梯度多胞材料耐撞性设计的简化模型和渐近解

常白雪^{1,2}, 郑志军^{1*}, 赵凯¹, 虞吉林¹

1. 中国科学技术大学近代力学系, 中国科学院材料力学行为和设计重点实验室, 合肥 230027;

2. 西安交通大学航天学院机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049;

*联系人, E-mail: zjzheng@ustc.edu.cn

收稿日期: 2018-05-01; 接受日期: 2018-07-12; 网络出版日期: 2018-07-31

国家自然科学基金(编号: 11772330)、中央高校基本科研业务费专项资金(编号: WK2480000003)和西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室开放基金(编号: SV2017-KF-13)资助项目

摘要 多胞材料具有很强的吸能特性, 并被广泛应用于结构耐撞性设计领域, 其力学响应与密度分布息息相关. 因此可以通过对多胞材料密度分布的设计达到对材料的宏观力学响应的有效控制, 以满足实际应用中的耐撞性要求. 基于非线性塑性冲击波模型可以实现对密度梯度的反向设计, 但其求解较为困难. 本文利用级数法获得了耐撞性反向设计理论的渐近解, 针对常冲击力的耐撞性要求给出了一个具有足够精度的近似解. 利用二维随机Voronoi技术构建了细观有限元模型, 并运用有限元软件ABAQUS/Explicit进行了数值验证, 结果表明密度分布的反向设计理论的渐近解对于指导梯度多胞材料的耐撞性设计是有效的, 且二阶渐近解已提供足够的设计精度. 基于冲击波模型的反向设计方法为主动设计梯度多胞材料提供了重要依据.

关键词 梯度多胞材料, 耐撞性, 反向设计方法, 冲击波模型, 渐近解

PACS: 43.28.Mw, 81.70.Bt, 81.40.Lm

1 引言

多胞材料具有高孔隙率和超强的冲击能量吸收能力, 广泛地应用于汽车、铁路和航空航天等领域^[1-3]. 多胞材料在高速冲击下表现出应力增强和变形局部化的典型特征, 可以用塑性冲击波来描述^[1]. 已有研究发现多胞材料的胞元尺寸和形状以及壁厚的材料性质都会影响其冲击波传播特性^[4-6]. 细观构型的变化直接影响宏观材料中相对密度的分布规律. 因而, 引入密度梯度的设计, 可望控制多胞材料的宏观力学响应, 并实现

耐撞性的优化.

多胞材料在准静态压缩下的应力-应变关系表现为弹性、平台和压缩的三段式特征^[1,7]. 基于这一特征, Reid和Peng^[1]率先提出了一维刚性-塑性-锁定(R-PP-L)冲击波模型, 并应用于表征多胞材料的动态冲击响应. 该模型随后也被发展用于表征梯度多胞材料的动态冲击行为, 如单冲击波模型^[8,9]、双冲击波模型^[8-10]和三冲击波模型^[10]. 为更准确地表征多胞材料的冲击行为, Zheng等人^[11]提出了一维刚性-塑性硬化(R-PH)冲击波模型. 近来, 该模型也被发展用于表征梯度多胞材料的

引用格式: 常白雪, 郑志军, 赵凯, 等. 梯度多胞材料耐撞性设计的简化模型和渐近解. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 094615
Chang B X, Zheng Z J, Zhao K, et al. A simplified model and its asymptotic solution for the crashworthiness design of graded cellular material (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2018, 48: 094615, doi: [10.1360/SSPMA2018-00162](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00162)

抗爆炸/抗冲击特性^[12-14].

细观有限元模型可以有效地刻画多胞材料宏观力学响应和细观尺度上的变形特征^[11,15]. 近年来, 细观有限元方法被广泛用于研究梯度多胞材料的动态冲击行为. 梯度多胞材料大致可以分为两类. 一类是分层梯度, 以三层式为主, 每一层采用密度均匀的多胞材料, 如规则/不规则六边形蜂窝, 圆孔蜂窝和空心球^[16-23]. 另一类是连续梯度, 通过控制密度梯度分布函数可以调控波传播的过程. Wang等人^[4,8]通过变胞元技术构建了连续密度梯度蜂窝结构的数值计算模型, Yang等人^[14]将其进一步拓展到了三维情形.

多种密度分布的梯度多胞材料的冲击响应和吸能特性已经得到研究^[24,25]. 近来, Yang等人^[14]提出了反向设计的思想, 即在给定的冲击力下, 基于冲击波模型对梯度多胞结构的相对密度分布进行设计, 并利用细观有限元模型证实了有效性. 然而, 该设计理论最终归结于求解一组非线性的微分方程组, Yang等人^[14]采用四阶龙格库塔法求出了一些算例的数值解, 这很难满足实际应用的需要. 为此, 本文拟运用级数法对密度分布的反向设计理论进行近似求解, 并通过细观有限元模型检查渐近解的有效性.

2 理论与数值模型

2.1 冲击波模型

考虑一个质量为 M 的物体以初速度 V_0 撞击一静止的梯度多胞杆, 如图1. 梯度多胞杆的相对密度在冲击方向上单调递增, 相对密度分布函数记为

$$\rho = \rho(X), \quad (1)$$

式中, X 为在冲击方向上的Lagrange坐标. 多胞材料在动态冲击下将产生局部化变形, 压溃带从冲击端向支撑端传播, 可以采用塑性冲击波模型来描述. 对于相对密度递增的梯度多胞材料, 变形局部化的特征更为显著, 因此适合用塑性冲击波模型进行描述.

Reid和Peng^[1]提出的刚性-理想塑性-锁定(R-PP-L)模型是最简单的材料模型, 该模型仅包含平台应力和锁定应变两个材料参数, 但其仅能对多胞材料力学响应进行一阶近似估计. Zheng等人^[11]提出了一个同样简单但更为精确的材料模型, 称为刚性-塑性硬化(R-PH)模型, 其应力-应变关系为

图1 (网络版彩图)梯度蜂窝杆在质量块冲击下的冲击波模型的示意图

Figure 1 (Color online) Schematic diagram for the shock front model of a graded foam rod under mass impact.

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_0 + \frac{C\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}, \quad (2)$$

式中, σ_0 和 C 分别为初始压溃应力和应变强化参数. 因此, R-PH模型也只包含两个材料参数. 对于特定类型的多胞材料, 初始压溃应力 σ_0 和应变强化参数 C 与相对密度 ρ 有关^[12,26], 本文考虑如下幂次关系

$$\begin{cases} \sigma_0(\rho) = s_2 \rho^2, \\ C(\rho) = C_2 \rho^2, \end{cases} \quad (3)$$

式中, s_2 和 C_2 为拟合参数. 本文采用的多胞材料为随机蜂窝, 如文献^[12]已给出 $s_2=0.439\sigma_{ys}$ 和 $C_2=0.127\sigma_{ys}$, 其中 σ_{ys} 为基体材料的屈服应力.

在冲击波模型中, 波阵面的Lagrange坐标记为 Φ , $\dot{\Phi}(t)$ 为冲击波波速, 波阵面后方的应变、应力和粒子速度随时间 t 发生变化, 记为 $\{\varepsilon_B(t), \sigma_B(t), v(t)\}$, 而波阵面前方的相应物理量为 $\{0, \sigma_0(\rho), 0\}$, 其中 $v(t)$ 即为冲击速度. 由应力波理论, 冲击波阵面上的质量守恒和动量守恒条件, 有

$$\begin{cases} v(t) - 0 = \dot{\Phi}(t)(\varepsilon_B(t) - 0), \\ \sigma_B(t) - \sigma_0(\rho) = \rho_s \rho \dot{\Phi}(t)(v(t) - 0), \end{cases} \quad (4)$$

式中, ρ_s 为基体材料的密度. 由式(2)–(4), 可以得到

$$\begin{cases} \varepsilon_B(t) = v(t) / (v(t) + c(\rho)), \\ \sigma_B(t) = \sigma_0(\rho) + \rho_s \rho v(t)(v(t) + c(\rho)), \\ \dot{\Phi}(t) = v(t) + c(\rho), \end{cases} \quad (5)$$

式中, $c(\rho)$ 为

$$c(\rho) = \sqrt{\frac{C(\rho)}{\rho_s \rho}} = c_2 \rho^{1/2}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{C_2}{\rho_s}}. \quad (6)$$

在冲击过程中, 质量块与冲击波波阵面后方的区域具有相同的运动速度 $v(t)$. 由牛顿运动定律, 有

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{F(t)}{M} = -\frac{\sigma_B(t)}{m + \rho_s \int_0^{\Phi(t)} \rho(X) dX}, \quad (7)$$

式中, $F(t)$ 为冲击力, $m=M/A_0$ 为单位面积上的质量, 其中 A_0 为梯度多胞杆的横截面面积. 对于给定的密度梯度分布, 通过联立控制方程(5), 以及初始条件为 $v(0)=V_0$ 和 $\Phi(0)=0$, 采用四阶龙格库塔法进行数值求解, 可以获得动态响应的结果.

2.2 反向设计及其渐近解

若质量块为被保护对象, 其受到的冲击力需控制在一定范围内. 在给定的冲击力的条件下, Yang等人^[14]提出了梯度多胞材料的反向设计方法. 本文考虑冲击力为恒值 F_0 的情况下, 基于R-PH冲击波模型, 对梯度多胞材料的密度分布进行反向设计, 采用渐近方法求出密度分布. 由上述R-PH冲击波模型, 可得反向设计理论的控制方程

$$\begin{cases} \frac{d\rho(\Phi(t))}{dt} = \frac{a_0 \rho_s \rho(3v(t) + 2c(\rho))}{\sigma'(\rho) + \rho_s v(t)(v(t) + c(\rho) + \rho c'(\rho))}, \\ \frac{d\Phi(t)}{dt} = v(t) + c(\rho), \quad v(t) = V_0 - a_0 t, \end{cases} \quad (8)$$

式中, $a_0=F_0/M$ 为冲击物体的加速度, 撇号表示对 ρ 的导数. 初始条件为 $v(0)=V_0$, $\Phi(0)=0$ 和 $\rho(\Phi(0))=\rho_0$, 其中冲击端的初始相对密度 ρ_0 由下式给出

$$\sigma_B(0) = s_2 \rho_0^2 + \rho_s \rho_0 V_0 (V_0 + c_2 \rho_0^{1/2}) = F_0 / A_0, \quad (9)$$

方程(8)没有显式解, 采用四阶龙格库塔法可以求得数值解, 以下称该解为精确解. 为方便应用, 本文将对方程(8)进行渐近分析, 获取近似的公式解.

以冲击端的相对密度 ρ_0 作为特征相对密度, 初始速度 V_0 作为特征速度. 由动量定理 $F_0 T_0 = M V_0$ 给出特征时间 $T_0 = V_0 / a_0$, 然后取特征长度 $L_0 = V_0 T_0$. 由此, 定义无量纲量 $\bar{\rho} = \rho / \rho_0$, $\bar{v} = v / V_0$, $\bar{t} = t / T_0$ 和 $\bar{\Phi} = \Phi / L_0$, 进而可以将方程(8)无量纲化为

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{\Phi}} = -\frac{\bar{\rho}(3\bar{v} + 2\bar{c}_2 \bar{\rho}^{1/2})}{2\bar{s}_2 \bar{\rho} + \bar{v}^2 + 3\bar{c}_2 \bar{v} \bar{\rho}^{1/2} / 2}, \\ \frac{d\bar{v}}{d\bar{\Phi}} = -(\bar{v} + \bar{c}_2 \bar{\rho}^{1/2})^{-1}, \quad \bar{v} = 1 - \bar{t}, \end{cases} \quad (10)$$

式中, $\bar{c}_2 = c_2 \rho_0^{1/2} / V_0$ 和 $\bar{s}_2 = s_2 \rho_0 / \rho_s V_0^2$. 初始条件 $\bar{\Phi}(0) = 0$, $\bar{v}(0) = 1$ 和 $\bar{\rho}(\bar{\Phi}(0)) = 1$.

式(10)的解 $\bar{\rho}$ 和 $\bar{v}$ 必然是与 $\bar{\Phi}$ 相关的, 假设解可以展成 $\bar{\Phi}$ 的幂级数形式

$$\begin{cases} \bar{\rho} = 1 + a_1 \bar{\Phi} + a_2 \bar{\Phi}^2 + \dots, \\ \bar{v} = 1 + b_1 \bar{\Phi} + b_2 \bar{\Phi}^2 + \dots, \end{cases} \quad (11)$$

式中, 各系数均与自变量无关. 将形式解(11)代入式(10)并展成关于 $\bar{\Phi}$ 的幂级数形式, 由级数法可以确定出一阶近似的系数

$$\begin{cases} a_1 = \frac{6 + 4\bar{c}_2}{(1 + \bar{c}_2)(2 + 4\bar{s}_2 + 3\bar{c}_2)}, \\ b_1 = -\frac{1}{1 + \bar{c}_2}, \end{cases} \quad (12)$$

以及二阶近似的系数

$$\begin{cases} a_2 = \frac{(5 + 4\bar{s}_2 + 5\bar{c}_2)[12 + \bar{c}_2(27 - 4\bar{s}_2 + 20\bar{c}_2 + 6\bar{c}_2^2)]}{(1 + \bar{c}_2)^3(2 + 4\bar{s}_2 + 3\bar{c}_2)^3}, \\ b_2 = -\frac{1 + 2\bar{s}_2 - \bar{c}_2^2}{(1 + \bar{c}_2)^3(2 + 4\bar{s}_2 + 3\bar{c}_2)}, \end{cases} \quad (13)$$

同理, 可求出更高阶近似的系数, 本文只考虑到二阶精度. 因此, 相对密度分布的渐近解为

$$\rho(X) = \rho_0 \left[1 + a_1 X / L_0 + a_2 (X / L_0)^2 + \dots \right]. \quad (14)$$

该渐近解的自洽性将通过与精确解和细观有限元模拟结果的比较进行检验.

2.3 细观有限元模型

采用变胞元尺寸的方法^[4,8]生成二维梯度蜂窝结构, 并建立相应的细观有限元模型. 在区域 A 内, 随机进行撒点, 并要求任意两个胞元核点 i 和 j 之间的距离不小于当地允许值, 即

$$\delta_{ij} \geq (1 - k) \cdot 2h / \rho(X_{ij}), \quad (15)$$

式中, k 为胞元不规则度, h 为胞元壁厚, $\rho(X_{ij})$ 为两核点中心位置对应的相对密度, $X_{ij} = (X_i + X_j) / 2$. 本文中, $k=0.2$, $h=0.24$ mm. 基体材料为理想弹塑性, 密度为 $\rho_s=2700$ kg/m³, 杨氏模量为 $E_s=69$ GPa, 泊松比为 $\nu_s=0.3$, 屈服应力为 $\sigma_{ys}=175$ MPa. 运用ABAQUS/ Explicit进行数值模拟, 基体材料的单元设为壳单元S4R. 所

有可能的接触都设置为摩擦系数为0.02的通用接触, 离面方向上的位移均受到限制以模拟平面应变状态. 在面内, 试件宽度为50 mm, 长度由相应的设计方案给出. 在面外, 厚度方向为1 mm, 即横截面积为 $A_0=50\text{ mm}\times 1\text{ mm}$. 冲击质量为 $M=4\text{ g}$, 初始冲击速为 $V_0=70\text{ m/s}$ 和限定的冲击力 $F_0=120\text{ N}$. 通过网格收敛性分析, 模型中平均胞元棱上以有6个单元为原则划分网格, 且单元横截面上有5个积分点, 模型单元长度约为0.31 mm. 上述参数代入式(9)中, 可以确定初始相对密度为0.0935. 模型左右两侧设置两个刚性板, 一个固支并与试件密度大的一端接触, 另一个赋予质量和初速度以模拟质量块冲击, 如图2所示.

3 结果与讨论

3.1 渐近解与精确解的比较

由上述数据, 可以确定 $\bar{\varepsilon}_2=0.3964$ 和 $\bar{\varepsilon}_2=0.5431$. 代入式(12)和(13), 可以确定一阶近似解的系数 $a_1=1.0372$ 和 $b_1=-0.7205$, 以及二阶近似解的系数 $a_2=0.5850$ 和 $b_2=-0.1348$. 分别将渐近解与精确解进行比较, 如图3, 可以发现准确的相对密度分布呈现非线性, 二阶近似解与精确解基本吻合. 因此, 二阶近似解具有较高的精确度, 可以方便地应用于耐撞性设计.

梯度多胞试件的长度也是重要的设计量. 这里通过比较冲击速度与冲击波阵面位置的关系, 如图4, 检查渐近解的有效性, 并通过冲击速度降为0时确定试件的有效长度. 随着冲击速度的减少, 冲击波波阵面移动的速度变小. 冲击波模型的精确解给出试件的长度为168.2 mm. 一阶近似解在初期时与精确解吻合, 但随

图2 梯度蜂窝杆的有限元模型及其变形

Figure 2 Finite element model and deformation patterns of a graded foam rod.

图3 (网络版彩图)梯度多胞杆相对密度分布对比图

Figure 3 (Color online) Comparisons of different solutions for relative density distribution of Graded cellular rod.

图4 (网络版彩图)不同冲击波模型速度随波阵面位置变化情况

Figure 4 (Color online) Variations of the impact velocity with the Lagrangian location of shock wave front for different R-PH shock models.

着波阵面的传播速度的减小, 与精确解之间的误差逐渐增大, 波阵面停止的位置大于精确解给出的位置, 一阶近似解给出的试件长度为192.7 mm. 由于一阶近似解给出的相对密度分布整体上偏小, 因此所需的试件长度较长. 二阶近似解与精确解基本吻合, 波阵面停止位置为168.8 mm. 因此, 采用二阶近似解可以有效地预测试件的长度.

对所设计的相对密度分布代回冲击波模型, 可以检查理论计算过程. 因此, 我们将相对密度分布的一阶和二阶近似代入方程(7), 通过数值求解确定出冲击力的历史曲线, 见图5. 由图可见, 二阶精度的相对密度分布给出的冲击力与目标值120 N基本一致, 而一阶精度的相对密度给出的冲击力较小. 尽管一阶精度的设

图5 (网络版彩图)不同冲击波模型冲击力随时间的变化
Figure 5 (Color online) Impact forces versus impact time for different R-PH shock models.

计较二阶精度的设计差, 但是实际上一阶精度的设计是偏于安全的, 其仍可以有效地保护冲击物体. 考虑到设计空间的限制, 显然二阶精度的设计对空间的利用率较高.

3.2 细观有限元模拟的验证

根据冲击波模型反向设计出的梯度多胞材料的相对密度分布, 生成了相应的细观有限元模型. 这里通过比较细观有限元的冲击力与设计目标值的差异, 如图6, 来验证渐近解密度设计的自洽性. 冲击力的有限元结果中, 二阶近似模型结果基本在设计目标值附近振荡, 反映了其设计很好地控制了冲击力的演化. 细观有限元模型给出的结果是振荡的, 产生振荡的主要原因为: 初始阶段的振荡主要是由于刚性板和计算模型的罚函数接触算法造成的; 后期低频的振荡是由于胞元压溃造成的; 而后期高频的振荡是由于胞元压溃产生的应力波在多胞结构复杂构型中传播和相互作用的结果. 一阶近似结果较低于二者, 这与理论预测结果基本一致, 见图5. 渐近反向设计的有限元结果基本与理论预测一致, 二阶近似的结果已具有足够精确, 渐近解是自洽的.

通过细观有限元模型速度为0时刻的实际变形的对比, 见图7, 模型中都存在未变形段, 并没有完全压实. 基于R-PH冲击波模型的设计, 在压缩后期实际上局部应变已经变小, 说明了R-PH冲击波模型的设计是偏安全的. 一阶与二阶近似模型的长度分别为192.7 mm和168.8 mm, 但二者未压实段长度基本相同.

图6 (网络版彩图)不同近似细观有限元模型的冲击力结果与理论值的比较

Figure 6 (Color online) Comparison of impact forces obtained from cell-based finite element models designed based on the two approximate solutions of relative density distribution.

图7 (网络版彩图)冲击度为0时不同密度分布模型的变形对比图: (a) 一阶近似模型, (b) 二阶近似模型, (c) 均匀分布模型

Figure 7 (Color online) Comparison of deformation patterns of different cell-based finite element models: (a) First-order approximate model, (b) second-order approximate model and (c) uniform model.

这表明了二阶近似模型消耗了更少的材料空间吸收了与一阶模型等量的冲击能量, 说明了二阶近似模型对于材料空间利用率上优于一阶近似模型. 图7中一阶近似模型和均匀模型均具有整体失稳的趋势, 这是在冲击后期形成的, 此时冲击速度较低(<30 m/s), 胞元的随机性可能导致形成随机剪切的变形带, 造成整体失稳的趋势.

3.3 梯度蜂窝与均匀蜂窝的比较

对于给定空间和重量限制的情况下, 均匀密度分布与密度梯度多胞材料的耐撞性差异的比较, 可以有效地说明耐撞性设计的必要性. 图7中给出了均匀密度多胞材料的细观有限元模型的变形情况, 该模型的

尺寸和质量与二阶近似模型一致, 即保持平均密度一致, 相对密度同为0.1704. 均匀密度模型的冲击力存在明显的初始峰值, 且明显高于二阶近似模型结果和设计目标, 见图8. 随时间变化呈现递减趋势, 后期小于设计目标值, 冲击时间长于二阶近似模型和设计目标值. 由于撞击初始阶段速度最高, 均匀模型撞击端相对密度(0.1707)大于二阶近似模型(0.0935), 其对应的压溃应力和应变强化参数皆偏高, 从而对应的波后应力较大, 于是出现了冲击力峰值. 后期随着冲击速度的减弱, 整体波后应力随着速度的减弱而衰减, 其冲击力呈递减趋势, 并低于设计目标值. 但二阶近似模型的密度分布是单调递增的, 其设计弥补了因速度减弱而导致的冲击力的衰减, 从而很好地控制了冲击力. 相比于均匀密度的多胞材料, 梯度多胞材料的耐撞性设计更优.

均匀模型与梯度模型的最终变形的比较见图7. 同等冲击速度下, 当速度降为0时, 二阶近似模型的变形段更长, 其材料局部化变形基本以逐层压溃为主, 提高了材料利用率. 而均匀模型的变形段较短, 其变形模式基本是逐层压溃与随机剪切带的耦合作用, 其材料压实更困难, 对于材料空间利用率上较弱. 梯度模型在设计材料空间利用率更高.

3.4 在不同初始冲击速度下的响应

额定的冲击质量和初始冲击速度是确保所设计的吸能材料能够提供安全性保护的前提. 在特定条件下设计的吸能部件, 只能满足特定条件下的耐撞性要求. 这里以不同的初始冲击速度为例, 分析上述设计的动态响应情况. 本节中以相对密度分布的二阶近似解作为设计结果, 相应的额定初始冲击速度为70 m/s. 我们通过冲击波模型和细观有限元模型, 分析该设计在初始冲击速度为40 m/s, 80 m/s和120 m/s的响应情况. 图9给出了这三种初始冲击速度下的冲击力历史曲线. 由图可见, 冲击波模型很好地表征了冲击过程中的响应, 即冲击波模型的结果与细观有限元模拟结果在趋势上完全一致. 因此, 以下只就冲击波模型的结果进行分析.

当初始冲击速度(如80 m/s)略高于额定冲击速度时, 冲击力也略高于额定的冲击力. 当初始冲击速度(如120 m/s)显著地高于额定冲击速度时, 冲击力也显著地高于额定冲击力. 此时, 冲击力在初期较大, 随后

图8 (网络版彩图)均匀与二阶近似密度分布的细观有限元模型的冲击力的对比

Figure 8 (Color online) Comparison of impact forces obtained from cell-based finite element models designed based on the second-order approximate solution and the uniform distribution of relative density.

图9 (网络版彩图)不同速度冲击下二阶近似密度分布的细观有限元模型冲击力的比较

Figure 9 (Color online) Comparison of impact forces obtained from cell-based finite element models designed based on the second-order approximate distribution of relative density under different impact velocity loadings.

呈现递减的趋势. 为降低冲击力, 可以通过减低相对密度实现, 但带来的问题是所需的吸能部件变长, 因此, 在设计空间允许的情况下可以通过减低相对密度获得更大的额定冲击速度. 图9中的虚线是指在增加试件长度时的冲击力的响应, 即在原设计中对于太高的冲击速度是不足以吸收所有的冲击能量的. 当初始冲击速度(如40 m/s)较低时, 冲击力也较低, 并呈现递增的趋势. 这是因为在冲击过程中, 尽管冲击速度在减少, 但被压溃的多胞材料的相对密度随着冲击的进行逐渐增大,

此时多胞材料压溃的应力主要由相对密度决定而受冲击速度的影响较小. 通过图9可以注意到, 不同的初始冲击速度下, 冲击力在后期都趋近于额定的冲击力, 这说明引入梯度多胞材料可以在冲击后期保证冲击力处于相对较稳定的水平上, 在超出额定冲击力下, 即使不能保证安全, 也能维持较平缓的冲击力, 从而实现冲击物体在较稳定的减速度作用下停下来. 通过分析反向设计的渐近解的各项系数可知, 在保持其他参数不变时, 改变初始冲击速度, 所需的相对密度分布是不一样的, 因此密度梯度吸能器的耐撞性设计具有一定的针对性.

4 结论

本文进一步探讨了基于非线性冲击波模型反向设计梯度多胞结构的耐撞性设计方法, 通过运用级数法获得了相对密度分布的渐近解, 并对其有效性进行了

验证. 通过与精确解的比较表明, 一阶近似解(即线性近似解)的精度不够, 而二阶近似解具有很高的精度. 通过与细观有限元模型比较表明, 尽管一阶近似的设计偏离预期的结果, 但其提供的设计在空间允许的情况下是偏于安全的; 而二阶近似的设计与预期的结果基本一致, 可以有效地指导耐撞性设计. 本文还探讨了初始冲击速度对所设计的梯度多胞结构的冲击响应的影响, 结果表明特定的相对密度分布的设计只适用于特定的冲击情形. 这与均匀的多胞材料是一样的, 但是引入梯度设计, 可以有效地控制冲击后期的冲击力维持在一定的水平, 以提供稳定的减速度. 对于不同类型的多胞材料, 其初始压溃应力和应变强化参数与相对密度的关系可能不同, 这对本文的渐近解的结果有一定的影响, 但本文提供的方法具有一般性, 对指导梯度多胞材料的耐撞性设计很有帮助. 此外, 拓展可计及基体材料的应变率敏感性和多胞材料的率敏感性^[11,26]的分析模型将有助于提高设计精度.

参考文献

- 1 Reid S R, Peng C. Dynamic uniaxial crushing of wood. *Int J Impact Eng*, 1997, 19: 531–570
- 2 Gibson L J, Ashby M F. *Cellular Solids: Structure and Properties*. Cambridge University Press, 1999
- 3 Ashby M F, Evans T, Fleck N A, et al. *Metal Foams: A Design Guide*. Elsevier, 2000
- 4 Wang X K, Zheng Z J, Yu J L, et al. Impact resistance and energy absorption of functionally graded cellular structures. *Appl Mech Mater*, 2011, 69: 73–78
- 5 Li K, Gao X L, Subhash G. Effects of cell shape and cell wall thickness variations on the elastic properties of two-dimensional cellular solids. *Int J Solids Struct*, 2005, 42: 1777–1795
- 6 Li K, Gao X L, Wang J. Dynamic crushing behavior of honeycomb structures with irregular cell shapes and non-uniform cell wall thickness. *Int J Solids Struct*, 2007, 44: 5003–5026
- 7 Gibson L J. Mechanical behavior of metallic foams. *Annu Rev Mater Sci*, 2000, 30: 191–227
- 8 Wang X K, Zheng Z J, Yu J L. Crashworthiness design of density-graded cellular metals. *Theor Appl Mech Lett*, 2013, 3: 031001
- 9 Shen C J, Yu T X, Lu G. Double shock mode in graded cellular rod under impact. *Int J Solids Struct*, 2013, 50: 217–233
- 10 Zheng J, Qin Q, Wang T J. Impact plastic crushing and design of density-graded cellular materials. *Mech Mater*, 2016, 94: 66–78
- 11 Zheng Z J, Wang C F, Yu J L, et al. Dynamic stress–strain states for metal foams using a 3D cellular model. *J Mech Phys Solids*, 2014, 72: 93–114
- 12 Cai Z Y, Ding Y Y, Wang S L, et al. Anti-blast analysis of graded cellular sacrificial cladding (in Chinese). *Explosion Shock Waves*, 2017, 37: 396–404 [蔡正宇, 丁圆圆, 王士龙, 等. 梯度多胞牺牲层的抗爆炸分析. *爆炸与冲击*, 2017, 37: 396–404]
- 13 Ding Y Y, Wang S L, Zhao K, et al. Blast alleviation of cellular sacrificial cladding: A nonlinear plastic shock model. *Int J Appl Mech*, 2016, 08: 1650057
- 14 Yang J, Wang S L, Ding Y Y, et al. Crashworthiness of graded cellular materials: A design strategy based on a nonlinear plastic shock model. *Mater Sci Eng-A*, 2017, 680: 411–420
- 15 Zheng Z J, Yu J L, Li J R. Dynamic crushing of 2D cellular structures: A finite element study. *Int J Impact Eng*, 2005, 32: 650–664
- 16 Ajdari A, Nayeib-Hashemi H, Vaziri A. Dynamic crushing and energy absorption of regular, irregular and functionally graded cellular structures.

- [Int J Solids Struct](#), 2011, 48: 506–516
- 17 Zhang X C, Liu Y. Research on the dynamic crushing of honeycombs with density gradient. *Eng Mech*, 2012, 29: 372–377 [张新春, 刘颖. 密度梯度蜂窝材料动力学性能研究. *工程力学*, 2012, 29: 372–377]
 - 18 Wu H X, Liu Y. Influences of density gradient variation on mechanical performances of density-graded honeycomb materials. *Explosion Shock Waves*, 2013, 33: 163–168 [吴鹤翔, 刘颖. 梯度变化对密度梯度蜂窝材料力学性能的影响. *爆炸与冲击*, 2013, 33: 163–168]
 - 19 Liu Y, Wu H X, Wang B. Gradient design of metal hollow sphere (MHS) foams with density gradients. *Compos Part B-Eng*, 2012, 43: 1346–1352
 - 20 Zhang J J, Wang Z H, Zhao L M. Dynamic response of functionally graded cellular materials based on the Voronoi model. *Compos Part B-Eng*, 2015, 85: 176–187
 - 21 Fan J H, Zhang J J, Wang Z H, et al. Dynamic crushing behavior of random and functionally graded metal hollow sphere foams. *Mater Sci Eng-A*, 2013, 561: 352–361
 - 22 Koohbor B, Kidane A. Design optimization of continuously and discretely graded foam materials for efficient energy absorption. *Mater Des*, 2016, 102: 151–161
 - 23 Karagiozova D, Alves M. Stress waves in layered cellular materials—Dynamic compaction under axial impact. *Int J Mech Sci*, 2015, 101–102: 196–213
 - 24 Cui L, Kiernan S, Gilchrist M D. Designing the energy absorption capacity of functionally graded foam materials. *Mater Sci Eng-A*, 2009, 507: 215–225
 - 25 Liu J G, Hou B, Lu F Y, et al. A theoretical study of shock front propagation in the density graded cellular rods. *Int J Impact Eng*, 2015, 80: 133–142
 - 26 Wang S L, Ding Y Y, Wang C F, et al. Dynamic material parameters of closed-cell foams under high-velocity impact. *Int J Impact Eng*, 2017, 99: 111–121

A simplified model and its asymptotic solution for the crashworthiness design of graded cellular material

CHANG BaiXue^{1,2}, ZHENG ZhiJun^{1*}, ZHAO Kai¹ & YU JiLin¹

¹ CAS Key Laboratory of Mechanical Behavior and Design of Materials, Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China

² State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China

Cellular materials have strong energy absorption capacity and have been extensively used in crashworthiness design of structures. The mechanical responses of cellular materials are related to their relative density. Introducing a density gradient to cellular materials may further improve their crashworthiness. A backward design method based on a nonlinear plastic shock model was developed to meet the crashworthiness requirement of protecting a mass when impinging a graded cellular rod. For the case of constant impact force, an asymptotic solution to the density distribution of graded cellular rod is obtained in this paper. The density distributions between the explicit asymptotic solution and the exact solution numerically obtained with a fourth-order Runge-Kutta scheme have been compared. The first-order approximate solution is a linear approximation, and the second-order approximate prediction is basically consistent with the numerical solution. For the impact force history, the first-order approximate prediction has a large deviation, and the second-order approximate prediction has a slight deviation. For practical application the second-order approximate solution seems to be accurate enough. Cell-based finite element models are employed to verify the asymptotic solution. The finite element models have been constructed and computed via ABAQUS/Explicit code. Samples of graded cellular rods designed from the asymptotic solution are tested numerically. The predictions using the second-order approximate solution of density distribution is very close to the finite element results. The design using the first-order approximate solution is not accurate enough, but in fact it is not so bad. Compared the uniform density distribution, the second-order approximate prediction is good for the crashworthiness optimization. The design of density distribution for a specific impact scenario is found to be inappropriate for much high velocity impact. In summary, a case study shows that the second-order approximate solution is very close to the exact solution and it is good enough for the design. The backward design method and the asymptotic solution of density distribution are helpful to guide the crashworthiness design of graded cellular materials.

graded cellular material, crashworthiness, backward design method, shock model, asymptotic solutions

PACS: 43.28.Mw, 81.70.Bt, 81.40.Lm

doi: [10.1360/SSPMA2018-00162](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00162)