锥中调和函数的积分表示

乔蕾^{①*}, 邓冠铁^②^① 河南财经政法大学数学与信息科学系, 郑州 450002;^② 北京师范大学数学科学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京 100875

E-mail: qiaocqu@163.com, denggt@bnu.edu.cn

收稿日期: 2010-12-25; 接受日期: 2011-04-19; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11071020)、高等学校博士点专项科研基金 (批准号: 20100003110004) 和河南省科技厅科技攻关科学基金 (批准号: 112102310519) 资助项目

摘要 本文证明了锥内一类调和函数 h , 若其正部 $h^+ = \max\{h, 0\}$ 满足一种增长条件, 则 h 能被其边界值的积分表示. 同时证明了其负部 $h^- = \max\{-h, 0\}$ 也能被类似的一种增长条件所控制. 所得结论推广了解析函数和调和函数在上半空间中关于积分表示的相关结果.

关键词 积分表示 调和函数 锥**MSC (2000) 主题分类** 31B05, 31B10

1 引言

设 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}_+$ 分别表示所有实数和正实数组成的集合. $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 是 n 维 Euclid 空间. $P = (X, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. $|P - Q|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中两点 P 和 Q 的 Euclid 距离. 特别地, $|P - O|$ 表示 P 到 $\mathbb{R}^n$ 中原点 O 的距离, 简计为 $|P|$. 如果集合 $S \subset \mathbb{R}^n$, 则 ∂S 和 $\bar{S}$ 分别表示 S 的边界和闭包. $B(P, r)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以 $P (\in \mathbb{R}^n)$ 为球心, $r (> 0)$ 为半径的开球. $S_r = \partial B(O, r)$.

引入球面坐标系 $(r, \Theta) \in \mathbb{R}^n$, 其中 $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$, 它与 Descartes 坐标 $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ 相对应, 其中 $x_n = r \cos \theta_1$.

分别记 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球和上半单位球为 S^{n-1} 和 S_+^{n-1} . 为了方便起见, $(1, \Theta) \in S^{n-1}$ 记为 Θ . $\{\Theta; (1, \Theta) \in \Omega \subset S^{n-1}\}$ 记为 Ω . 如果 $\Xi \subset \mathbb{R}_+$ 且 $\Omega \subset S^{n-1}$, 则 $\{(r, \Theta) \in \mathbb{R}^n; r \in \Xi, (1, \Theta) \in \Omega\}$ 简记为 $\Xi \times \Omega$. 锥 $C_n(\Omega) = \mathbb{R}_+ \times \Omega$, 其中 $\Omega \subset S^{n-1}$. 如果 $\Omega = S_+^{n-1}$, 则半空间 $C_n(S_+^{n-1})$ 是一个特殊的锥, 记为 T_n . 记 $C_n(\Omega; I) = I \times \Omega$, $S_n(\Omega; I) = I \times \partial\Omega$, 其中 I 是 $\mathbb{R}$ 上的一个区间. 记 $S_n(\Omega; r)$ 为 $C_n(\Omega) \cap S_r$. 简记 $S_n(\Omega; (0, +\infty))$ 为 $S_n(\Omega)$, 表示 $\partial C_n(\Omega) - \{O\}$.

我们说, 一个集合 $E \subset C_n(\Omega)$ 有一个覆盖 $\{r_k, R_k\}$, 如果存在一系列球 $\{B_k\}$, 其圆心在 $C_n(\Omega)$ 中, 使得 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, 其中 r_k 是球 B_k 的半径且 R_k 是球 B_k 的球心到原点的距离.

对于两个正函数 h_1 和 h_2 , $h_1 \approx h_2$ 表示存在一个正数 a , 使得 $a^{-1}h_1 \leq h_2 \leq ah_1$. u^+ 和 u^- 分别表示 $\max\{u, 0\}$ 和 $\max\{-u, 0\}$. 记 $d\sigma_Q$ 是 $S_n(\Omega)$ 中的曲面面积元素, dS_r 是 S_r 中的曲面面积元素且 dw 是 $\mathbb{R}^n$ 中 Euclid 体积元素.

设 $\Omega \subset S^{n-1}$ 有光滑的边界. 考虑 Dirichlet 问题 (参见文献 [1, 41 页])

$$(\Lambda_n + \lambda)\varphi = 0, \quad \Omega, \quad (1.1)$$

$$\varphi = 0, \quad \partial\Omega,$$

其中 Δ_n 是 Laplace 算子 Δ_n 的球面部分

$$\Delta_n = \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\Delta_n}{r^2}.$$

我们记边界值问题 (1.1) 的最小特征值为 λ , 与其相对应正规化后正的特征函数为 $\varphi(\Theta)$, $\int_{\Omega} \{\varphi(\Theta)\}^2 dS_1 = 1$.

函数

$$r^{\aleph^{\pm}} \varphi(\Theta)$$

在 $C_n(\Omega)$ 中调和, 属于 $C^2(C_n(\Omega) \setminus \{O\})$ 类且在 $S_n(\Omega)$ 上取值为零, 其中

$$2\aleph^{\pm} = -n + 2 \pm \sqrt{(n-2)^2 + 4\lambda}.$$

为了简洁起见, 记 χ 为 $\aleph^+ - \aleph^-$. 如果 $\Omega = \mathbf{S}_+^{n-1}$, 则 $\aleph^+ = 1$, $\aleph^- = 1-n$ 且 $\varphi(\Theta) = (2nw_n^{-1})^{1/2} \cos \theta_1$, 其中 w_n 是 $\mathbf{S}^{n-1}$ 的曲面面积 $2\pi^{n/2} \{\Gamma(n/2)\}^{-1}$.

为了后面考虑问题方便, 我们假定 $\partial\Omega$ 二阶连续可微, $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ 且在 $\partial\Omega$ 上 $\frac{\partial\varphi}{\partial n} > 0$ (在此及以后, $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示沿着内法向微分).

由特征函数的性质 (参见文献 [2, 7-8 页]), 知

$$\varphi(\Theta) \approx \text{dist}(\Theta, \partial\Omega) \quad (\Theta \in \Omega). \quad (1.2)$$

令 $\delta(P) = \text{dist}(P, \partial C_n(\Omega))$, 则对于任意的 $P = (1, \Theta) \in \Omega$, 有 (参见文献 [3])

$$\varphi(\Theta) \approx \delta(P). \quad (1.3)$$

设 $u(r, \Theta)$ 是 $C_n(\Omega)$ 内的一个函数. 任意 $r \in \mathbb{R}_+$, 如果积分

$$\int_{\Omega} u(r, \Theta) \varphi(\Theta) dS_1$$

存在, 我们记其为 $N_u(r)$. 如果

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\aleph^+} N_u(r)$$

存在, 我们记其有穷或者无穷的极限为 U_u .

记 $C_n(\Omega)$ 中的 Green 函数为 $G_{C_n(\Omega)}(P, Q)$ ($P \in C_n(\Omega)$, $Q \in C_n(\Omega)$), 则对于任意固定的 $P \in C_n(\Omega)$ 和任意的 $Q \in S_n(\Omega)$, 锥中的 Poisson 核为

$$P_{C_n(\Omega)}(P, Q) = \frac{\partial G_{C_n(\Omega)}(P, Q)}{\partial n_Q},$$

且锥中的 Poisson 积分定义为:

$$PI_{C_n(\Omega)}[g](P) = \frac{1}{c_n} \int_{S_n(\Omega)} P_{C_n(\Omega)}(P, Q) g(Q) d\sigma_Q \quad (P \in C_n(\Omega)),$$

其中

$$c_n = \begin{cases} 2\pi, & n = 2, \\ (n-2)s_n, & n \geq 3, \end{cases}$$

g 为 $\partial C_n(\Omega)$ 中的连续函数, $\frac{\partial}{\partial n_Q}$ 是在 Q 点指向 $C_n(\Omega)$ 的内法向导数.

注 1^[4] 如果 $\Omega = S_+^{n-1}$. 则

$$G_{T_n}(P, Q) = \begin{cases} \log |P - Q^*| - \log |P - Q|, & n = 2, \\ |P - Q|^{2-n} - |P - Q^*|^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases}$$

其中 $Q^* = (Y, -y_n)$. 故, 任意两点 $P = (X, x_n) \in T_n$ 和 $Q = (Y, y_n) \in \partial T_n$, 有

$$P_{T_n}(P, Q) = \begin{cases} 2|P - Q|^{-2}x_n, & n = 2, \\ 2(n-2)|P - Q|^{-n}x_n, & n \geq 3. \end{cases}$$

本文考虑的函数 f 满足下面的条件:

$$\int_{S_n(\Omega)} \frac{|g(t, \Phi)|^p}{1+t^\gamma} d\sigma_Q < \infty, \quad (1.4)$$

其中 $1 \leq p < \infty$ 且 $\gamma \in \mathbb{R}$.

定义 $\mathbb{R}^n$ 上的正测度 λ 为

$$d\lambda(Q) = \begin{cases} |g(Q)|^p t^{-\gamma} d\sigma_Q, & Q = (t, \Phi) \in S_n(\Omega; (1, +\infty)), \\ 0, & Q \in \mathbb{R}^n - S_n(\Omega; (1, +\infty)), \end{cases}$$

其中 p 和 γ 如上所定义. 如果 g 是一个定义在 $\partial C_n(\Omega)$ 上的可测函数且满足 (1.4), 显然有 $\lambda(\mathbb{R}^n) < \infty$.

设 $\epsilon > 0$ 且 $\beta \geq 0$. 任意 $P = (r, \Theta) \in \mathbb{R}^n - \{O\}$, 定义极大值函数为

$$M(P; \lambda, \beta) = \sup_{0 < \rho < \frac{r}{2}} \frac{\lambda(B(P, \rho))}{\rho^\beta}.$$

记集合 $\{P = (r, \Theta) \in \mathbb{R}^n - \{O\}; M(P; \lambda, \beta)r^\beta > \epsilon\}$ 为 $E(\epsilon; \lambda, \beta)$.

Siegel-Talvila 在文献 [5, 推论 2.1] 中得到下面的结论.

定理 A 如果 g 是 ∂T_n 中的可测函数, 使得

$$\int_{\partial T_n} \frac{|g(Q)|}{1+|Q|^n} dQ < \infty, \quad (1.5)$$

则调和函数 $PI_{T_n}[g](P) = c_n^{-1} \int_{\partial T_n} P_{T_n}(P, Q)g(Q)dQ$ 满足 $PI_{T_n}[g](P) = o(r \sec^{n-1} \theta_1)$, 其中 $r \rightarrow \infty$ 且 $P \in T_n$ (关于 $P_{T_n}(P, Q)$ 的表示形式见注 1).

关于锥内的 Dirichlet 问题, 我们有如下结论. 针对 $PI_{T_n}[g](P)$ 在半空间增长性的相关结果, 读者可以参看文献 [4].

定理 1 设 $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha \leq np$, $(-\aleph^+ - n + 2)p + n - 1 < \gamma \in \mathbb{R}$ 且

$$\aleph^+ > \frac{\gamma - n + 1}{p}, \quad \text{如果 } p > 1,$$

$$\aleph^+ \geq \gamma - n + 1, \quad \text{如果 } p = 1.$$

如果 g 是 $\partial C_n(\Omega)$ 中的连续函数且满足 (1.4), 则函数 $PI_{C_n(\Omega)}[g](P)$ 满足

$$PI_{C_n(\Omega)}[g](P) \in C^2(C_n(\Omega)) \cap C^0(\overline{C_n(\Omega)}),$$

$$\begin{aligned}
\Delta_n PI_{C_n(\Omega)}[g](P) &= 0, & P \in C_n(\Omega), \\
PI_{C_n(\Omega)}[g](P) &= g, & P \in \partial C_n(\Omega), \\
\lim_{r \rightarrow \infty, P \in C_n(\Omega) - E(\epsilon; \lambda, np - \alpha)} r^{\frac{n-\gamma-1}{p}} \{\varphi(\Theta)\}^{\frac{\alpha}{p}-1} PI_{C_n(\Omega)}[g](P) &= 0,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

其中 $E(\epsilon; \lambda, np - \alpha) (\subset C_n(\Omega))$ 有一个覆盖 $\{r_k, R_k\}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r_k}{R_k} \right)^{np-\alpha} < \infty. \tag{1.7}$$

注 2 若 $\Omega = \mathbf{S}_+^{n-1}$, $p = 1$ 且 $\gamma = \alpha = n$, 则 (1.4) 与 (1.5) 等价且 (1.7) 是有限个和, 例外集 $E(\epsilon; \lambda, 0)$ 是一个有界集, 从而 (1.6) 在 T_n 中成立. 这正是 Siegel-Talvila 的结论.

下面的推论 1 将定理 A 推广到锥中.

推论 1 如果 g 是 $\partial C_n(\Omega)$ 中的连续函数满足

$$\int_{S_n(\Omega)} \frac{|g(t, \Phi)|}{1 + t^{-\kappa+1}} d\sigma_Q < \infty, \tag{1.8}$$

则 $PI_{C_n(\Omega)}[g](P)$ 是 $C_n(\Omega)$ 内的调和函数且

$$\lim_{r \rightarrow \infty, P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega)} r^{-\kappa+1} \varphi^{n-1}(\Theta) PI_{C_n(\Omega)}[g](P) = 0.$$

由 $\varphi(\Theta)$ 的有界性, 可得

推论 2 如果 g 是 $\partial C_n(\Omega)$ 中的连续函数且满足 (1.8), 则

$$U_{PI_{C_n(\Omega)}[g]} = U_{PI_{C_n(\Omega)}[|g|]} = 0.$$

记函数类 A_Ω 为可测函数 $g(t, \Phi)$ ($Q = (t, \Phi) = (Y, y_n) \in C_n(\Omega)$) 且满足

$$\int_{C_n(\Omega)} \frac{|g(t, \Phi)| \varphi}{1 + t^{-\kappa+2}} dw < \infty \tag{1.9}$$

的函数组成. 而函数类 B_Ω 为可测函数 $h(t, \Phi)$ ($(t, \Phi) = (Y, y_n) \in S_n(\Omega)$) 且满足

$$\int_{S_n(\Omega)} \frac{|h(t, \Phi)|}{1 + t^{-\kappa}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma_Q < \infty \tag{1.10}$$

的函数组成.

若 $u(t, \Phi)$ 在 $C_n(\Omega)$ 中调和, 在 $\overline{C_n(\Omega)}$ 上连续, $u^+(t, \Phi) \in A_\Omega$ ($(t, \Phi) \in C_n(\Omega)$) 且 $u^+(t, \Phi) \in B_\Omega$ ($(t, \Phi) \in S_n(\Omega)$). 则我们记这类函数为 C_Ω .

注 3 若在 (1.9)–(1.10) 中取 $\Omega = \mathbf{S}_+^{n-1}$, 则

$$\int_{T_n} \frac{y_n |f(Y, y_n)|}{1 + t^{n+2}} dQ < \infty \quad \text{且} \quad \int_{\partial T_n} \frac{|g(Y, 0)|}{1 + t^n} dY < \infty.$$

定义在 T_n 上的调和函数 $h \geq 0$ 且 $h \in C_{\mathbf{S}_+^{n-1}}$, 则对于任意 $P = (X, x_n) \in T_n$, 存在一个常数 $c \geq 0$, 使得^[6–8]

$$h(P) = cx_n + PI_{T_n}[h](P). \tag{1.11}$$

半空间中, 邓在文献 [9–11] 中分别给出了解析函数和调和函数的积分表示形式. 受半空间中相关结论的启发, 我们将证明, 如果 $h \in C_\Omega$, 则一个类似于 (1.11) 的积分表示形式在锥中同样成立.

定理 2 若 $h(P) \in C_\Omega$, 则 $h(P) \in B_\Omega$.

定理 3 若 $h(P) \geq 0$ ($P \in C_n(\Omega)$) 且 $h(P) \in C_\Omega$, 则

$$h(P) = U_h r^{\mathbb{N}^+} \varphi(\Theta) + P I_{C_n(\Omega)}[h](P) \quad (P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega)). \quad (1.12)$$

2 引理

本文中, M 出现在不同的地方代表不同的常数, 它与问题中的变量无关.

引理 1

$$P_{C_n(\Omega)}(P, Q) \leq M r^{\mathbb{N}^-} t^{\mathbb{N}^+ - 1} \varphi(\Theta) \quad (2.1)$$

$$(\text{或 } P_{C_n(\Omega)}(P, Q) \leq M r^{\mathbb{N}^+} t^{\mathbb{N}^- - 1} \varphi(\Theta)), \quad (2.2)$$

其中 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega)$, $Q = (t, \Phi) \in S_n(\Omega)$ 满足 $0 < \frac{t}{r} \leq \frac{4}{5}$ (或 $0 < \frac{r}{t} \leq \frac{4}{5}$);

$$P_{C_n(\Omega)}(P, Q) \leq M \frac{\varphi(\Theta)}{t^{n-1}} + M \frac{r\varphi(\Theta)}{|P - Q|^n}, \quad (2.3)$$

其中 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega)$, $Q = (t, \Phi) \in S_n(\Omega; (\frac{4}{5}r, \frac{5}{4}r))$.

证明 由文献 [12, 引理 4 和注] 和 (1.2), 我们可以得到上述结论.

引理 2 任意 $Q' \in \partial C_n(\Omega)$ 和任意 $\epsilon > 0$, 存在 Q' 的一个领域 $B(Q')$ 和一个数 R ($0 < R < \infty$), 使得对于任意的 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega) \cap B(Q')$, 有

$$\frac{1}{c_n} \int_{S_n(\Omega; (R, \infty))} |P_{C_n(\Omega)}(P, Q)| |g(Q)| d\sigma_Q < \epsilon, \quad (2.4)$$

且 g 是定义在 $\partial C_n(\Omega)$ 中的上半连续函数. 则

$$\limsup_{P \in C_n(\Omega), P \rightarrow Q'} P I_{C_n(\Omega)}[g](P) \leq g(Q'). \quad (2.5)$$

证明 设 $Q' = (t', \Phi')$ 是 $\partial C_n(\Omega)$ 中的一个固定点且 $\epsilon > 0$. 由 (2.4), 对于任意 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega) \cap B(Q')$, 存在一个常数 R' ($0 < R' < \infty$), 使得

$$\frac{1}{c_n} \int_{S_n(\Omega; (R', \infty))} |P_{C_n(\Omega)}(P, Q)| |g(Q)| d\sigma_Q < \frac{\epsilon}{4}. \quad (2.6)$$

设 ϕ 是一个定义在 $\partial C_n(\Omega)$ 上的连续函数, 使得 $0 \leq \phi \leq 1$ 且

$$\phi = \begin{cases} 1, & S_n(\Omega; (0, R']) \cup \{O\}, \\ 0, & S_n(\Omega; (2R', \infty)). \end{cases}$$

若 j 是一个正整数且 $G_{C_n(\Omega; (0, j))}(P, Q)$ 是定义在 $C_n(\Omega; (0, j))$ 上的 Green 函数. 因为 $\Gamma_j(P, Q) = G_{C_n(\Omega)}(P, Q) - G_{C_n(\Omega; (0, j))}(P, Q)$ 在 $j \rightarrow \infty$ 时, $C_n(\Omega; (0, j))$ 一致单调收敛于 0, 则对于任意 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega) \cap B(Q')$, 存在一个整数 j' ($j' > 2R'$), 使得

$$\frac{1}{c_n} \int_{S_n(\Omega; (0, 2R'))} \left| \frac{\partial}{\partial n_Q} \Gamma_{j'}(P, Q) \right| |\phi(Q)g(Q)| d\sigma_Q < \frac{\epsilon}{4}. \quad (2.7)$$

对于任意 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega) \cap B(Q')$, 由 (2.6) 和 (2.7), 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_n} \int_{\partial C_n(\Omega)} P_{C_n(\Omega)}(P, Q) g(Q) d\sigma_Q \\ & \leq \frac{1}{c_n} \int_{S_n(\Omega; (0, 2R'))} \frac{\partial G_{C_n(\Omega; (0, j'))}(P, Q)}{\partial n_Q} \phi(Q) g(Q) d\sigma_Q \\ & \quad + \frac{1}{c_n} \int_{S_n(\Omega; (0, 2R'))} \left| \frac{\partial \Gamma_{j'}(P, Q)}{\partial n_Q} \right| |\phi(Q) g(Q)| d\sigma_Q + \frac{2}{c_n} \int_{S_n(\Omega; (R', \infty))} |P_{C_n(\Omega)}(P, Q)| |g(Q)| d\sigma_Q \\ & \leq \frac{1}{c_n} \int_{S_n(\Omega; (0, 2R'))} \frac{\partial G_{C_n(\Omega; (0, j'))}(P, Q)}{\partial n_Q} \phi(Q) g(Q) d\sigma_Q + \frac{3}{4} \epsilon. \end{aligned} \quad (2.8)$$

对于定义在 $\partial C_n(\Omega; [0, j'])$ 中的上半连续函数

$$\psi(Q) = \begin{cases} \phi(Q) g(Q), & S_n(\Omega; (0, 2R']) \cup \{O\}, \\ 0, & \partial C_n(\Omega; (0, j')) - S_n(\Omega; (0, 2R']) - \{O\}, \end{cases}$$

记 $C_n(\Omega; (0, j'))$ 上 Dirichlet 问题的 Perron-Wiener-Brelot 解为 $H_\psi(P; C_n(\Omega; (0, j')))$ [8], 可得

$$\frac{1}{c_n} \int_{S_n(\Omega; (0, 2R'))} \frac{\partial G_{C_n(\Omega; (0, j'))}(P, Q)}{\partial n_Q} \phi(Q) g(Q) d\sigma_Q = H_\psi(P; C_n(\Omega; (0, j'))) \quad (2.9)$$

(参见文献 [13, 定理 3]). 若 $C_n(\Omega; (0, j'))$ 在 O 点不是一个 Lipschitz 区域, 可以通过考虑一列当 $m \rightarrow \infty$ 时, 趋向于 $C_n(\Omega; (0, j'))$ 的 Lipschitz 区域 $C_n(\Omega; (\frac{1}{m}, j'))$, 从而可以证明 (2.9). 由文献 [2, 引理 8.20], 得

$$\limsup_{P \in C_n(\Omega), P \rightarrow Q'} H_\psi(P; C_n(\Omega; (0, j'))) \leq \limsup_{Q \in S_n(\Omega), Q \rightarrow Q'} \psi(Q) = g(Q').$$

故, 由 (2.8) 和

$$\limsup_{P \in C_n(\Omega), P \rightarrow Q'} \frac{1}{c_n} \int_{S_n(\Omega; (0, 2R'))} \frac{\partial G_{C_n(\Omega; (0, j'))}(P, Q)}{\partial n_Q} \phi(Q) g(Q) d\sigma_Q \leq g(Q')$$

知 (2.5) 式成立.

引理 3 [14, 15] 如果 $\epsilon > 0$, $\beta \geq 0$, λ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的正测度满足 $\lambda(\mathbb{R}^n) < \infty$. 则 $E(\epsilon; \lambda, \beta)$ 有一个覆盖 $\{r_k, R_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$), 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r_k}{R_k} \right)^\beta < \infty.$$

下面的引理将 Carleman 公式 (原指半空间中的解析函数 [16]) 推广到定义在光滑锥中的次调和函数 (参见文献 [17, 定理 1]).

引理 4 若 $R > r > 0$ 且 $u(t, \Phi)$ 是一个定义在 $C_n(\Omega; (r, R))$ 中的次调和函数, 则

$$\begin{aligned} \int_{C_n(\Omega; (r, R))} \left(\frac{1}{t^{-\aleph^-}} - \frac{t^{\aleph^+}}{R^\chi} \right) \varphi \Delta_n u dw &= \chi \int_{S_n(\Omega; R)} \frac{u \varphi}{R^{1-\aleph^-}} dS_R \\ &+ \int_{S_n(\Omega; (r, R))} u \left(\frac{1}{t^{-\aleph^-}} - \frac{t^{\aleph^+}}{R^\chi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma_Q + d_1(r) + \frac{d_2(r)}{R^\chi}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

其中

$$d_1(r) = \int_{S_n(\Omega; r)} \frac{\aleph^-}{r^{1-\aleph^-}} u \varphi - \frac{\varphi}{r^{-\aleph^-}} \frac{\partial u}{\partial n} dS_r,$$

$$d_2(r) = \int_{S_n(\Omega; r)} r^{\aleph^+} \varphi \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\aleph^+ u \varphi}{r^{1-\aleph^+}} dS_r.$$

引理 5 若 $h(r, \Theta)$ 是一个定义在 $C_n(\Omega)$ 中的调和函数, 在 $S_n(\Omega)$ 上连续且取值为零, 则 $h(r, \Theta) = U_h r^{\aleph^+} \varphi(\Theta)$.

证明 注意到 $h(r, \Theta)$ 在 $\{(r, \Theta) \in \mathbb{R}^n : (1, \Theta) \in \overline{\Omega}, 0 < r < \infty\}$ 是二阶连续可微 (参见文献 [18, 101–102 页]). 积分号下微分两次, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N_h(r)}{\partial r^2} &= \int_{\Omega} \frac{\partial^2 h(r, \Theta)}{\partial r^2} \varphi(\Theta) dS_1 \\ &= -\frac{n-1}{r} \int_{\Omega} \frac{\partial h(r, \Theta)}{\partial r} \varphi(\Theta) dS_1 - \frac{1}{r^2} \int_{\Omega} (\Lambda_n h) \varphi(\Theta) dS_1. \end{aligned}$$

另外, 由 Green 公式 (参见文献 [19, 第 387 页]), 知

$$\int_{\Omega} (\Lambda_n h) \varphi(\Theta) dS_1 = \int_{\Omega} h(\Lambda_n \varphi(\Theta)) dS_1.$$

故, 对于任意 r ($0 < r < \infty$), 得

$$\frac{\partial^2 N_h(r)}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial N_h(r)}{\partial r} - \frac{\lambda}{r^2} N_h(r) = 0.$$

由上式得

$$N_h(r) = Ar^{\aleph^+} + Br^{\aleph^-} \quad (0 < r < \infty),$$

其中 A 和 B 是与 r 无关的两个常数. 当 $r \rightarrow 0$ 时, $h(r, \Theta)$ 一致趋于零, 从而 $\lim_{r \rightarrow 0} N_h(r) = 0$. 故 $B = 0$. 若 $r \rightarrow \infty$, 则 $A = U_h$. 由 $N_h(r) = U_h r^{\aleph^+}$, 知引理 5 的结论成立.

3 定理的证明

定理 1 的证明 我们仅证明 $p > 1$, 因为 $p = 1$ 的证明类似.

固定 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega)$, 取常数 R , 使得 $R > \max\{1, \frac{5}{4}r\}$. 如果 $\aleph^+ > \frac{\gamma-n+1}{p}$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $(\aleph^- + \frac{\gamma}{p} - 1)q + n - 1 < 0$. 由 (1.4), (2.2) 和 Hölder 不等式, 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_n} \int_{S_n(\Omega; (R, \infty))} |P_{C_n(\Omega)}(P, Q)| |g(Q)| d\sigma_Q \\ & \leq M c_n^{-1} r^{\aleph^+} \varphi(\Theta) \left(\int_{S_n(\Omega; (\frac{5}{4}r, \infty))} t^{(\aleph^- + \frac{\gamma}{p} - 1)q} d\sigma_Q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{S_n(\Omega; (R, \infty))} |g(Q)|^p t^{-\gamma} d\sigma_Q \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq M' r^{\frac{\gamma-n+1}{p}} \varphi(\Theta) \left(\int_{S_n(\Omega; (R, \infty))} |g(Q)|^p t^{-\gamma} d\sigma_Q \right)^{\frac{1}{p}} \\ & < \infty, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $M' = M c_n^{-1} (\frac{5}{4})^{\aleph^- - 1 + \frac{\gamma}{p} + \frac{n-1}{q}} ((1 - \aleph^- - \frac{\gamma}{p})q + 1 - n)^{-\frac{1}{q}}$.

故, 对于任意的 $P \in C_n(\Omega)$, $PI_{C_n(\Omega)}[g](P)$ 是有穷的. 因为, 对于任意 $Q \in S_n(\Omega)$, $P_{C_n(\Omega)}(P, Q)$ 关于 $P \in C_n(\Omega)$ 是调和的, 所以 $PI_{C_n(\Omega)}[g](P)$ ($P \in C_n(\Omega)$) 是一个调和函数.

对于任意 $Q' \in \partial C_n(\Omega)$, 为了证明

$$\lim_{P \in C_n(\Omega), P \rightarrow Q'} PI_{C_n(\Omega)}[g](P) = g(Q'),$$

我们仅需对 $g(Q)$ 和 $-g(Q)$ 分别应用引理 2. 下面证明 (2.4) 成立. 对于任意 $Q' = (t', \Phi') \in \partial C_n(\Omega)$ 和 $\epsilon > 0$, 设 δ 是一个正整数. 由 (1.4) 和 (3.1), 存在一个常数 R , $R > \max\{1, 2(t' + \delta)\}$, 使得对于任意 $P \in C_n(\Omega) \cap B(Q', \delta)$, 有

$$\frac{1}{c_n} \int_{S_n(\Omega; (R, \infty))} |P_{C_n(\Omega)}(P, Q)| |g(Q)| d\sigma_Q < \epsilon.$$

故, 引理 2 中 (2.4) 式成立.

对上述 $\epsilon > 0$, 存在 $R_\epsilon > 1$, 使得

$$\int_{S_n(\Omega; (R_\epsilon, \infty))} \frac{|g(Q)|^p}{1+t^\gamma} d\sigma_Q < \epsilon.$$

取任意 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega) - E(\epsilon; \lambda, np - \alpha)$, 使得 $r > \frac{5}{4}R_\epsilon$. 记

$$c_n PI_{C_n(\Omega)}[g](P) \leq PI_1(P) + PI_2(P) + PI_3(P) + PI_4(P) + PI_5(P),$$

其中

$$\begin{aligned} PI_1(P) &= \int_{S_n(\Omega; (0, 1])} |P_{C_n(\Omega)}(P, Q)| |g(Q)| d\sigma_Q, \\ PI_2(P) &= \int_{S_n(\Omega; (1, R_\epsilon])} |P_{C_n(\Omega)}(P, Q)| |g(Q)| d\sigma_Q, \\ PI_3(P) &= \int_{S_n(\Omega; (R_\epsilon, \frac{4}{5}r])} |P_{C_n(\Omega)}(P, Q)| |g(Q)| d\sigma_Q, \\ PI_4(P) &= \int_{S_n(\Omega; (\frac{4}{5}r, \frac{5}{4}r))} |P_{C_n(\Omega)}(P, Q)| |g(Q)| d\sigma_Q, \\ PI_5(P) &= \int_{S_n(\Omega; [\frac{5}{4}r, \infty))} |P_{C_n(\Omega)}(P, Q)| |g(Q)| d\sigma_Q. \end{aligned}$$

如果 $\gamma > (-\aleph^+ - n + 2)p + n - 1$, 则 $(\aleph^+ - 1 + \frac{\gamma}{p})q + n - 1 > 0$. 由 (2.1) 和 Hölder 不等式, 我们可以得到下面的渐近性质:

$$\begin{aligned} PI_2(P) &\leq Mr^{\aleph^-} \varphi(\Theta) \int_{S_n(\Omega; (1, R_\epsilon])} t^{\aleph^+ - 1} |g(Q)| d\sigma_Q \\ &\leq Mr^{\aleph^-} \varphi(\Theta) \left(\int_{S_n(\Omega; (1, R_\epsilon])} |g(Q)|^p t^{-\gamma} d\sigma_Q \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{S_n(\Omega; (1, R_\epsilon])} t^{(\aleph^+ - 1 + \frac{\gamma}{p})q} d\sigma_Q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq Mr^{\aleph^-} R_\epsilon^{\aleph^+ + n - 2 + \frac{\gamma - n + 1}{p}} \varphi(\Theta), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$PI_1(P) \leq Mr^{\aleph^-} \varphi(\Theta), \quad (3.3)$$

$$PI_3(P) \leq M\epsilon r^{\frac{\gamma - n + 1}{p}} \varphi(\Theta). \quad (3.4)$$

如果 $\aleph^+ > \frac{\gamma - n + 1}{p}$, 则 $(\aleph^+ - 1 + \frac{\gamma}{p})q + n - 1 < 0$. 由 (2.2) 和 Hölder 不等式, 得

$$PI_5(P) \leq Mr^{\aleph^+} \varphi(\Theta) \int_{S_n(\Omega; [\frac{5}{4}r, \infty))} t^{\aleph^- - 1} |g(Q)| d\sigma_Q$$

$$\begin{aligned} &\leq Mr^{\aleph^+} \varphi(\Theta) \left(\int_{S_n(\Omega; [\frac{5}{4}r, \infty))} |g(Q)|^p t^{-\gamma} d\sigma_Q \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{S_n(\Omega; [\frac{5}{4}r, \infty))} t^{(\aleph^- - 1 + \frac{\gamma}{p})q} d\sigma_Q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq M\epsilon r^{\frac{\gamma-n+1}{p}} \varphi(\Theta). \end{aligned} \quad (3.5)$$

由 (2.3), 我们考虑下面不等式

$$PI_4(P) \leq PI_{41}(P) + PI_{42}(P),$$

其中

$$\begin{aligned} PI_{41}(P) &= M\varphi(\Theta) \int_{S_n(\Omega; (\frac{4}{5}r, \frac{5}{4}r))} t^{1-n} |g(Q)| d\sigma_Q, \\ PI_{42}(P) &= Mr\varphi(\Theta) \int_{S_n(\Omega; (\frac{4}{5}r, \frac{5}{4}r))} \frac{|g(Q)|}{|P-Q|^n} d\sigma_Q. \end{aligned}$$

与 $PI_5(P)$ 的渐近状态估计类似, 得

$$\begin{aligned} PI_{41}(P) &\leq M\varphi(\Theta) \int_{S_n(\Omega; (\frac{4}{5}r, \frac{5}{4}r))} t^{\aleph^+ + \aleph^- - 1} |g(Q)| d\sigma_Q \\ &\leq Mr^{\aleph^+} \varphi(\Theta) \int_{S_n(\Omega; (\frac{4}{5}r, \infty))} t^{\aleph^- - 1} |g(Q)| d\sigma_Q \\ &\leq M\epsilon r^{\frac{\gamma-n+1}{p}} \varphi(\Theta). \end{aligned} \quad (3.6)$$

下面估计 $PI_{42}(P)$. 设 $b(>0)$ 充分小, 任意 $P=(r, \Theta) \in \Pi(b)$, 使得 $S_n(\Omega; (\frac{4}{5}r, \frac{5}{4}r)) \subset B(P, \frac{1}{2}r)$, 其中

$$\Pi(b) = \left\{ P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); \inf_{z \in \partial\Omega} |(1, \Theta) - (1, z)| < b, 0 < r < \infty \right\}.$$

我们将 $C_n(\Omega)$ 分成 $\Pi(b)$ 和 $C_n(\Omega) - \Pi(b)$ 两部分.

如果 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega) - \Pi(b)$, 则存在 b' , 使得 $|P-Q| \geq b'r$ ($Q \in S_n(\Omega)$), 与 $PI_{41}(P)$ 的渐近状态估计类似, 得

$$\begin{aligned} PI_{42}(P) &\leq M\varphi(\Theta) \int_{S_n(\Omega; (\frac{4}{5}r, \frac{5}{4}r))} t^{1-n} |g(Q)| d\sigma_Q \\ &\leq M\epsilon r^{\frac{\gamma-n+1}{p}} \varphi(\Theta). \end{aligned} \quad (3.7)$$

如果 $P = (r, \Theta) \in \Pi(b)$. 记

$$H_i(P) = \left\{ Q \in S_n\left(\Omega; \left(\frac{4}{5}r, \frac{5}{4}r\right)\right); 2^{i-1}\delta(P) \leq |P-Q| < 2^i\delta(P) \right\}.$$

因为 $S_n(\Omega) \cap \{Q \in \mathbb{R}^n : |P-Q| < \delta(P)\} = \emptyset$, 则

$$PI_{42}(P) = M \sum_{i=1}^{i(P)} \int_{H_i(P)} r\varphi(\Theta) \frac{|g(Q)|}{|P-Q|^n} d\sigma_Q,$$

其中 $i(P)$ 是正整数满足 $2^{i(P)-1}\delta(P) \leq \frac{r}{2} < 2^{i(P)}\delta(P)$.

由 (1.3), 得 $r\varphi(\Theta) \leq M\delta(P)$ ($P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega)$). 由 Hölder 不等式, 类似与 $PI_5(P)$ 的估计, 对于 $i = 0, 1, 2, \dots, i(P)$, 可得

$$\int_{H_i(P)} r\varphi(\Theta) \frac{|g(Q)|}{|P-Q|^n} d\sigma_Q$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2^{(1-i)n} \varphi(\Theta) \delta(P)^{\frac{\alpha-np}{p}} \int_{H_i(P)} r \delta(P)^{\frac{np-\alpha}{p}-n} |g(Q)| d\sigma_Q \\
&\leq M \{\varphi(\Theta)\}^{1-\frac{\alpha}{p}} \delta(P)^{\frac{\alpha-np}{p}} \int_{H_i(P)} r^{1-\frac{\alpha}{p}} |g(Q)| d\sigma_Q \\
&\leq M r^{n-\frac{\alpha}{p}} \{\varphi(\Theta)\}^{1-\frac{\alpha}{p}} \delta(P)^{\frac{\alpha-np}{p}} \int_{H_i(P)} t^{1-n} |g(Q)| d\sigma_Q \\
&\leq M \epsilon r^{\frac{\gamma-n-\alpha+1}{p}+n} \{\varphi(\Theta)\}^{1-\frac{\alpha}{p}} \left(\frac{\lambda(H_i(P))}{\{2^i \delta(P)\}^{np-\alpha}} \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

由 $P = (r, \Theta) \notin E(\epsilon; \lambda, np - \alpha)$, 得

$$\frac{\lambda(H_i(P))}{\{2^i \delta(P)\}^{np-\alpha}} \leq \frac{\lambda(B(P, 2^i \delta(P)))}{\{2^i \delta(P)\}^{np-\alpha}} \leq M(P; \lambda, np - \alpha) \leq \epsilon r^{\alpha-np} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, i(P) - 1)$$

且

$$\frac{\lambda(H_{i(P)}(P))}{\{2^i \delta(P)\}^{np-\alpha}} \leq \frac{\lambda(B(P, \frac{r}{2}))}{(\frac{r}{2})^{np-\alpha}} \leq \epsilon r^{\alpha-np}.$$

故

$$PI_{42}(P) \leq M \epsilon r^{\frac{\gamma-n+1}{p}} \{\varphi(\Theta)\}^{1-\frac{\alpha}{p}}. \quad (3.8)$$

由 (3.2)-(3.8), 当 $r \rightarrow \infty$, 知

$$PI_{C_n(\Omega)}[g](P) = o(r^{\frac{\gamma-n+1}{p}} \{\varphi(\Theta)\}^{1-\frac{\alpha}{p}}),$$

其中 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega; (R_\epsilon, +\infty)) - E(\epsilon; \lambda, np - \alpha)$. 再由引理 3, 即完成对定理 1 的证明.

定理 2 的证明 对于定义在 $C_n(\Omega; (1, R))$ 中的调和函数 h 应用 (2.10), 得

$$\begin{aligned}
m_+(R) + \int_{S_n(\Omega; (1, R))} h^+ \left(\frac{1}{t^{-\aleph^-}} - \frac{t^{\aleph^+}}{R^\chi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma_Q + d_1 + \frac{d_2}{R^\chi} \\
= m_-(R) + \int_{S_n(\Omega; (1, R))} h^- \left(\frac{1}{t^{-\aleph^-}} - \frac{t^{\aleph^+}}{R^\chi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma_Q,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
m_\pm(R) &= \chi \int_{S_n(\Omega; R)} \frac{h^\pm \varphi}{R^{1-\aleph^-}} dS_R, \\
d_1 &= \int_{S_n(\Omega; 1)} \aleph^- h \varphi - \varphi \frac{\partial h}{\partial n} dS_1, \\
d_2 &= \int_{S_n(\Omega; 1)} \varphi \frac{\partial h}{\partial n} - \aleph^+ h \varphi dS_1.
\end{aligned}$$

若 $R > 2$, 则

$$\begin{aligned}
m_-(R) + \left(1 - \frac{1}{2^\chi} \right) \int_{S_n(\Omega; (1, \frac{R}{2}))} \frac{h^-}{t^{-\aleph^-}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma_Q \\
\leq m_-(R) + \int_{S_n(\Omega; (1, R))} h^- \left(\frac{1}{t^{-\aleph^-}} - \frac{t^{\aleph^+}}{R^\chi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma_Q
\end{aligned}$$

$$\leq m_+(R) + \int_{S_n(\Omega; (1, R))} \frac{h^+}{t^{-\kappa^-}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma_Q + |d_1| + |d_2|. \quad (3.9)$$

由 $h \in C_\Omega$ 和 (1.9), 得

$$\int_1^\infty \frac{m_+(R)}{R} dR = \int_{C_n(\Omega; (1, \infty))} \frac{h^+ \varphi}{t^{-\kappa^-+2}} dw \leq 2 \int_{C_n(\Omega)} \frac{h^+ \varphi}{1+t^{-\kappa^-+2}} dw < \infty.$$

由上式知

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} m_+(R) = 0. \quad (3.10)$$

由 (1.10), (3.9) 和 (3.10), 得

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \int_{S_n(\Omega; (1, \frac{R}{2}))} \frac{h^-}{t^{-\kappa^-}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma_Q < \infty,$$

从而

$$\int_{S_n(\Omega)} \frac{h^-}{1+t^{-\kappa^-}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma_Q < \infty.$$

由 $|h| = h^+ + h^-$, 得 $h \in B_\Omega$. 定理 2 证毕.

定理 3 的证明 因为条件 (1.8) 比 (1.10) 弱. 故调和函数 $h'(P) = h(P) - PI_{C_n(\Omega)}[h](P)$ 在边界 $S_n(\Omega)$ 上连续取值为零. 其证明与定理 1 的方法类似. 故我们在这里省略其证明过程.

又因为

$$U_{h'} = U_h + U_{PI_{C_n(\Omega)}[h]},$$

由推论 2, 得 $U_{h'} = U_h$. 对 $h'(P)$ 应用引理 5, 从而得 (1.12) 式成立. 证毕.

致谢 作者对审稿人的仔细审阅深表感谢.

参考文献

- 1 Rosenblum G, Solomyak M, Shubin M. Spectral Theory of Differential Operators. Moscow: VINITI, 1989
- 2 Miranda C. Partial Differential Equations of Elliptic Type. London: Springer-Verlag, 1970
- 3 Courant R, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics, vol. 1. New York: Interscience Publishers, 1953
- 4 张艳慧, 邓冠铁. 半空间中一类次调和函数的增长性质. 数学学报, 2008, 51: 319–326
- 5 Siegel D, Talvila E. Uniqueness for the n -dimensional half space Dirichlet problem. Pacific J Math, 1996, 175: 571–587
- 6 Axler S, Bourdon P, Ramey W. Harmonic Function Theory. Grad Texts in Math, vol. 137. London: Springer-Verlag, 1992
- 7 Hayman W K, Kennedy P B. Subharmonic Functions, vol. 1. London: Academic Press, 1976
- 8 Helms L L. Introduction to Potential Theory. New York: Wiley-Interscience, 1969
- 9 邓冠铁. 半平面中解析函数的积分表示. 数学学报, 2005, 48: 489–492
- 10 邓冠铁. 半平面中有限阶解析函数的因子分解. 数学学报, 2007, 50: 215–220
- 11 Deng G T. Integral representations of harmonic functions in half spaces. Bull Sci Math, 2007, 131: 53–59
- 12 Azarin V S. Generalization of a theorem of Hayman on subharmonic functions in an m -dimensional cone. Amer Math Soc Transl Ser 2, 1969, 80: 119–138
- 13 Dahlberg B E J. Estimates of harmonic measure. Arch Ration Mech Anal, 1977, 65: 275–288
- 14 Qiao L, Deng G T. Growth estimates for modified Green potentials in the upper-half space. Bull Sci Math, 2011, 135: 279–290
- 15 乔蕾, 邓冠铁, 潘国双. 上半空间中修改的 Poisson 积分和 Green 位势的例外集. 中国科学: 数学, 2010, 40: 787–800

- 16 Carleman T. Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen. Ark Mat Astr Fys, 1923, 17: 1–30
- 17 Rashkovskii A Yu, Ronkin L I. Subharmonic functions of finite order in a cone. I (general theory). Funktsional Anal i Prilozhen, 1990, 54: 74–89
- 18 Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. London: Springer-Verlag, 1977
- 19 Helgason S. Differential Geometry and Symmetric Spaces. London: Academic Press, 1962

Integral representations of harmonic functions in a cone

QIAO Lei & DENG GuanTie

Abstract Our aim in this paper is to prove that a harmonic function h in a cone with its positive part $h^+ = \max\{h, 0\}$ satisfying a slowly growing condition can be represented by its integral in the boundary of the cone and its negative part $h^- = \max\{-h, 0\}$ can also be dominated by a similar slowly growing condition, which improves some classical results about analytic and harmonic functions in the upper half space.

Keywords: integral representation, harmonic function, cone

MSC(2000): 31B05, 31B10

doi: 10.1360/012010-1023