁变换容易得到相应的压扁黑洞解, 但是进一步地作坐标变换得到的解的形式一般会相当复杂, 而且计算出来的热力学量的表达式也会非常复杂. 这使五维超引力理论中的转动带电的压扁黑洞解的热力学性质到目前为止还远未得到深入细致的研究. 另一方面, 对于转动带电的压扁黑洞, 除了要考虑通常的热力学量(质量、角动量、电荷、电势、温度、熵、额外维半径与引力张力)以外, 还需要通过引入偶极势和局域的偶极荷对热力学第一定律和 Smarr 质量公式做出附加修订^[16,19], 这对转动带电的压扁黑洞热力学性质的研究提出了新的课题要求.

那么, 能否从一开始就得到转动(带电)压扁黑洞解比较简单的度规表达式, 而使随后对黑洞热力学性质的分析显得简单一些, 而且使计算出来的热力学量的表达式也能简洁一些呢? 这对于带有多个电荷的超引力压扁黑洞解来说特别重要. 因为, 如果不这样做的话, 其中的膨胀子 (Dilaton) 标量场在无穷远处的渐近值可能不为零, 这将进一步修改热力学第一定律和 Smarr 质量公式. 如果能找到压扁黑洞解的标量场在无穷远处消失, 这将大大地简化热力学性质的分析, 使计算出来的热力学量的表达式不仅非常简单, 而且也不用担心标量场渐近值对热力学第一定律和 Smarr 质量公式的修订. 事实上, Yazadjiev^[9]在得到 EMd 引力的压扁黑洞解时就已经考虑过这个新颖的思路. 最近, Wu 等人^[31]采用这一思路得到了五维静态带 3 个电荷的压扁黑洞解的新形式并详细地分析了其热力学性质, 研究结果表明这个新思路的确能达到预期的效果. 本文将沿用这一新思路, 作为热身练习, 重新研究转动不带电的压扁黑洞解. 首先通过直接求解场方程, 期望所找到的解的表达式能相对简单一些, 给后期的热力学性质的分析带来很大的便利. 事实上, 本文得到的中性转动压扁黑洞解的新形式不仅简单, 而且计算出来的热力学表达式也相当简洁. 我们打算在今后的工作中把这里取得的经验进一步地推广到对转动带电的压扁黑洞解的研究之中.

本文余下内容的结构安排如下: 第 2 节, 通过直接求解真空 Einstein 场方程, 给出转动不带电的压扁黑洞解的一个新的简单形式, 为今后求解转动带电的压扁黑洞解作好热身准备; 第 3 节, 采用抵消项方法研究其热力学性质; 最后, 给出简要总结.

2 五维转动压扁黑洞解的新形式

在这一节中, 我们将通过直接求解真空中的 Einstein 场方程得到转动不带电的压扁黑洞解的新形式, 并期望: (1) 这个解的度规表达式能简单一些; (2) 在无穷远处不转动; (3) 与时间方向对应的 Killing 矢量也是合适地、归一化地. 这些优点使它可以作为理想的种子解, 在今后的工作中利用解生成技术由它得到转动带电的压扁黑洞解的新形式, 并且为研究其

热力学性质带来很大的便利.

五维压扁黑洞在无穷远处一般具有如下的渐近结构:

$$ds^2 \simeq -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + L_\infty^2 \sigma_3^2, \quad (1)$$

其中, $\sigma_3 = d\psi + \cos\theta d\phi$, L_∞ 为额外维半径.

根据上述五维压扁黑洞的渐近拓扑性质, 我们将考虑如下的作用量:

$$I = \frac{1}{16\pi} \int d^5x \sqrt{-g} R + \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-h} K \\ + \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-h} \sqrt{2\mathcal{R}}, \quad (2)$$

其中, 第1项是五维的 Einstein-Hilbert-Palatini 作用量, R 是与五维时空 (体积) 度规 $g_{\mu\nu}$ 相对应的 Ricci 标量. 第2项和第3项分别是 Gibbons-Hawking 边界项和抵消项, K 是外禀曲率 $K_{ij} = (n_{i;j} + n_{j;i})/2$ 的迹, $\mathcal{R}$ 是与边界诱导度规 h_{ij} 相对应的 Ricci 标量.

五维转动不带电的压扁黑洞解及其部分的物理性质先前已在文献 [8] 中研究过, 该文献所研究的解是通过对五维等转动的 Myers-Perry 解直接作压扁变换得到的, 然后再作坐标变换得到合适的渐近形式. 本文将在如下的度规假设下通过直接求解真空中的 Einstein 场方程得到与之不同的、形式比较简单的中性转动的压扁黑洞解:

$$ds^2 = -\frac{V(\rho)}{k(\rho)} dt^2 + \frac{\rho(\rho + \rho_0)}{V(\rho)} d\rho^2 + \rho(\rho + \rho_0)(d\theta^2 \\ + \sin^2\theta d\phi^2) + \frac{k(\rho)L_\infty^2}{\rho(\rho + \rho_0)} \left[\sigma_3 - \frac{h(\rho)dt}{k(\rho)L_\infty} \right]^2 \\ = \eta_{ab} e^a \otimes e^b, \quad (3)$$

其中 $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1)$. 以下将在标架表述中求解真空中的引力场方程. 为了求解方便, 选取如下正交标架:

$$e^1 = -\sqrt{\frac{V(\rho)}{k(\rho)}} dt, \quad e^2 = \sqrt{\frac{\rho(\rho + \rho_0)}{V(\rho)}} d\rho, \\ e^3 = \sqrt{\rho(\rho + \rho_0)} d\theta, \quad e^4 = \sqrt{\rho(\rho + \rho_0)} \sin\theta d\phi, \\ e^5 = \frac{\sqrt{k(\rho)L_\infty}}{\sqrt{\rho(\rho + \rho_0)}} \left[\sigma_3 - \frac{h(\rho)}{k(\rho)L_\infty} dt \right].$$

由场方程可知, 其正交标架分量 $G_{(3)(3)} = G_{(4)(4)}$.

下面我们通过求解真空中的 Einstein 场方程 $G_{(a)(b)} = 0$ 来确定函数 $V(\rho)$, $k(\rho)$ 和 $h(\rho)$ 的具体表达式. 首先, 由 $G_{(2)(2)} + G_{(3)(3)} = 0$ 可得

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} V(\rho) = 2, \quad (4)$$

由此可解出

$$V(\rho) = (\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-), \quad (5)$$

其中, $\rho_\pm$ 为两个积分常数, 分别代表内、外界界.

其次, 由标架分量 $G_{(1)(5)} = 0$ 可得下述方程:

$$\frac{1}{h(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \rho} h(\rho)}{\rho(\rho + \rho_0)} \right] = \frac{1}{k(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \rho} k(\rho)}{\rho(\rho + \rho_0)} \right]. \quad (6)$$

将方程 (4) 代入 $G_{(1)(1)} - G_{(4)(4)} = 0$ 中, 并利用方程 (6) 可以得到如下两个方程:

$$\frac{1}{k(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \rho} k(\rho)}{\rho(\rho + \rho_0)} \right] + \frac{2}{\rho^2(\rho + \rho_0)^2} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{1}{h(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \rho} h(\rho)}{\rho(\rho + \rho_0)} \right] + \frac{2}{\rho^2(\rho + \rho_0)^2} = 0. \quad (8)$$

将方程 (4) 和 (7) 代入 $G_{(2)(2)} + G_{(5)(5)}/3 = 0$ 中, 可求出

$$k(\rho) = -\frac{\rho(\rho + \rho_0)(2\rho + \rho_0)}{L_\infty^2} \frac{\partial}{\partial \rho} V(\rho) \\ + \frac{\rho_0^2 + 2\rho(\rho + \rho_0)}{L_\infty^2} V(\rho) + \frac{2\rho^2(\rho + \rho_0)^2}{L_\infty^2},$$

再将方程 (5) 代入上式, 可得

$$k(\rho) = \frac{\rho_0^2 + \rho_0(\rho_+ + \rho_-) + 2\rho_+\rho_-}{L_\infty^2} \rho^2 \\ + \frac{\rho_0\rho_+\rho_-}{L_\infty^2} (2\rho + \rho_0) \\ = \rho^2 + \frac{\rho_0\rho_+\rho_-}{L_\infty^2} (2\rho + \rho_0). \quad (9)$$

在得到上述第二个方程时, 已令

$$L_\infty^2 = \rho_0^2 + \rho_0(\rho_+ + \rho_-) + 2\rho_+\rho_-, \quad (10)$$

这是因为我们已事先在度规假设中单独分离出了一个常数因子 L_∞^2 . 另外, 也可以等价地通过重新定义时间坐标得到相同的度规表达式.

方程 (8) 的一般解为

$$h(\rho) = h_2 k(\rho) + h_1 (2\rho + \rho_0), \quad (11)$$

其中, h_1, h_2 为两个待定的与转动相关的积分常数, h_2 表示黑洞在无穷远处的转动角速度. 考虑到度规在无穷远处的渐近结构, 并且要求黑洞在无穷远处不转动, 这里及以后不妨假设 $h_2 = 0$. 此时, 函数 $h(\rho)$ 中尚有一个待定的常数 h_1 还需要进一步确定.

将已求出的 $V(\rho), k(\rho)$ 和 $h(\rho)$ 的表达式 (即方程 (5), (9) 和 (11)) 代入 Einstein 场方程以检查所得解的自洽性, 可知各分量方程能得到满足的条件为

$$h_1 = \frac{\sqrt{\rho_+ \rho_- (\rho_0 + \rho_+) (\rho_0 + \rho_-) (L_\infty^2 - \rho_0^2)}}{L_\infty^2}. \quad (12)$$

至此, 我们获得了五维转动不带电的压扁黑洞解的新形式, 其中只包含三个独立的解参数 $(\rho_0, \rho_\pm)$, 结构函数 $V(\rho)$ 和 $k(\rho)$ 分别由方程 (5) 和 (9) 给出, 而 $h(\rho)$ 由下式给出:

$$h(\rho) = \frac{\sqrt{\rho_+ \rho_- (\rho_0 + \rho_+) (\rho_0 + \rho_-) (L_\infty^2 - \rho_0^2)}}{L_\infty^2} \times (2\rho + \rho_0). \quad (13)$$

与文献 [8] 给出的中性转动压扁黑洞解相比, 这里给出的新形式的解要简单得多, 将对其物理性质的研究起到非常便利的作用. 下面将会看到, 由此计算出的热力学表达式与文献 [8] 给出的结果相比也简洁得多.

此外, 上述解也可以改写成另外一种形式

$$ds^2 = -\frac{f(\rho)}{\rho(\rho + \rho_0)} \left[dt + \frac{h(\rho)}{f(\rho)} L_\infty \sigma_3 \right]^2 + \frac{\rho(\rho + \rho_0)}{V(\rho)} d\rho^2 + \rho(\rho + \rho_0) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{V(\rho)}{f(\rho)} L_\infty^2 \sigma_3^2, \quad (14)$$

其中,

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \frac{\rho(\rho + \rho_0)V(\rho) - h(\rho)^2}{k(\rho)} \\ &= \rho^2 - \frac{(L_\infty^2 - \rho_0^2)(\rho_+ + \rho_-) - \rho_0^3}{L_\infty^2} \rho \\ &\quad - \frac{(\rho_0 + \rho_+)(\rho_0 + \rho_-)(L_\infty^2 - \rho_0^2)}{L_\infty^2}. \end{aligned}$$

需要指出的是, 上述转动压扁黑洞解的新形式可以通过已知解 [8] 作坐标变换和参数等同而得到, 但由于过程繁琐和文章篇幅所限, 本文将不再赘述.

3 转动压扁黑洞的热力学性质

本节将根据上文给出的中性转动压扁黑洞解的新形式研究其热力学性质. 此黑洞的内、外界分别为 $\rho_\pm$, 满足方程 $V(\rho) = 0$. 通过标准方法, 可以计算出外视界 $\rho = \rho_+$ 处的黑洞熵、Hawking 温度和角速度的表达式分别如下:

$$S_+ = 4\pi^2 L_\infty \sqrt{\rho_+ (\rho_+ + \rho_0) k(\rho_+)}, \quad (15a)$$

$$T_+ = \frac{\frac{\partial}{\partial \rho_+} V(\rho_+)}{4\pi \sqrt{\rho_+ (\rho_+ + \rho_0) k(\rho_+)}} \quad (15b)$$

$$\Omega_+ = \frac{h(\rho_+)}{k(\rho_+) L_\infty}. \quad (15c)$$

下面将采用抵消项方法计算该黑洞的守恒荷: 抵消项质量、角动量和引力张力. 由作用量 (2) 对 h_{ij} 变分得到应力张量的表达式如下:

$$\begin{aligned} 8\pi T_{ij} &= K_{ij} - h_{ij} K - \Psi (\mathcal{R}_{ij} - h_{ij} \mathcal{R}) \\ &\quad - h_{ij} h^{kl} \Psi_{;kl} + \Psi_{;ij}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\Psi = \sqrt{2/\mathcal{R}}$.

经过一些冗长的计算, 可得到有关应力张量分量的表达式如下:

$$\begin{aligned} T_t^t &= -\frac{\rho_+ + \rho_- + \rho_0/2 + \rho_0 \rho_+ \rho_- / L_\infty^2}{8\pi \rho^2} \\ &\quad + \mathcal{O}(\rho^{-3}), \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} T_\psi^\psi &= \frac{\sqrt{\rho_+ \rho_- (\rho_0 + \rho_+) (\rho_0 + \rho_-) (L_\infty^2 - \rho_0^2)}}{8\pi L_\infty \rho^2} \\ &\quad + \mathcal{O}(\rho^{-3}), \end{aligned} \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} T_\psi^\psi &= \frac{-\rho_0 - (\rho_+ + \rho_-)/2 + \rho_0 \rho_+ \rho_- / L_\infty^2}{8\pi \rho^2} \\ &\quad + \mathcal{O}(\rho^{-3}), \end{aligned} \quad (17c)$$

$$T_\phi^\phi = \frac{(\rho_+ - \rho_-)^2 - L_\infty^2}{64\pi \rho^3} + \mathcal{O}(\rho^{-4}), \quad (17d)$$

$$T_t^\psi = -T_\psi^t / L_\infty^2, \quad T_\psi^\phi = T_t^\phi = 0, \quad (17e)$$

$$T_\phi^t = T_\psi^t \cos \theta, \quad T_\phi^\psi = T_\psi^\psi \cos \theta. \quad (17f)$$

利用如下公式计算抵消项质量和角动量:

$$M_{ct} = \frac{-1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{4\pi} d\psi \int_0^\pi d\theta (\sqrt{\Sigma} T_t^t) \Big|_{\rho \rightarrow \infty}, \quad (18a)$$

$$J = \frac{-1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{4\pi} d\psi \int_0^\pi d\theta (\sqrt{\Sigma} T_\psi^t) \Big|_{\rho \rightarrow \infty}, \quad (18b)$$

其中, $\sqrt{\Sigma} = L_\infty \sqrt{\rho(\rho + \rho_0)k(\rho)} \sin \theta$. 将方程 (17a) 和 (17b) 代入方程 (18), 可计算出抵消项质量和角动量的表达式分别为

$$M_{ct} = \frac{\pi}{L_\infty} [L_\infty^2 (\rho_0 + 2\rho_+ + 2\rho_-) + 2\rho_0 \rho_+ \rho_-], \quad (19a)$$

$$J = 2\pi \sqrt{\rho_+ \rho_- (\rho_0 + \rho_+) (\rho_0 + \rho_-) (L_\infty^2 - \rho_0^2)}, \quad (19b)$$

这里计算出的角动量与用 Komar 方法计算出的角动量的结果完全一致, 但抵消项质量与 Komar 质量的表达式不同.

不为零的引力张力可以由下述公式计算:

$$\mathcal{T} = \frac{-1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta (\sqrt{\sigma} T_\psi^\psi) |_{\rho \rightarrow \infty}, \quad (20)$$

其中, $\sqrt{\sigma} = \rho(\rho + \rho_0) \sin \theta$. 将方程 (17c) 代入上式, 得到引力张力的表达式为

$$\mathcal{T} = \frac{1}{4L_\infty^2} [L_\infty^2 (2\rho_0 + \rho_+ + \rho_-) - 2\rho_0 \rho_+ \rho_-], \quad (21)$$

由于我们的解只包含三个独立的参数 ($\rho_0, \rho_\pm$), 因此, 给出的热力学表达式与文献 [8] 中给出的结果相比, 显得十分简洁优美.

最后, 可以验证上述外视界的热力学量和黑洞的守恒荷的确满足微分形式的热力学第一定律和积分形式的 Smarr 质量公式

$$dM_{ct} = T_+ dS_+ + \Omega_+ dJ + 4\pi \mathcal{T} dL_\infty, \quad (22a)$$

$$M_{ct} = 3T_+ S_+ / 2 + \Omega_+ J + 2\pi \mathcal{T} L_\infty, \quad (22b)$$

其中, 额外维周长 $2\pi L_\infty$ 与 NUT 荷有关. 为了使 Smarr 质量公式自治, 可以把它看作一个与引力张力共轭的热力学变量. 顺便指出, 对于内视界 $\rho = \rho_-$, 类似的公式也完全成立, 只需要作替换 $\rho_+ \rightarrow \rho_-$ 即可.

4 结论

本文对五维转动不带电的压扁黑洞解重新做了研究, 主要的结果是得到了转动不带电的压扁黑洞解的新的比较简单的度规表达式, 并且由此计算出的热力学表达式也非常简洁优美. 首先通过直接求解真空中的 Einstein 场方程, 得到转动不带电的压扁黑洞解简单的新形式. 然后, 利用抵消项方法计算出相关的热力学守恒量, 并验证它们同时满足热力学第一定律的微分形式和积分形式.

本文给出的转动不带电的压扁黑洞解的新形式及其相关的热力学表达式与先前的结果 [8] 相比, 显得非常简洁、优美, 并且具有两个优点: (1) 它在无穷远处不转动; (2) 与时间方向对应的 Killing 矢量在无穷远处也是归一化的矢量. 这两个优点为下一步把它用作种子解去生成新的转动带电的压扁黑洞解做好了前期准备.

参考文献

- 1 Ishihara H, Matsuno K. Kaluza-Klein black holes with squashed horizons. *Prog Theor Phys*, 2006, 116: 417–422
- 2 Cai R G, Cao L M, Ohta N. Mass and thermodynamics of Kaluza-Klein black holes with squashed horizons. *Phys Lett B*, 2006, 639: 354–361
- 3 Mann R, Stelea C. On the gravitational energy of the Kaluza-Klein monopole. *Rhys Lett B*, 2006, 634: 531–535
- 4 Abbott L F, Deser S. Stability of gravity with a cosmological constant. *Nucl Phys B*, 1982, 195: 76–96
- 5 Kurita Y, Ishihara H. Mass and free energy in thermodynamics of squashed Kaluza-Klein black holes. *Class Quant Grav*, 2007, 24: 4525–4532
- 6 Kurita Y, Ishihara H. Thermodynamics of squashed Kaluza-Klein black holes and black strings — A comparison of reference backgrounds. *Class Quant Grav*, 2008, 25: 085006
- 7 Saito M, Noda H, Tashiro T. Kaluza-Klein black holes with squashed horizons and Hawking-Horowitz mass. *Int J Mod Phys A*, 2009, 24: 2357–2369
- 8 Wang T. A rotating Kaluza-Klein black hole with squashed horizons. *Nucl Phys B*, 2006, 756: 86–99
- 9 Yazadjiev S S. Dilaton black holes with squashed horizons and their thermodynamics. *Phys Rev D*, 2006, 74: 024022
- 10 Nedkova P G, Yazadjiev S S. New magnetized squashed black holes—Thermodynamics and Hawking radiation. *Eur Phys J C*, 2013, 73: 2377
- 11 Nakagawa T, Ishihara H, Matsuno K, et al. Charged rotating Kaluza-Klein black holes in five dimensions. *Phys Rev D*, 2008, 77: 044040
- 12 Tomizawa S. Compactified black holes in five-dimensional $U(1)^3$ ungauged supergravity. *arXiv:1009.3568 [hep-th]*
- 13 Tomizawa S, Ishibashi A. Charged black holes in a rotating Gross-Perry-Sorkin monopole background. *Class Quant Grav*, 2008, 25: 245007

- 14 Matsuno K, Ishihara H, Nakagawa T, et al. Rotating Kaluza-Klein multi-black holes with Gödel parameter. *Phys Rev D*, 2008, 78: 064016
- 15 Tomizawa S, Ishihara H, Matsuno K, et al. Squashed Kerr-Gödel black holes: Kaluza-Klein black holes with rotations of black hole and universe. *Prog Theor Phys*, 2009, 121: 823–841
- 16 Stelea C, Schleich K, Witt D. On squashed black holes in Gödel universes. *Phys Rev D*, 2008, 78: 124006
- 17 Nedkova P G, Yazadjiev S S. On the thermodynamics of 5 d black holes on ALF gravitational instantons. *Phys Rev D*, 2011, 84: 124040
- 18 Nedkova P G, Yazadjiev S S. Magnetized black hole on Taub-Nut instanton. *Phys Rev D*, 2012, 85: 064021
- 19 Peng J J, Wu S Q. Extremal Kerr/CFT correspondence of five-dimensional rotating (charged) black holes with squashed horizons. *Nucl Phys B*, 2010, 828: 273–288
- 20 Matsuno K, Ishihara H. Geodetic precession in squashed Kaluza-Klein black hole spacetimes. *Phys Rev D*, 2009, 80: 104037
- 21 Ishihara H, Soda J. Hawking radiation from squashed Kaluza-Klein black holes: A window to extra dimensions. *Phys Rev D*, 2007, 76: 064022
- 22 Chen S B, Wang B, Su R K. Hawking radiation in a rotating Kaluza-Klein black hole with squashed horizons. *Phys Rev D*, 2008, 77: 024039
- 23 Wei S W, Li R, Liu Y X, et al. Anomaly analysis of Hawking radiation from Kaluza-Klein black hole with squashed horizon. *Eur Phys J C*, 2010, 65: 281–287
- 24 Matsuno K, Umetsu K. Hawking radiation as tunneling from squashed Kaluza-Klein black hole. *Phys Rev D*, 2011, 83: 064016
- 25 Kimura M, Murata K, Ishihara H, et al. On the stability of squashed Kaluza-Klein black holes. *Phys Rev D*, 2008, 77: 064015
- 26 Ishihara H, Kimura M, Konoplya R A, et al. Evolution of perturbations of squashed Kaluza-Klein black holes: Escape from instability. *Phys Rev D*, 2008, 77: 084019
- 27 Nishikawa R, Kimura M. Stability analysis of squashed Kaluza-Klein black holes with charge. *Class Quant Grav*, 2010, 27: 215020
- 28 He X, Wang B, Chen S B, et al. Quasinormal modes in the background of charged Kaluza-Klein black hole with squashed horizons. *Phys Lett B*, 2008, 665: 392–400
- 29 Liu Y, Chen S B, Jing J L. Strong gravitational lensing in a squashed Kaluza-Klein black hole spacetime. *Phys Rev D*, 2010, 81: 124017
- 30 Ji L Y, Chen S B, Jing J L. Strong gravitational lensing in a rotating Kaluza-Klein black hole with squashed horizons. *J High Energy Phys*, 2014, 1403: 89
- 31 Wu S Q, Wen D, Jiang Q Q, et al. Thermodynamics of five-dimensional static three-charge STU black holes with squashed horizons. *Phys Lett B*, 2013, 726: 404–407

New form of the five-dimensional rotating squashed black hole solution and its thermodynamics

ZHU XiaoDan, WU Di*, WU ShuangQing & YANG ShuZheng

College of Physics and Space Science, China West Normal University, Nanchong 637002, China

We have revisited the five-dimensional rotating squashed black hole. By solving directly the vacuum Einstein field equation, we have obtained a new but rather simple form for the rotating uncharged black hole with squashed horizons. This new metric expression for the rotating squashed black hole is very convenient for us to investigate its thermodynamics by means of the counterterm method. Compared with the previous results given by the other author, not only is our new metric form of the neutral rotating squashed black hole much more simple, but also its associated thermodynamic expressions are very concise and elegant. Our present work can serve as a warmup preparation for studying the rotating charged squashed black hole in the near future.

squashed black hole, exact solution in 5-dimensions, black hole thermodynamics

PACS: 04.20.Jb, 04.50.-h, 04.50.Gh, 04.70.Dy

doi: 10.1360/SSPMA2016-00205