Rayleigh 波斜入射下层状场地中凸起地形的三维响应分析

巴振宁^{①②*}, 梁建文^{①②}

① 天津大学建工学院土木系, 天津 300072;

② 滨海土木工程结构与安全教育部重点实验室, 天津 300072

* E-mail: bazhenning_001@163.com

收稿日期: 2014-07-25; 接受日期: 2014-12-02

国家自然科学基金(批准号: 50908156)和天津市应用基础及前沿技术研究计划(批准号: 12JCQNJC04700)资助项目

摘要 采用间接边界元法研究了层状场地中凸起地形对斜入射 Rayleigh 波的三维响应问题. 该间接边界元方法结合层状半空间中移动斜线均布荷载动力格林函数基本解, 克服了传统边界元法中的奇异性问题, 刚度矩阵运算的引入则避免了对土层交界面和自由地表的离散, 使得该方法具有很高计算精度的同时对复杂边界有着很好的适应性. 通过与已有结果的比较验证了方法的正确性, 并以均匀半空间和基岩上单一土层中凸起地形为例, 分别在频域和时域内进行了计算分析, 研究了 Rayleigh 波的斜入射角度、入射频率、凸起的截面形状、凸起的高度、特别是 Rayleigh 波的频散和多模态特性对地面动力响应的影响. 研究表明层状场地中由于 Rayleigh 波存在频散和多模态特性, 使得凸起表面的动力放大效应与均匀场地情况存在明显的差别, 层状场地高阶模态(二阶以上模态)凸起水平位移幅值放大谱与第一阶模态存在很大差异, 呈现窄频放大, 峰值频率处凸起顶部附近位移幅值非常大, 且峰值频率与对应有效阻尼比峰值频率一致.

关键词

层状场地

Rayleigh 波

凸起地形

三维动力响应

动力格林函数

波的频散

多模态特性

1 引言

凸起地形作为自然界中常见的地貌对地震波的传播有着显著的影响, 会显著放大其表面的地震动, 这已在多次的地震观测和震害调查中得以证实. 如 1994 年美国北岭地震中 Tarzana 山顶记录到的地震加速度高达 1.78g, 其中部分原因来自于山体地震效应^[1]. 通过对我国 2008 年汶川地震中自贡地形影响台阵数据的分析也显示山脊对地震波有着显著的放大作用^[2]. 鉴于许多居民建筑及重要特殊结构(通讯及输

电塔等)建造于山体等凸起地形之上, 研究凸起地形对地震动的放大作用在理论和工程上都有着重要的意义.

近 40 年来, 凸起地形对地震波的散射问题一直是地震工程及地震学等领域中的热点课题. 依据地震波入射方向, 其对地震波的散射可分为二维散射(地震波入射方向与二维凸起地形垂直)和三维散射(地震波入射方向与二维凸起成一倾角或凸起地形本身三维). 目前相关研究主要集中于二维散射方面: 相关解析解包括半圆或浅圆弧凸起^[3-8]、半椭圆凸

引用格式: 巴振宁, 梁建文. Rayleigh 波斜入射下层状场地中凸起地形的三维响应分析. 中国科学: 技术科学, 2015, 45: 874-888

Ba Z N, Liang J W. Three dimensional responses of a hill in a layered half-space for obliquely incident Rayleigh waves (in Chinese). Sci Sin Tech, 2015, 45: 874-888, doi: 10.1360/N092014-00045

起^[9~12]和三角凸起^[13], 相关数值方法则包括有限差分法^[14]、有限元法^[15]、离散波数法^[16]、边界元法^[17]、边界积分方程法^[18~20]和谱单元法^[21]. 目前关于三维凸起地形的研究较少: Sanchez-Sesma^[22]首次采用波函数展开法给出了半球凸起对垂直入射 P 波的散射解析解; Bouchon 等人^[23]以及 Sohrabi-Bidar 等人^[24]研究了三维高斯形山体对垂直入射 P 波和 S 波的散射.

部分学者针对二维凸起地形对弹性波的三维散射问题进行了研究. Pedersen 等人^[25]采用间接边界元方法研究了均匀半空间中凸起地形对 P, SV 和 SH 波的三维散射问题. Takenaka 等人^[26]采用离散波数边界元法研究了半正弦山脉对点波源的散射问题. Zhang 等人^[27]建立边界元-有限元耦合方法求解了二维起伏地形的三维响应问题. Narayan 和 Prasad Rao^[28]基于交错网格的有限差分方法求解了膨胀波源作用下二维凸起地形的三维效应问题.

分析以上文献发现, 目前关于凸起地形对弹性波的散射研究主要是针对入射体波(SH, P 和 SV 波), 对于入射 Rayleigh 波情况, 相关研究非常少, 仅有文献[15]和[18]针对均匀场地中二维凸起地形进行了研究, 对于层状场地中凸起地形对 Rayleigh 波的散射问题, 则未见有文献进行研究, 然而 Rayleigh 波在层状场地中的传播存在频散和多模态特性, 使得问题变得非常复杂. 为此本文在层状场地精确动力刚度矩阵基础上^[29], 推导了层状半空间移动斜线中均布斜线荷载动力格林影响函数, 并以该格林函数为基本解, 建立了一种新的间接边界元方法, 针对层状场地中凸起地形对斜入射 Rayleigh 波的三维散射问题进行了研究. 本文首先介绍了刚度矩阵及移动荷载动力格林函数的求解过程, 然后以均匀场地和基岩上单一土层场地情况进行了数值计算, 讨论了 Rayleigh 波的斜入射角度、入射频率、凸起的截面形状、凸起的高度、特别是层状场地中 Rayleigh 波的频散和多模态特性对地面运动的影响.

2 计算模型和相应公式

如图 1 所示, 一任意截面形状无限长凸起地形位于层状场地之上, 凸起截面以及层状场地和凸起土体参数沿 y 轴保持不变, 凸起的表面边界为 S_1 , 凸起与层状场地交界面为 S_2 . 入射波为 Rayleigh 面波, 相速度为 c_a , 圆频率为 ω , 入射方向与 y 轴成夹角

ψ ($\psi=90^\circ$ 为垂直入射, 对应二维散射情况). 层状半空间由 N 层水平土层和其下的基岩半空间组成. 各土层参数包括密度 ρ^j , 泊松比 ν^j , 阻尼比 ζ^j , 剪切波速 $c_s^{j*} = c_s^j [1 + 2i \operatorname{sgn}(\omega) \zeta^j]^{1/2}$ 和厚度 H_j ($j=1 \cdots N$), 基岩参数包括密度 ρ^R , 泊松比 ν^R , 阻尼比 ζ^R , 剪切波速 $c_s^{R*} = c_s^R [1 + 2i \operatorname{sgn}(\omega) \zeta^R]^{1/2}$. 凸起地形参数包括 ρ^H , 泊松比 ν^H , 阻尼比 ζ^H , 剪切波速 $c_s^{H*} = c_s^H [1 + 2i \operatorname{sgn}(\omega) \zeta^H]^{1/2}$.

对斜入射 Rayleigh 波, 凸起地形沿 y 轴任意截面的三维动力响应完全相同, 仅是因位置不同, 在频域内存在一个相位差或在时域内存在一个时间差, 这样可以通过选择合适的格林函数, 将三维空间的动力响应问题转换为平面应变问题, 采用间接边界元方法进行求解. 为此本文在三维精确动力刚度矩阵的基础上, 给出了层状半空间中移动斜线荷载动力格林影响函数, 建立了间接边界元方法对问题进行求解. 具体求解时借鉴分区契合思想^[3,4], 将波场分为闭合凸起区域和外部层状场地区域内波场. 对于闭合凸起域内波场仅有散射波场构成, 采用施加在其边界 S_1 和 S_2 上的一组虚拟移动荷载产生动力响应来模拟; 对于外部层状场地区域内波场则由散射波场和自由波场组成, 散射波场同样采用施加在其边界 S_1 上的另一组虚拟移动荷载产生动力响应来模拟, 而自由波场则首先通过将层状场地三维精确动力刚度矩阵行列式取为零, 建立层状场地 Rayleigh 波传播的频散方程, 然后通过搜索迭代方法求得层状场地的 Rayleigh 波频散曲线, 进而求得自由波场. 以下将

图 1 层状场地上凸起地形 Rayleigh 波斜入射下示意图

对层状场地的精确动力刚度矩阵及自由波场求解、层状半空间中移动斜线荷载动力格林影响函数以及散射波场模拟和边界条件进行介绍。

2.1 层状场地精确动力刚度矩阵及自由波场求解

在波数域(k_x, k_y, z)中, 假定土层中 P, SV 和 SH 波的势函数 ϕ, ψ_1 和 ψ_2 可表示为

$$\phi = A \exp(\gamma_1 z) + B \exp(-\gamma_1 z), \quad (1)$$

$$\psi_1 = C \exp(\gamma_2 z) + D \exp(-\gamma_2 z), \quad (2)$$

$$\psi_2 = E \exp(\gamma_2 z) + F \exp(-\gamma_2 z), \quad (3)$$

其中, $\gamma_1 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_p^2}$, $\gamma_2 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_s^2}$, $k_p = \omega / c_p$ 和 $k_s = \omega / c_s$ 分别为 P 波和 S 波的波数, k_x 和 k_y 分别为沿坐标 x 和 y 方向的波数, A, B, C, D, E 和 F 为待确定常数。以第 j 土层为例, 由(1)~(3)式土层中上下表面处的位移和外荷载幅值可表示为

$$\begin{aligned} & \{\bar{u}_{j1}, \bar{v}_{j1}, i\bar{w}_{j1}, \bar{u}_{j2}, \bar{v}_{j2}, i\bar{w}_{j2}\} \\ &= [D_j] \{A_j, B_j, C_j, D_j, E_j, F_j\}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \{\bar{P}_{x1}, \bar{P}_{y1}, i\bar{P}_{z1}, \bar{P}_{x2}, \bar{P}_{y2}, i\bar{P}_{z2}\} \\ &= [S_j] \{A_j, B_j, C_j, D_j, E_j, F_j\}. \end{aligned} \quad (5)$$

整理(4)和(5)式, 消去系数 $\{A_j, B_j, C_j, D_j, E_j, F_j\}$, 可求得第 j 土层的三维精确动力刚度矩阵 $[S_{P-SV-SH}^{L,j}]$ 。对于最下面的半无限空间, 由 Sommerfeld 辐射条件知, 在其表面施加荷载, 不存在上行波(无从无穷远传至半无限空间表面的能量), 因此可令(4)和(5)式中系数 A_j, B_j 和 C_j 为零, 同样可求得半空间三维精确动力刚度矩阵 $[S_{P-SV-SH}^R]$ 。对于 $[S_{P-SV-SH}^{L,j}]$ 和 $[S_{P-SV-SH}^R]$ 中的具体元素, 可参考文献^[29]。

集整各土层的刚度矩阵 $[S_{P-SV-SH}^{L,j}]$ ($j=1 \cdots N$) 和下卧基岩半空间动力刚度矩阵 $[S_{P-SV-SH}^R]$, 可得层状场地的整体动力刚度矩阵 $[S_{P-SV-SH}]$, 这样层状场地的离散动力平衡方程可表示为

$$\begin{aligned} & [S_{P-SV-SH}] \{\bar{u}_0, \bar{v}_0, i\bar{w}_0, \dots, \bar{u}_N, \bar{v}_N, i\bar{w}_N\}^T \\ &= \{\bar{P}_{x0}, \bar{P}_{y0}, i\bar{P}_{z0}, \dots, \bar{P}_{xN}, \bar{P}_{yN}, i\bar{P}_{zN}\}^T, \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $\bar{u}_j, \bar{v}_j$ 和 $\bar{w}_j$ 为地表及各土层交界面处的位移幅值, $\bar{P}_{xj}, \bar{P}_{yj}$ 和 $\bar{P}_{zj}$ ($j=0, 1, 2, \dots, N$) 为施加在地表及各土层交界面处的外荷载幅值。

对于入射 Rayleigh 面波, 荷载向量为零, 令(6)式中 $[S_{P-SV-SH}]$ 的行列式为零则可得到频散方程, 它确定了不同振型的相速度 c_a 与频率 ω 的关系 $c_a(\omega)$ 。由行列式为零求得的频散方程是超越的, 需采用搜索迭代法进行求解。对于第一阶模态, 无截止频率问题, 初始相速度为 $c_a = c_R^R$ (c_R^R 为下卧基岩半空间 Rayleigh 波速), 增大 ω 的同时减小 c_a , 通过牛顿迭代法使 $[S_{P-SV-SH}] = 0$, 求的相应的 $c_a(\omega)$, 即为第一阶模态的频散曲线。对除第一阶模态以外的高阶模态则存在截止频率问题, 首先令其初始相速度 $c_a = c_S^R$ (c_S^R 为下卧基岩半空间剪切波速), 并令 ω 由小到大进行搜索, 每出现一次 $[S_{P-SV-SH}] = 0$, 即求得某一阶模态的截止频率, 然后对每一阶模态, 增大 ω 的同时减小 c_a , 通过牛顿迭代法使 $[S_{P-SV-SH}] = 0$, 求的相应的 $c_a(\omega)$, 即为该阶模态的频散曲线。对所有模态采取同样的计算, 即可求得所有模态对应的频散曲线, 也即频散曲线族。

求得各阶模态的频散曲线后, 将成对 $(\omega, c_a(\omega))$ 代入整体刚度矩阵 $[S_{P-SV-SH}]$, 可求得相应特征向量, 即为位移幅值向量 $\{\bar{u}_0, \bar{v}_0, i\bar{w}_0, \dots, \bar{u}_N, \bar{v}_N, i\bar{w}_N\}^T$, 然后针对任一土层, 由(4)式可求得相应土层内上下行波的幅值系数, 进而求得该土层内任意位置的位移和应力幅值, 即为 Rayleigh 波入射下层状场地自由波场。

2.2 移动斜线荷载动力格林影响函数及散射波场

图 2 给出了作用在 x, y 和 z 方向的移动均布荷载。由于荷载仅作用在部分土层上, 在荷载的上下节点处引入附加交界面。首先假定作用荷载的土层固定在两个交界面上。首先假定作用荷载土层固定在这两个交界面上, 计算满足条件的相应反力(外力) $\bar{R}_{x1}, \bar{R}_{y1}, \bar{R}_{z1}, \bar{R}_{x2}, \bar{R}_{y2}$ 和 $\bar{R}_{z2}$, 这个分析仅在作用荷载土层上进行。然后将反力以相反方向作用到整个层状场地上, 由直接刚度法求解其动力响应。最后叠加上上述两个结果得到总响应。

假定沿 y 轴正方向以速度 c 移动的荷载可表示为

$$\begin{aligned} & \{p_x, p_y, p_z\}^T = \{p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}\}^T \\ & \delta(z - x \tan \theta) \delta(y - ct), \end{aligned} \quad (7)$$

图 2 层状场地中移动斜线均匀荷载动力格林函数求解示意图

其中 p_{x0} , p_{y0} 和 p_{z0} 为沿 x , y 和 z 方向的均布荷载密度, $\theta (0^\circ < \theta < 180^\circ)$ 为斜线与水平方向的夹角, δ 为狄拉克函数. 采用傅里叶变换将荷载变换到频率-波数域中后, 荷载幅值可表示为

$$\{\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z\}^T = \{p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}\}^T \frac{1}{(2\pi)^3 c} \quad (8)$$

$$\exp(ik_x z \cot \theta) \delta(\omega - k_y c).$$

设位移 u , v 和 w 在在频率-波数域内的形式为

$$\{u, v, w\}^T = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}^T \exp(-ik_x x) \exp(-ik_y y) \exp(i\omega t), \quad (9)$$

其中, $\bar{u}(k_x, k_y, k_z, \omega)$, $\bar{v}(k_x, k_y, k_z, \omega)$ 和 $\bar{w}(k_x, k_y, k_z, \omega)$ 为相应的位移幅值. 在荷载幅值 p_{x0} , p_{y0} 和 p_{z0} 作用下, 以 $\bar{u}$, $\bar{v}$ 和 $\bar{w}$ 表示的简谐动力平衡方程为

$$(\lambda^* + \mu^*) ik_x \bar{\Delta} - \mu^* \left[\frac{d\bar{u}^2}{dz^2} - (k_x^2 + k_y^2 - k_s^2) \bar{u} \right] = -p_{x0}, \quad (10)$$

$$(\lambda^* + \mu^*) ik_y \bar{\Delta} - \mu^* \left[\frac{d\bar{v}^2}{dz^2} - (k_x^2 + k_y^2 - k_s^2) \bar{v} \right] = -p_{y0}, \quad (11)$$

$$(\lambda^* + \mu^*) \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial z} - \mu^* \left[\frac{d\bar{w}^2}{dz^2} - (k_x^2 + k_y^2 - k_s^2) \bar{w} \right] = -p_{z0}, \quad (12)$$

其中, $\lambda^* = \lambda[1 + 2i \operatorname{sgn}(\omega) \zeta]$ 和 $\mu^* = \mu[1 + 2i \operatorname{sgn}(\omega) \zeta]$ 为复 Lamb 常数, $\Delta = \partial \bar{u} / \partial x + \partial \bar{v} / \partial y + \partial \bar{w} / \partial z$. 假定方程 (10)~(12) 的特解(以上标“P”表示)如下式所示:

$$\{\bar{u}^p, \bar{v}^p, \bar{w}^p\}^T = \{a_1, a_2, a_3\}^T \exp(ik_x z \cot \theta) \delta(\omega - k_y c) / ((2\pi)^3 c). \quad (13)$$

将(8)代入(7)式, 可得关于系数 a_1 , a_2 和 a_3 的表达式

$$[A] \{a_1, a_2, a_3\}^T = \{p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}\}^T. \quad (14)$$

矩阵 $[A]$ 的具体元素见附录, 求解(14)式可得系数 a_1 , a_2 和 a_3 , 再将其反代回(13)式, 并令 $z=0$ 和 $z=d$, 可得固定土层上下表面处的位移特解, 如(15)和(16)式所示, 进而可求得固定土层上下表面处的反力特解, 如(17)和(18)式所示.

$$\{\bar{u}_1^p, \bar{v}_1^p, \bar{w}_1^p\}^T = \{a_1, a_2, a_3\}^T \delta(\omega - k_y c) / ((2\pi)^3 c), \quad (15)$$

$$\{\bar{u}_2^p, \bar{v}_2^p, \bar{w}_2^p\}^T = \{a_1, a_2, a_3\}^T \exp(ik_x d \cot \theta) \delta(\omega - k_y c) / ((2\pi)^3 c), \quad (16)$$

$$\{\bar{R}_{x1}^p, \bar{R}_{y1}^p, \bar{R}_{z1}^p\}^T = \{-\bar{\tau}_{zx}(0), -\bar{\tau}_{zy}(0), -\bar{\sigma}_z(0)\}^T, \quad (17)$$

$$\{\bar{R}_{x2}^p, \bar{R}_{y2}^p, \bar{R}_{z2}^p\}^T = \{\bar{\tau}_{zx}(d), \bar{\tau}_{zy}(d), \bar{\sigma}_z(d)\}^T. \quad (18)$$

为使作用荷载土层固定, 特解还必须加上与负的 $\bar{u}_1^p$, $\bar{v}_1^p$, $\bar{w}_1^p$, $\bar{u}_2^p$, $\bar{v}_2^p$ 和 $\bar{w}_2^p$ 相应的齐解(以上标“h”表示)表示, 与齐解相应的固定端面处反力 $\bar{R}_{x1}^h$, $\bar{R}_{y1}^h$, $\bar{R}_{z1}^h$, $\bar{R}_{x2}^h$, $\bar{R}_{y2}^h$ 和 $\bar{R}_{z2}^h$, 可由固定土层刚度矩阵 $[S_{p-SV-SH}^L]$ 求得

$$\{\bar{R}_{x1}^h, \bar{R}_{y1}^h, \bar{R}_{z1}^h, \bar{R}_{x2}^h, \bar{R}_{y2}^h, \bar{R}_{z2}^h\}^T = [S_{p-SV-SH}^L] \{-\bar{u}_1^p, -\bar{v}_1^p, -i\bar{w}_1^p, -\bar{u}_2^p, -\bar{v}_2^p, -i\bar{w}_2^p\}^T. \quad (19)$$

叠加固定端面处特解反力和齐解反力并取负号, 可得作用于层状场地的总外荷载(固定端面反力)为

$$\{\bar{R}_{x1}, \bar{R}_{y1}, \bar{R}_{z1}\}^T = \{-\bar{R}_{x1}^p - \bar{R}_{x1}^h, -\bar{R}_{y1}^p - \bar{R}_{y1}^h, -\bar{R}_{z1}^p - \bar{R}_{z1}^h\}^T, \quad (20)$$

$$\{\bar{R}_{x2}, \bar{R}_{y2}, \bar{R}_{z2}\}^T = \{-\bar{R}_{x2}^p - \bar{R}_{x2}^h, -\bar{R}_{y2}^p - \bar{R}_{y2}^h, -\bar{R}_{z2}^p - \bar{R}_{z2}^h\}^T. \quad (21)$$

将(20)和(21)代入(6)式, 可求得任意土层上下表

面的位移幅值,再由(4)式可求得土层内上下行波的幅值系数 A_j, B_j, C_j, D_j, E_j 和 $F_j (j=1,2,\dots,N)$, 进而由(4)和(5)式可求得层状场地任意点的位移幅值和应力幅值.

上述计算过程是在波数域内进行的,空间域内的结果可以通过傅里叶逆变换来完成

$$F(x, y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(k_x, k_y, z, \omega) \delta(\omega - k_y c) \exp(-ik_x x - ik_y y) dk_x dk_y \quad (22)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(k_x, k'_y, z, \omega) \exp(-ik_x x) dk_x,$$

其中, $k'_y = \omega/c$, $\bar{F}(k_x, k'_y, z, \omega)$ 为波数域中位移或应力幅值, $F(x, y, z, \omega)$ 为空间域内动力响应, 也即所求移动均布斜线荷载动力格林影响函数.

求得移动均布斜线荷载动力格林函数后, 闭合凸起区域和外部层状场地区域内的散射波场, 便可分别施加的虚拟移动斜线荷载产生的动力响应来模拟. 移动速度由图 1 和文献[30]知为 Rayleigh 波沿 y 轴的视速度 $c = |c_a|^2 / (\text{Re}(c_a) \cos \psi)$. 这样闭合凸起区域和外部层状场地区域内由散射波场引起的位移和应力可分别表示为

$$\{u_g^L, v_g^L, w_g^L\} = [g_u^L(S)] \{p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}\}^T, \quad (23)$$

$$\{t_{xg}^L, t_{yg}^L, t_{zg}^L\} = [g_t^L(S)] \{p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}\}^T, \quad (24)$$

$$\{u_g^H, v_g^H, w_g^H\} = [g_u^H(S)] \{p_{x2}, p_{y2}, p_{z2}\}^T, \quad (25)$$

$$\{t_{xg}^H, t_{yg}^H, t_{zg}^H\} = [g_t^H(S)] \{p_{x2}, p_{y2}, p_{z2}\}^T. \quad (26)$$

其中, $[g_u^L(S)]$ 和 $[g_t^L(S)]$ 为与外部层状场地相应的位移和应力格林函数, $[g_u^H(S)]$ 和 $[g_t^H(S)]$ 则为与闭合凸起相应的位移和应力格林函数. 上标“ L ”表示与层状半空间相应的参数, 而“ H ”则表示与闭合凸起相应的参数. t_{xg}, t_{yg} 和 t_{zg} 表示沿坐标 x, y 和 z 方向的应力. $\{p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}\}^T$ 和 $\{p_{x2}, p_{y2}, p_{z2}\}^T$ 分别为求解外部层状场地区域和闭合凸起区域内的散射波场而施加在相应边界上的虚拟荷载向量.

2.3 边界条件

凸起表面 S_1 上的零应力边界条件以及交界面 S_2 上的位移和应力连续条件可表示为

$$\int_{S_1+S_2} [W(s)]^T \{t_{xg}^H(s), t_{yg}^H(s), t_{zg}^H(s)\}^T ds = 0, \quad (27)$$

$$\int_{S_1} [W(s)]^T \left[\begin{matrix} u_g^L(s) \\ v_g^L(s) \\ w_g^L(s) \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} u_f(s) \\ v_f(s) \\ w_f(s) \end{matrix} \right] ds = 0, \quad (28)$$

$$= \int_{S_1+S_2} [W(s)]^T \left[\begin{matrix} u_g^H(s) \\ v_g^H(s) \\ w_g^H(s) \end{matrix} \right] ds,$$

$$\int_{S_1} [W(s)]^T \left[\begin{matrix} t_{xg}^L(s) \\ t_{yg}^L(s) \\ t_{zg}^L(s) \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} t_{xf}(s) \\ t_{yf}(s) \\ t_{zf}(s) \end{matrix} \right] ds = 0, \quad (29)$$

$$= \int_{S_1+S_2} [W(s)]^T \left[\begin{matrix} t_{xg}^H(s) \\ t_{yg}^H(s) \\ t_{zg}^H(s) \end{matrix} \right] ds,$$

其中, $[u_f(s), v_f(s), w_f(s)]^T$ 为自由场位移向量, $[t_{xf}(s), t_{yf}(s), t_{zf}(s)]^T$ 为自由场应力向量, $[W(s)]$ 为权函数矩阵, 可取为单位矩阵, 使积分在每个单元上都能独立进行.

将(23)~(26)代入(27)~(29)式可得

$$[T_{p1}^H] \{p_{x2}, p_{y2}, p_{z2}\}^T = 0, \quad (30)$$

$$[T_p^L] \{p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}\}^T + [T_f] = [T_{p2}^H] \{p_{x2}, p_{y2}, p_{z2}\}^T, \quad (31)$$

$$[V_p^L] \{p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}\}^T + [V_f] = [V_{p2}^H] \{p_{x2}, p_{y2}, p_{z2}\}^T, \quad (32)$$

其中,

$$[T_{p1}^H] = \int_{S_1+S_2} [W(s)]^T [g_t^H(s)] ds, \quad (s \in S_1), \quad (33)$$

$$[T_{p2}^H] = \int_{S_1+S_2} [W(s)]^T [g_t^H(s)] ds, \quad (34)$$

$$[V_p^H] = \int_{S_1+S_2} [W(s)]^T [g_u^H(s)] ds, \quad (s \in S_2), \quad (35)$$

$$[T_p^L] = \int_{S_1} [W(s)]^T [g_t^L(s)] ds, \quad (36)$$

$$[V_p^L] = \int_{S_1} [W(s)]^T [g_u^L(s)] ds, \quad (37)$$

$$[T_f] = \int_{S_1} [W(s)]^T [t_{xf}(s), t_{yf}(s), t_{zf}(s)]^T ds, \quad (38)$$

$$[V_f] = \int_{S_1} [W(s)]^T [u_f(s), v_f(s), w_f(s)]^T ds. \quad (39)$$

由 (30)~(32) 式可求得 $\{p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}\}^T$ 和 $\{p_{x2}, p_{y2}, p_{z2}\}^T$, 将其代入 (23)~(26) 式可求得散射场. 最后叠加散射场和自由场, 可求得外部层状半空间区域位移幅值

$$\{u^L, v^L, w^L\}^T = \{u_f, v_f, w_f\}^T + \{u_g^L, v_g^L, w_g^L\}^T. \quad (40)$$

闭合凸起区域位移幅值

$$\{u^H, v^H, w^H\}^T = \{u_g^H, v_g^H, w_g^H\}^T. \quad (41)$$

上述给出的是频域内的三维动力响应解答, 对于时域内动力响应可傅里叶逆变换求得

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{cases} = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} u(x, y, z, \omega) \\ v(x, y, z, \omega) \\ w(x, y, z, \omega) \end{cases} e^{i\omega t} d\omega. \quad (42)$$

3 方法验证

以均匀场地中凸起地形对 Rayleigh 波的二维散射结果来验证本文方法的正确性. 本文方法在 $\psi=90^\circ$ 即退化为二维解答. 图 3 给出了本文结果与文献[15]采用有限元结合透射边界给出凸起表面不同观测点地面位移放大谱的比较. 文献[15]采用凸起形状满足方程 $z=x/30-x^2/80+x^3/24000$, 凸起和均匀场地土体参数均为 P 波波速为 2425 m/s, SV 波波速为 1400 m/s, 观测点坐标详见文献[15]. 图中无量纲频率定义为 $\Omega=L/\lambda_s$. 从图可以看出, 对所有观测点, 本文结果均与文献[15]给出结果吻合良好, 说明了本文方法的正确性.

4 算例与分析

本文以均匀场地和基岩上单一土层场地中凸起地形为模型进行计算分析. 具体模型包括如图 4~6 所示的均匀场地中半圆、梯形和三角凸起地形, 以及图 7 所示的基岩上单一土层场地中的三角凸起地形.

4.1 均匀场地结果

以均匀场地中半圆凸起为例, 模型如图 4 所示, 图 8 和 9 给出了凸起附近位移幅值云图. 凸起和均匀场地泊松比均为 1/3, 阻尼比均为 0.01. 定义无量纲入射频率为 $\eta=2a/\lambda_s=\alpha a/\pi c_s$, 其中 λ_s 和 c_s 为剪切波波长和波速. 计算参数为 $\eta=0.5, 1.0$ 和 2.0, 入射角度 $\psi=45^\circ$ 和 90° . 图中 3 个坐标方向无量纲位移幅值为 $|u/u_0|$, $|v/v_0|$ 和 $|w/(u_0+v_0)|$, 其中 u_0 和 v_0 为 Rayleigh 波斜入射下 x 和 y 方向自由场水平位移.

从图 8 和 9 中可以看出, 凸起地形的存在显著改变了其附近位移幅值的大小及空间分布, 且该变化受入射频率和入射角度的影响明显, 同时由于凸起的几何聚焦效应, 凸起内部位移幅值较大, 空间分布较为复杂. 随着入射频率的增大, 位移幅值的空间分布逐渐变得复杂, 尤其是 Rayleigh 波入射一侧区域. 位移幅值沿深度方向衰减明显, 且随着入射频率的增大, 衰减加重. 比较 $\psi=45^\circ$ 入射(三维散射)和 $\psi=90^\circ$ 入射(二维散射)时的位移幅值发现, 两者在 x 和 z 方向的位移幅值相近(如 $\eta=0.5, 1.0$ 和 2.0, $\psi=45^\circ$ 时 x 方向的位移幅值分别为 1.97, 1.97 和 1.48, $\psi=90^\circ$ 时 x 和 z 方向的位移幅值分别为 1.97, 2.01 和 1.48), 但 $\psi=45^\circ$

图 3 本文结果与文献[15]二维散射结果的比较

图 4 均匀场地上半圆凸起地形截面示意图

图 5 均匀场地上梯形凸起地形截面示意图

图 6 均匀场地上三角凸起地形截面示意

图 7 基岩上单一土层场地三角凸起地形截面示意图

图 8 Rayleigh 波斜入射下均匀场地上半圆凸起附近位移幅值云图($\psi=45^\circ$)

图9 Rayleigh 波斜入射下均匀场地上半圆凸起附近位移幅值云图($\psi=90^\circ$)

入射(三维散射)同时存在较大的沿凸起轴向的水平位移. 另外 $\psi=90^\circ$ 入射时凸起左侧位移幅值的震荡较 $\psi=45^\circ$ 要剧烈的多, 说明随着入射角度的逐渐增大, 凸起左侧区域富含更多较高频率散射波. 以上分析说明 Rayleigh 波入射角度对位移幅值有着显著的影响, 同时也说明凸起地形对 Rayleigh 波二维散射($\psi=90^\circ$)和三维散射($\psi=0^\circ$ 和 45°)有着明显的差异.

为研究凸起截面形状对放大效应的影响, 以均匀场地上三角、梯形和半圆三种截面形状凸起为例(模型分别如图4~6), 图10给出了 Rayleigh 波斜入射下凸起附近表面位移幅值. 对三种截面凸起, 高度均为 $h/a=1.0$, 对于梯形截面, 顶部宽度为 $b/a=0.5$. 凸起和均匀场地的土体参数以及无量频率的定义方式均同图8和9. Rayleigh 波入射角度为 $\psi=45^\circ$, 入射频率为 $\eta=0.5$ 和 1.0 .

从图10中可以看出, 截面形状对凸起顶点附近截面方向(x 轴方向)的水平位移幅值有着显著的影响, 如 $\eta=1.0$ 时, 三角、梯形和半圆形凸起对应的 x 向水平位移幅值最大值分别为3.65, 2.18和1.97, 说明“尖锐”顶点的凸起会在其顶点附近形成明显的能量集中现象, 表现为非常高的 x 向位移幅值. 截面形状对 y 向和 z 向的位移幅值的影响相对于 x 向要小的多, 三种截面在 y 向和 z 向的位移幅值较为接近. 另外从图中还可以看出, 截面形状对波入射侧位移幅值的相位有一定的影响, 三角形凸起情况波长较长, 而梯形凸起和半圆形凸起波长较短.

为研究凸起高度对放大效应的影响, 以均匀场地上三角形凸起为例(模型如图6), 图11给出了 Ray-

leigh 波斜入射下凸起附近表面位移幅值. 凸起的截面高度分别取为 $h/a=0.5, 1.0$ 和 2.0 . 凸起和均匀场地的土体参数以及无量频率的定义方式均与图8和9相同. Rayleigh 波的入射角度为 $\psi=45^\circ$, 入射频率为 $\eta=0.5$ 和 1.0 .

从图11中可以看出, 随着凸起截面高度的增大, 位移幅值逐渐增大, 尤其是截面方向(x 轴方向)凸起顶点附近的位移幅值尤为明显, 对应 $h/a=0.5, 1.0$ 和 2.0 截面高度凸起, $\eta=0.5$ 时 x 向凸起顶点处水平位移幅值分别为2.15, 3.51和4.90, 说明了随着截面高度的增大, 凸起顶部张开角度减小, 凸起变得越为“尖锐”, 使得能量在凸起顶点附近更为集中, 表现为位移幅值进一步增大, 但同时值得注意的是能量集中的区域则有所减小(较大位移幅值的范围较小). 另外, 从图11中还可以清楚的观察到, 较高的凸起会在其表面形成明显的驻波现象, 如 $h/a=2.0$ 时对应 $\eta=0.5$ 和 1.0 时凸起两侧各出现1次和2次驻波.

4.2 层状场地结果

为研究层状场地中凸起地形对斜入射 Rayleigh 波的放大作用以及层状场地与均匀场地的差异, 以基岩上单一土层场地和均匀场地中三角形凸起为例进行了研究. 模型如图6和7所示, 三角凸起高度为 $h/a=1.0$, 土层厚度取为 $H/a=1.0$ 和 $H/a=2.0$ 两种情况. 对基岩上单一土层场地, 基岩与土层剪切波速比为 $c_s^R/c_s^L=2.0$, 密度比 $\rho^R/\rho^L=1.0$, 基岩阻尼比为 $\zeta_s^R=0.02$, 土层阻尼比为 $\zeta_s^L=0.05$, 基岩和土层的泊松比均为 $1/3$. 对均匀场地, 泊松比为 $1/3$, 阻尼比为 0.05 . 计算中凸

图 10 Rayleigh 波斜入射下凸起附近表面位移幅值(不同截面形状)

图 11 Rayleigh 波斜入射下凸起附近表面位移幅值(不同凸起高度)

图 12 层状场地 Rayleigh 波前三阶模态频散曲线

起的土体参数与土层或均匀场地相同. 无量纲频率 $\eta = 2a/\lambda_s^L = \omega a / \pi c_s^L$, Rayleigh 波入射角度取 $\psi = 45^\circ$.

由于 Rayleigh 波在层状场地中的传播存在多模

由于 Rayleigh 波在层状场地中的传播存在多模

态和频散特性, 采用上述搜索迭代法, 图 12 首先给出两种单一土层场地对应前三阶模态的 Rayleigh 波相速度土层剪切波速比实部 $\text{Re}(c_a/c_s^L)$ 、有效阻尼比 $\text{Im}(c_a)/\text{Re}(c_a)$ 、和竖向与水平位移幅值比. 从图中可以看出, 基岩上单一土层场地, 第一阶模态相速度起始于基岩半空间的 Rayleigh 波速 $c_R^R=0.93 c_s^R$, 随频率的增大逐渐衰减到土层的 Rayleigh 波速 $c_R^L=0.93 c_s^L$, 第二阶和第三阶模态均存在截止频率, 起始相速度为基岩的剪切波速 c_s^R , 随频率增大逐渐衰减到土层的剪切波速 c_s^L . 另外从图 12 中可以明显的看出, 对于第二和第三阶模态, 在有效阻尼比出现峰值频率位置, 竖向位移幅值远大于水平位移幅值.

图 13 给出了均匀场地和单一土层场地($H/a=1.0$ 和 $H/a=2.0$)对应第一模态的位移幅值放大谱. 观测点如图 6 和 7 所示, 对应坐标分别为 $x/a=-0.5, 0.0$ 和 0.5 . 图 13 中不同频率对应的竖向位移 w_0 见图 12. 比较层状场地第一模态放大谱与均匀场地放大谱发现, 在 $\eta < 2.0$ 频率范围内, 位移幅值差异较大, 更高频率范围 $\eta \geq 2.0$, 差异很小, 这是因为 $\eta < 2.0$ 频率范围内层状场地与均匀场地对应相同的频率, Rayleigh 波相速度差异较大(图 12), 同时也由于基岩面对波的反射作用,

使得层状场地位移放大谱较均匀场地情况复杂, 表现为以均匀场地为中心的上下波动. 另外, 对于均匀场地情况, 竖向位移分量几乎在整个频段内不发生放大, 这与文献[15]结论一致, 然而对于层状场地情况, 则存在系列峰值频率, 出现了较大放大现象, 且经分析发现这些峰值频率与单一土层场地的固有频率相近, 如对观测点 3(凸起顶点), $H/a=1.0$ 场地对应的首个竖向位移幅值峰值频率为 $\eta=0.48$ (放大系数为 1.91)与该场地的第一固有频率 $\eta=0.5$ 非常接近, 同样 $H/a=2.0$ 场地的首个峰值频率 $\eta=0.31$ 也与其第一固有频率 $\eta=0.25$ 较为接近.

图 14 和 15 进一步给出了基岩上单一土层场地 $H/a=1.0$ 和 $H/a=2.0$ 对应第一阶和高阶模态(第二和第三阶)情况不同观测点处的位移幅值放大谱. 比较图 14 和 15 中高阶模态与第一阶模态以及图 13 中均匀场地情况位移幅值放大谱发现, 高阶模态在两水平方向位移幅值放大谱上与第一模态及均匀场地情况有着本质的差异, 高阶模态情况呈现窄频带放大, 在峰值频率处, 位移幅值放大值显著大于第一模态和均匀场地情况, 如 $H/a=1.0$ 场地, 观测点 2(凸起顶点)对应第二阶和第三阶模态的 x 方向水平位移最大谱比达到 19.23 和 21.86, 在观测点 1(凸起左侧)对应第

图 13 Rayleigh 波斜入射下不同观测点位移幅值谱比(均匀场地与层状场地比较)

图 14 高阶模态时不同观测点位移幅值谱比($H/a=1.0$) 图 15 高阶模态时不同观测点位移幅值谱比($H/a=2.0$)

二和第三阶模态的 x 方向水平位移最大值也达到 6.98 和 5.94。比较图 14 和 15 中第二阶模态和第三阶模态两水平位移幅值放大谱发现, 第二和第三阶模态有着相同特性, 均呈窄频带放大, 在其各自对应的峰值

频率处位移幅值显著放大, 且有趣的是这些峰值频率点恰好与图 12 中给出的各自有效阻尼比峰值的频率一致, 也与竖向位移与水平位移幅值比的峰值位置一致。比较图 14 土层厚度 $H/a=1.0$ 和图 15 土层厚

度 $H/a=2.0$ 对应高阶模态的水平位移幅值放大谱发现, 随着土层厚度的增大, 水平位移幅值放大谱的频带变得更窄. 另外图 14 和 15 中结果也显示, 在竖向位移幅值放大谱上, 高阶模态与第一模态并无本质差别, 且竖向位移幅值放大谱相对于水平位移幅值情况要小的多, 几乎都在 2.0 以下. 以上分析表明, 在研究凸起地形对 Rayleigh 波的放大作用时, 对高阶模态的影响应引起重视, 这对解释凸起地形对地面运动的放大现象是非常重要的.

4.3 时域结果

为研究凸起地形在 Rayleigh 波斜入射作用下的时域响应, 以均匀场地和基岩上单一土层场地上三角形凸起为例, 进行 Ricker 时程输入下凸起附近的地表位移幅值时程的求解, 模型如图 6 和 7 所示. 三角凸起高度仍为 $h/a=1.0$. 均匀场地情况, 泊松比为 $1/3$, 阻尼比为 0.01 . 基岩上单一土层场地, 土层厚度取为 $H/a=1.0$, 基岩、土层和凸起地形的土体参数同图 13. 地表共 81 个观测点均匀分布在 $-4a \leq x \leq 4a$ 的范围内. 输入 Ricker 时程为 $u(\tau) = (2\pi^2 \eta_c^2 \tau^2 - 1) \exp(-\pi^2 \eta_c^2 \tau^2) \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$, 特征频率定义为 $\eta_c = \omega a / \pi c_s = 1.5$. Ricker 时程的入射角度为 $\psi=45^\circ$. 时域动力响应通过对频域内动力响应的积分求得, 计算中无量纲

频率计算范围为 $\eta=0.0 \sim 5.0$, 采用分段高斯积分完成, 共取积分频率点 116 个.

图 16 首先给出了均匀场地情况凸起附近地表位移时程, 图中“R1”和“R2”表示凸起左角点和顶点引起的散射. u_0 , v_0 和 w_0 分别表示 Rayleigh 波自由场地表位移, u_2 , v_2 和 w_2 表示凸起顶点的位移. 自由场 u_0 , v_0 和 w_0 的时程同位置 ($x/a=-4.0$), 但去掉后面的散射波影响, 由于自由场位移 w_0 与 u_0 和 v_0 在相位上相差 $\pi/2$, 所以 w_0 在波形上表现为 u_0 和 v_0 的导数形式, 另外在峰值上 $|w_0/(u_0+v_0)|=1.29$.

从图 16 中可以看出凸起地形顶点位移 u_2 对自由场位移 u_0 有着显著的放大, $|u_2|_{\max}/|u_0|_{\max}$ 达到 3.59, 顶点位移 v_2 对自由场位移 v_0 稍微放大, $|v_2|_{\max}/|v_0|_{\max}=1.30$, 而顶点竖向位移 w_2 相对于自由场位移 w_0 反而有所降低, $|w_2|_{\max}/|w_0|_{\max}=0.68$, 这与图 13 中给出的均匀场地中的频域结果结论一致. 同时从图中可以看出, 直达 Ricker 波传播到凸起左角点后产生散射波, 散射波一部分沿凸起左侧返回, 由于 Ricker 波作用时间较短, 凸起左侧距离左角点一定距离位置 ($x/a < -2.0$), 直达波和散射波到达的时间差大于 Ricker 波的作用时间, 直达波和散射波将互不影响, 独立传播, 所以在这些位置处位移幅值没有出现放大现象, 这与频域结果有一定的差别. 另外, 从图中

图 16 Rayleigh 波斜入射下均匀场地上凸起地形表面各观测点位移幅值时程

可以清晰的看到波的传播过程, 输入波到达凸起左交点 1 后, 产生散射 Rayleigh 波, 一部分沿凸起左侧返回, 一部分继续传播到顶点 2, 然后顶点 2 产生散射 Rayleigh 波, 又有一部分返回, 直到传播回 $x/a=-4.0$ 处, 所以在图中可以看到两条相互平行传播的散射 Rayleigh 波线.

图 17 进一步给出了层状场地情况凸起附近地表位移时程, 层状场地的频散关系曲线取第一模态(图 12), u_0 , v_0 和 w_0 仍为自由场位移, 而 u_2 , u_2 和 u_2 为凸起顶点位移. 自由场位移 u_0 , v_0 和 w_0 时程同位置 ($x/a=-4.0$), 但去掉后面的散射波影响. 比较图 17 中层状场地自由场位移时程与图 16 中均匀场地自由场位移时程发现, 层状场地对应自由场时程较均匀场地情况在波形上要复杂的多, 持续时间上要长的多. 这是由于层状场地中第一模态对应起始相速度为下卧半空间 Rayleigh 波速 $c_s^R=2c_s^L$, 所以 u_0 , v_0 和 w_0 较早的开始振动, 另外各种不同相速度 Rayleigh 波(由于频散, 不同频率 Rayleigh 波对应相速度不同)相互作用, 使得波形复杂. 另外, 由于自由场位移 w_0 与 u_0 和 v_0 在相位上仍相差 $\pi/2$, 所以 w_0 在波形上仍表现为 u_0 和 v_0 的导数形式, 但在峰值上 $|w_0/(u_0+v_0)|=1.70$.

从图 17 中还可以看出, 同样顶点位移 u_2 较自由

场位移 u_0 有显著的放大, $|u_2|_{\max}/|u_0|_{\max}$ 达到 3.81, 顶点位移 v_2 较自由场位移 v_0 也有一定程度放大, $|v_2|_{\max}/|v_0|_{\max}=1.62$, 表明层状场地情况两方向水平位移的放大系数要大于均匀场地情况, 这也与频率结论相似(图 13). 由于自由场位移波形较复杂的同时持续时间较长, 散射波中仅从顶点 2 处产生的散射波 Rayleigh 波“R2”能较为明显的观测到. 另外凸起顶点附近位移幅值持续时间明显要长于均匀场地情况.

5 结论

针对层状场地上凸起地形对斜入射 Rayleigh 波的三维散射问题, 建立以层状场地中移动斜线均布荷载动力格林影响函数为基本解的间接边界元方法对问题进行了研究, 得到了以下主要结论.

1) 波的入射角度对动力响应有着显著的影响, Rayleigh 波斜入射时在平面内位移幅值与二维情况较为接近的情况下, 同时带入了较大的凸起轴线方向位移幅值.

2) 顶点“尖锐”的凸起会在其顶点处形成明显的能量集中现象, 凸起顶部截面方向的水平位移会显著放大. 随着凸起高度的增大, 顶部张开角度越小, 能

图 17 Rayleigh 波斜入射下层状场地上凸起地形地表各观测点位移幅值时程

量在其顶部的集中更为明显, 凸起顶部水平幅值进一步放大, 但能量集中区域有所减小。

3) 层状场地中凸起地形 Rayleigh 波入射下的动力响应与均匀场地情况存在显著差别, 同时层状场地高阶模态(二阶以上模态)凸起水平位移幅值放大谱与第一阶模态存在本质的差异, 高阶模态呈现窄频放大, 峰值频率处凸起顶部附近位移幅值非常大,

且该峰值频率与相应模态的有效阻尼比峰值频率对应。

4) 对时域动力响应研究发现, 层状场地中凸起地形对 Rayleigh 波的放大作用大于均匀场地情况。另外由于层状场地中 Rayleigh 波的传播存在频散特性, 使得自由场波形较均匀场地情况复杂, 同时振动持时加长, 凸起顶点附近的振动尤为明显。

参考文献

- Spudich P, Hellweg M, Lee W H K. Directional topographic site response at Tarzana observed in aftershocks of the 1994 Northridge, California, Earthquake: Implications for mainshock motions. *Bull Seism Soc Am*, 1996, 86: S139–S208
- 唐晖, 李小军, 李亚琦. 自贡西山公园山脊地形场地效应分析. *振动与冲击*, 2012, 31: 74–79
- Yuan, X, Men F L. Scattering of plane SH waves by a semi-cylindrical hill. *Earthq Eng Struct Dyn*, 1992, 21: 1091–1098
- 袁晓铭, 廖振鹏. 任意圆弧形凸起地形对平面 SH 波的散射. *地震工程与工程振动*, 1996, 16: 1–13
- Lang J W, Zhang Y S, Lee V W. Scattering of plane P waves by a semi-cylindrical hill: Analytical solution. *Earthq Eng Eng Vib*, 2005, 14: 27–36
- 梁建文, 张彦帅, Lee V W. 平面 SV 波入射下半圆凸起地形地表运动解析解. *地震学报*, 2006, 28: 238–249
- Lee V W, Luo H, Liang J W. Antiplane (SH) waves diffraction by a semicircular cylindrical hill revisited: An improved analytic wave series solution. *J Eng Mech ASCE*, 2006, 132: 1106–1114
- Tsaur D H, Chang K H. Scattering and focusing of SH waves by a convex circular-arc topography. *Geophys J Int*, 2009, 177: 222–234
- Tsaur D H. Scattering and focusing of SH waves by a lower semi-elliptic convex topography. *Bull Seism Soc Am*, 2011, 101: 2212–2219
- Liang J W, Fu J. Surface motion of a semi-elliptical hill for incident plane SH waves. *Earthq Sci*, 2011, 24: 447–462
- Lee V W, Amornwongpaibun A. Scattering of anti-plane (SH) waves by a semi-elliptical hill: I-Shallow hill. *Soil Dyn Earthq Eng*, 2013, 52: 126–137
- Amornwongpaibun A, Lee V W. Scattering of anti-plane (SH) waves by a semi-elliptical hill: II-deep hill. *Soil Dyn Earthq Eng*, 52: 116–125, 2013
- Todorovska M I, Hayir A, Trifunac M D. Antiplane response of a dike on flexible embedded foundation to incident SH-waves. *Soil Dyn Earthq Eng*, 2001, 21: 593–601
- Boore D M. A note on the effect of simple topography on seismic SH waves. *Bull Seism Soc Am*, 1972, 62: 275–284
- 刘晶波. 局部不规则地形对地震地面运动的影响. *地震学报*, 1996, 18: 239–245
- Bard P Y. Diffracted waves and displacement field over two dimensional elevated topographies. *Geophys J Rastr Soc*, 1982, 71: 731–760
- 梁建文, 巴振宁. 弹性层状半空间中凸起地形对入射平面 SH 波的放大作用. *地震工程与工程振动*, 2008, 28: 1–10
- Sanchez-Sesma F J, Campillo M. Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by a topographic features: A boundary integral formulation. *Bull Seism Soc Am*, 1991, 81: 2234–2253
- 周红, 高孟潭, 俞言祥. SH 波地形效应特征的研究. *地球物理学进展*, 2010, 25: 775–782
- Chen J T, Lee J W, Wu C F, et al. SH-wave diffraction by a semi-circular hill revisited: A null-field boundary integral equation method using degenerate kernels. *Soil Dyn Earthq Eng*, 2011, 31: 729–736
- Chen J T, Lee J W, Shyu W S. SH-wave scattering by a semi-elliptical hill using a null-field boundary integral equation method and a hybrid method. *Geophys J Int*, 2012, 188: 177–194
- Sanchez-Sesma F J. Diffraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities. *Bull Seism Soc Am*, 1983, 73: 1621–1636
- Bouchon M, Schultz C A, Toksos M N. Effect of three-dimensional topography on seismic motion. *J Geophys Res*, 1996, 101: 5835–5846
- Sohrabi-Bidar A, Kamalian M, Toksos M N. Effects of three-dimensionality on seismic response of Gaussian-shaped hills for simple incident pulses. *Soil Dyn Earthq Eng*, 2013, 52: 1–12
- Pedersen H, Sanchez-Sesma F J, Campillo M. Three-dimensional scattering by two-dimensional topographies. *Bull Seism Soc Am*, 1994, 84: 1169–1183
- Takenaka H, Kennett B L N, Fujiwara H. Effect of 2-D topography on the 3-D seismic wave field using a 2.5-dimensional discrete wave number-boundary integral equation method. *Geophys J Int*, 1996, 124: 741–755
- Zhang B, Papageorgiou A S, Tassoulas J L. A hybrid numerical technique, combining the finite-element and boundary-element methods, for modeling the 3D response of 2D scatters. *Bull seism Soc Am*, 1998, 88: 1036–1350

- 28 Narayan J P, Prasad Rao P V. Two and half dimensional simulation of ridge effects on the ground motion characteristics. *Pure Appl Geophys*, 2003, 168: 1557-1571
- 29 梁建文, 巴振宁. 三维层状场地的精确动力刚度矩阵及格林函数. *地震工程与工程振动*, 2007, 27: 1-8
- 30 Wolf J P. *Dynamic Soil-Structure Interaction*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1985

附录

矩阵 $[A]$ 中的元素:

$$[A] = (A_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad j = 1, 2, \dots, 6.$$

$$A_{11} = \rho\omega^2 - (\lambda^* + \alpha^2 M)k_x^2 - \mu^* (2k_x^2 + k_y^2 + k_x^2 \cot^2 \theta);$$

$$A_{12} = -(\lambda^* + \alpha^2 M + \mu^*)k_x k_y;$$

$$A_{13} = (\lambda^* + \alpha^2 M + \mu^*)k_x^2 \cot \theta; \quad A_{14} = \rho_f \omega^2 - \alpha M k_x^2;$$

$$A_{15} = -\alpha M k_x k_y; \quad A_{16} = \alpha M k_x^2 \cot \theta;$$

$$A_{22} = \rho\omega^2 - (\lambda^* + \alpha^2 M)k_y^2 - \mu^* (k_x^2 + 2k_y^2 + k_x^2 \cot^2 \theta);$$

$$A_{23} = (\lambda^* + \alpha^2 M + \mu^*)k_x k_y \cot \theta;$$

$$A_{25} = \rho_f \omega^2 - \alpha M k_y^2; \quad A_{26} = \alpha M k_x k_y \cot \theta;$$

$$A_{33} = \rho\omega^2 - (\lambda^* + \alpha^2 M)k_x^2 \cot^2 \theta - \mu^* (k_x^2 + k_y^2 + 2k_x^2 \cot^2 \theta);$$

$$A_{36} = \rho_f \omega^2 - \alpha M k_x^2 \cot^2 \theta;$$

$$A_{41} = \rho_f \omega^2 - \alpha M k_x^2; \quad A_{42} = -\alpha M k_x k_y; \quad A_{43} = \alpha M k_x^2 \cot \theta;$$

$$A_{44} = m\omega^2 - M k_x^2 - i b \omega;$$

$$A_{45} = -M k_x k_y; \quad A_{46} = M k_x^2 \cot \theta;$$

$$A_{52} = \rho_f \omega^2 - \alpha M k_y^2; \quad A_{53} = \alpha M k_x k_y \cot \theta;$$

$$A_{55} = m\omega^2 - M k_y^2 - i b \omega; \quad A_{56} = M k_x k_y \cot \theta;$$

$$A_{63} = \rho_f \omega^2 - \alpha M k_x^2 \cot^2 \theta;$$

$$A_{66} = m\omega^2 - M k_x^2 \cot^2 \theta - i b \omega;$$

$$A_{21} = A_{12}; \quad A_{24} = A_{15}; \quad A_{31} = A_{13}; \quad A_{32} = A_{23}; \quad A_{34} = A_{16};$$

$$A_{35} = A_{26}; \quad A_{51} = A_{42}; \quad A_{54} = A_{45};$$

$$A_{54} = A_{45}; \quad A_{61} = A_{43}; \quad A_{62} = A_{53}; \quad A_{64} = A_{46}; \quad A_{65} = A_{56}.$$

Three dimensional responses of a hill in a layered half-space for obliquely incident Rayleigh waves

BA ZhenNing^{1,2} & LIANG JianWen^{1,2}

¹ Department of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China;

² Tianjin Key Laboratory of Civil Engineering Structure & New Materials, Tianjin 300072, China

An indirect boundary element method (IBEM) is presented to study the three dimensional responses of a hill in a layered half-space for obliquely incident Rayleigh waves. The presented IBEM yields very accurate results and is very convenient to deal with complex boundaries, for the Green's functions of moving distributed loads acting on inclined lines in a layered half-space are used as fundamental solutions to overcome the problem of singularity of the traditional IBEM, and the exact three dimensional dynamic stiffness of layered site is used to avoid discretization of the layer interfaces. The accuracy of the method is verified by comparing its results with published ones. Numerical calculations are performed both in the frequency and time domains by taking a hill in a homogenous and layered half-space as examples, and the effects of the obliquely incident angles, incident frequencies, cross section of the hill, height of the hill, and characteristics of the multi-modal and dispersion of Rayleigh waves propagating in a layered half-space are discussed in detail. Numerical results show that the amplification can be very different between the layered half-space and homogenous half-space for the multi-modal and dispersion characteristics of Rayleigh waves in a layered site. The amplification spectra of the higher modals (second and higher order modes) are very different from those of the first modal, which shows that the amplification spectra are narrowband, the displacement amplitudes near the top of the hill is extremely high at the peak frequencies and the peak frequencies are consistent with those of the effective damping ratio.

layered half-space, Rayleigh waves, hill, three dimensional responses, dynamic green's functions, dispersion, multi-modal

doi: 10.1360/N092014-00045