高维半线性耗散波动方程外问题解的整体存在性

林银河¹, 蒋红标¹, 尹思露^{2*}

1. 丽水学院数学系, 浙江 323000;

2. 上海大学数学系, 上海 200444

E-mail: scumatlyh@163.com, hbjiang@163.com, yinsl1@shu.edu.cn

收稿日期: 2016-11-09; 接受日期: 2017-09-13; 网络出版日期: 2017-11-16; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11501273)、浙江省一流学科 B 类 (批准号: 201601)、丽水市高层次人才 (批准号: 2016RC25) 和中国博士后科学基金 (批准号: 2017M611528) 资助项目

摘要 本文主要研究高维 ($n \geq 3$) 外区域上带 Dirichlet 边界条件的半线性耗散波动方程 $u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^p$ 初边值问题. 本文证明了, 当 $1 + \frac{2}{n} < p \leq \frac{n}{n-2}$ 时, 如果初始值充分小, 则该问题存在整体解. 证明的关键是以相应的线性问题解的衰减估计为基础建立合适的加权能量估计.

关键词 半线性波动方程 整体存在性 外问题 耗散

MSC (2010) 主题分类 35L05, 35L70

1 引言

本文研究如下半线性耗散波动方程的小初值外问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^p, & (t, x) \in (0, +\infty) \times \Omega, \\ u(0, x) = \varepsilon u_0(x), \quad u_t(0, x) = \varepsilon u_1(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $1 + \frac{2}{n} < p \leq \frac{n}{n-2}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) 为紧致光滑障碍之外的区域, 假设 $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ 且满足相容性边界条件.

首先介绍一些关于半线性耗散波动方程适定性理论的研究历史. 对其在 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 问题, Li 和 Zhou^[1] 得到了当 $1 < p \leq 1 + \frac{2}{n}$ 时低维 ($n = 1, 2$) 情形的有限时间破裂结果, 并建立了解的生命跨度上界估计. Nishihara^[2] 研究了三维情形并得到了当 $1 < p \leq \frac{5}{3}$ 时解的破裂结果及生命跨度上界估计. Lai 和 Zhou^[3] 建立了高维 ($n \geq 4$) 情形 Cauchy 问题解的生命跨度精确上界估计. Todorova 和 Yordanov^[4] 引入了 Cauchy 问题 (1.1) 的临界指标 $p_n^* = 1 + \frac{2}{n}$ ($n \geq 1$), 并证明了当 $p_n^* < p \leq n/[n-2]^+$ 时存在整体解; 而当 $1 < p < p_n^*$ 且初值满足 $\int_{\mathbb{R}^n} u_i(x) dx > 0$ ($i = 0, 1$) 时, 解在有限时间破裂. 有意思

英文引用格式: Lin Y H, Jiang H B, Yin S L. Global existence for damped semilinear wave equations outside obstacles in high dimensions (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 507–518, doi: 10.1360/N012016-00208

的是, $p_n^* = 1 + \frac{2}{n}$ 恰好也为半线性热传导方程的 Fujita 临界指标, 参见文献 [5]. 随后, Zhang [6] 证明了 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) 中带临界指标 $p = p_n^* = 1 + \frac{2}{n}$ 的半线性耗散波动方程小初值 Cauchy 问题解在有限时间破裂.

对于外区域上的半线性耗散波动方程小初值问题, 也有许多学者进行了相关研究, 如 Ikehata [7-9]、Nakao [10]、Racke [11, 12] 和 Shibata [13] 等. 其中, Ikehata [7] 证明了当 $p \geq 2.5$ 时二维初边值外问题解的整体存在性. 如果将其与二维 Cauchy 问题的临界指标 $p_2^* = 1 + \frac{2}{2} = 2$ 相比, 可以看出该结果还未达到最优. 后来, 在径向对称的假设下, Ikehata [14] 成功地将二维空间中半线性耗散波动方程初边值外问题解的整体存在性结果推广到 $2 < p < +\infty$. 不久以后, Ikehata [15] 去掉了径向对称的假设. 在相反方向, Ogawa 和 Takeda [16] 证明了当 $1 < p < p_n^* = 1 + \frac{2}{n}$ 时带 Dirichlet 边界条件的初边值问题的解会在有限时间内破裂, 并指出, 如果是带 Neumann 边界条件, 则破裂结果对 $1 < p \leq p_n^* = 1 + \frac{2}{n}$ 均成立. Nishihara 和 Zhao [17] 研究了半无界直线上的半线性耗散波动方程并得到了临界指标为 $p = 2$. 最近, Lai 和 Yin [18] 得到了当 $p = 1 + \frac{2}{n}$ 时带 Dirichlet 边界条件的高维 ($n \geq 3$) 外问题的有限时间破裂结果.

本文研究高维 ($n \geq 3$) 情形当 $p > 1 + \frac{2}{n}$ 时的初边值外问题 (1.1) 解的整体适定性. 目标是在初始值充分小的假设条件下, 证明问题 (1.1) 解的整体存在性. 证明的关键步骤是, 利用相应的线性问题解的能量估计建立半线性问题 (1.1) 的加权能量衰减估计. 关于线性耗散波动方程的能量衰减估计, Cauchy 问题情形是由 Matsumura [19] 得到的; 初边值外问题情形则是由 Ono [20] 得到的. 本文首先将采用文献 [21] 中的方法建立相应线性问题新的能量衰减估计, 该估计仅依赖于初始值的 L^2 范数; 然后用类似于文献 [15] 中的方法, 建立合适的加权能量的一致先验估计从而证明解的整体存在性. 该加权能量泛函最早是由 Todorova 和 Yordanov [4] 在研究 Cauchy 问题时引入的.

注 1.1 值得注意的是, 对于不带耗散项的半线性波动方程 $\square u = |u|^p$ 小初值问题也存在一个临界指标 $p_0(n)$, 其中 $p_0(n)$ 是二次方程 $(n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0$ 的正根 ($n \geq 2$). 这就是著名的 Strauss 猜想 [22]. 这方面次临界和超临界 Cauchy 问题的相关工作有文献 [23-29] 等; 临界 Cauchy 问题的相关工作参见文献 [30-32] 等; 关于外区域上的初边值问题可参见文献 [33-37] 等.

注 1.2 不等式 $p_n^* < p_0(n)$ 表明, 由于耗散项的存在, 半线性耗散波动方程小初值问题解整体存在的指标范围要比相同空间维数中半线性波动方程解整体存在的指标范围大; 另外, p_n^* 恰好等于 Fujita 指标又表明, 半线性耗散波动方程解的大时间行为表现得更像半线性热传导方程.

本文的主要结论是下面的定理:

定理 1.3 令 $1 + \frac{2}{n} < p \leq \frac{n}{n-2}$ ($n \geq 3$). 假设 $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 满足

$$\text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1 \subset \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R\} \cap \Omega,$$

其中 $R > 0$ 为常数, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的外区域且满足 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega \subset B_R$, B_R 是以原点为圆心、以 R 半径为的球. 那么存在正常数 ε_0 使得对任意 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, 初边值外问题 (1.1) 存在整体解

$$u \in C(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)).$$

注 1.4 初边值问题 (1.1) 的局部存在性可参见文献 [20, 性质 4.1] (文献 [20, 命题 4.1]).

2 先验估计

本节首先讨论线性问题解的能量衰减估计, 然后引入问题 (1.1) 的加权的能量泛函并建立先验

估计.

引理 2.1 假设 $u_L(t, x)$ 为如下初边值问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = 0, & (t, x) \in (0, +\infty) \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 Ω 和 $\{u_0, u_1\}$ 如定理 1.3 中所述. 如果 $n \geq 3$, 则有

$$\begin{aligned} \|Du_L(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \overline{C}(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{4}}(\|u_0\|_{H^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|_{L^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L^1(\Omega)}) \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{4}}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

且

$$\|Du_L(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}}(\|u_0\|_{H^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L^2(\Omega)}), \quad (2.3)$$

其中 $D = (\nabla_x, \partial_t)$.

证明 不等式 (2.2) 的证明可以参见文献 [20] 中推论 1.2 的 (1.6). 下面用类似于文献 [21] 中的方法证明 (2.3).

定义线性初边值外问题 (2.1) 的能量泛函为

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_{Lt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_L\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

将方程 (2.1) 与 u_{Lt} 做内积, 得

$$\frac{1}{2}\|u_{Lt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} u_{Lt}^2 dx d\tau = E(0). \quad (2.4)$$

类似地, 在方程 (2.1) 两端乘 u_L , 可得

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_L u_{Lt} dx + \|\nabla u_L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_L\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|u_{Lt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} u_L u_{Ltt} dx - \int_{\Omega} u_L \Delta u_L dx + \int_{\Omega} u_L u_{Lt} dx \\ &= \|u_{Lt}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

根据 (2.4), 则有

$$E'(t) = -\|u_{Lt}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.6)$$

因此, 对 (2.5) 关于时间在 $[0, t]$ 上积分, 可以得到

$$\begin{aligned} &\int_0^t \|\nabla u_L\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \frac{1}{2} \|u_L\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} u_L u_{Lt} dx + \int_{\Omega} u_0 u_1 dx + \int_0^t \|u_{L\tau}\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} u_0 u_1 dx + 4\|u_{Lt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_L\|_{L^2(\Omega)}^2 + E(0) - E(t) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} u_0 u_1 dx + 4 \|u_{Lt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_L\|_{L^2(\Omega)}^2 + E(0), \quad (2.7)$$

这里用到 Cauchy 不等式和能量估计式 (2.6). 又因为从 (2.4) 可以得到 $\|u_{Lt}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2E(0)$, 所以,

$$\int_0^t \|\nabla u_L\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \frac{1}{4} \|u_L\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} u_0 u_1 dx + 9E(0). \quad (2.8)$$

又因为

$$\frac{d}{dt}((1+t)E(t)) = E(t) + (1+t)E'(t) \leq E(t), \quad (2.9)$$

结合 (2.4) 和 (2.8), 对上式关于时间在 $[0, t]$ 上积分, 所以可以得到

$$\begin{aligned} (1+t)E(t) &\leq E(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \|u_{L\tau}\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla u_L\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \\ &\leq E(0) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} u_0 u_1 dx + 3E(0) \right) + \frac{1}{2} E(0), \end{aligned} \quad (2.10)$$

即成立

$$E(t) \leq \frac{C}{1+t} E(0), \quad (2.11)$$

所以估计式 (2.3) 得到证明. $\square$

用记号 $S(t)g$ ($g \in L^2(\Omega)$) 表示下述线性问题:

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v + v_t = 0, & (t, x) \in (0, +\infty) \times \Omega, \\ v(0, x) = 0, \quad v_t(0, x) = g(x), & x \in \Omega, \\ v|_{\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega} = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

的唯一解, 那么引理 2.1 中的估计式 (2.2) 即为

$$\|DS(t)g\|_{L^2(\Omega)} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{4}} (\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\Omega)}), \quad (2.13)$$

估计式 (2.3) 即为

$$\|DS(t)g\|_{L^2(\Omega)} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.14)$$

下面我们将建立初边值问题 (1.1) 的加权能量估计. 首先介绍如下一个辅助函数 ϕ (该函数曾用于文献 [4, 15] 中):

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2}(t + R - \sqrt{(t + R)^2 - |x|^2}), \quad (2.15)$$

其中

$$x \in \text{supp } u(t, x) \cap \Omega = \{x : |x| < t + R\} \cap \Omega.$$

通过直接计算可以得到如下性质:

$$\phi \geq \frac{|x|^2}{4(t + R)}, \quad (2.16)$$

$$\phi_t = \phi_t^2 - |\nabla \phi|^2, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{n}{2}((t+R)^2 - |x|^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{|x|^2}{2}((t+R)^2 - |x|^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &\geq \frac{n}{2}(t+R)^{-1} \\ &> 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

引理 2.2 设 $u(t, x)$ 为初边值问题 (1.1) 在 $[0, T)$ 上的解, $\phi(t, x)$ 如上述定义, 则有

$$(1+t)^{\frac{n}{4}+\frac{1}{2}} \|Du\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon + C \left(\max_{[0,t]} (1+\tau)^\beta \|e^{\delta\phi(\tau, \cdot)} u(\tau, \cdot)\|_{L^{2p}(\Omega)} \right)^p, \quad (2.19)$$

其中

$$\beta > \frac{n}{4p} + \frac{1}{p}, \quad \delta > 0.$$

在本文中, C 统一记为依赖于初值但不依赖于 ε 的常数, 但是在每处的取值可能不同.

证明 非线性问题 (1.1) 的解 $u(t) = u(t, \cdot)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} u(t) &= S(t)(u_0 + u_1) + \partial_t(S(t)u_0) + \int_0^t S(t-\tau)|u(\tau)|^p d\tau \\ &= \varepsilon u_L(t) + \int_0^t S(t-\tau)|u(\tau)|^p d\tau, \end{aligned} \quad (2.20)$$

其中 $u_L(t)$ 为线性问题 (2.1) 的解. 根据引理 2.1 中的估计式 (2.2), 有

$$\begin{aligned} \|Du(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\varepsilon \|Du_L(t)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|DS(t-\tau)|u(\tau)|^p\|_{L^2(\Omega)} d\tau \\ &\leq C\varepsilon(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{4}} + \int_0^t \|DS(t-\tau)|u(\tau)|^p\|_{L^2(\Omega)} d\tau. \end{aligned} \quad (2.21)$$

由上式可知仅需要估计非线性项. 将积分区域 $[0, t]$ 划分为两部分讨论: $[0, \frac{t}{2}]$ 和 $[\frac{t}{2}, t]$.

当 $\tau \in [0, \frac{t}{2}]$ 时, 由 (2.13) 有

$$\|DS(t-\tau)|u(\tau)|^p\|_{L^2(\Omega)} \leq C(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} (\|u(\tau)\|_{L^p(\Omega)}^p + \|u(\tau)\|_{L^{2p}(\Omega)}^p). \quad (2.22)$$

利用 Cauchy 不等式可以得到

$$\begin{aligned} \|u(\tau)\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_{B_{\tau+R} \cap \Omega} |u(\tau, x)|^p dx \\ &\leq \left(\int_{B_{\tau+R} \cap \Omega} e^{-2p\delta\phi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_{\tau+R} \cap \Omega} e^{2p\delta\phi} |u(\tau, x)|^{2p} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{p\delta|x|^2}{2(\tau+R)}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_{\tau+R} \cap \Omega} e^{2p\delta\phi} |u(\tau, x)|^{2p} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(1+\tau)^{\frac{n}{4}} \|e^{\delta\phi} u(\tau)\|_{L^{2p}(\Omega)}^p, \end{aligned} \quad (2.23)$$

其中 $\delta > 0$, ϕ 如 (2.15) 所定义.

因为在 $x \in B_{\tau+R} \cap \Omega$ 中, $\phi(\tau, x) > 0$, 所以,

$$\|u(\tau)\|_{L^{2p}(\Omega)}^p \leq C(1+\tau)^{\frac{n}{4}} \|e^{\delta\phi} u(\tau)\|_{L^{2p}(\Omega)}^p. \quad (2.24)$$

将 (2.23) 和 (2.24) 代入 (2.22) 中, 成立

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{t}{2}} \|DS(t-\tau)|u(\tau)|^p\|_{L^2(\Omega)} d\tau \\
& \leq C \int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} [(1+\tau)^{\frac{n}{4p}} \|e^{\delta\phi} u(\tau)\|_{L^{2p}(\Omega)}]^p d\tau \\
& \leq C \int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} (1+\tau)^{-1-p\varepsilon_1} [(1+\tau)^{\frac{n}{4p}+\frac{1}{p}+\varepsilon_1} \|e^{\delta\phi} u(\tau)\|_{L^{2p}(\Omega)}]^p d\tau \\
& \leq C \left(\max_{[0,t]} (1+\tau)^\beta \|e^{\delta\phi} u(\tau)\|_{L^{2p}(\Omega)} \right)^p \int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} (1+\tau)^{-1-p\varepsilon_1} d\tau \\
& \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \left(\max_{[0,t]} (1+\tau)^\beta \|e^{\delta\phi} u(\tau)\|_{L^{2p}(\Omega)} \right)^p, \tag{2.25}
\end{aligned}$$

其中 $\beta = \frac{n}{4p} + \frac{1}{p} + \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$ 为任意数.

当 $\tau \in [\frac{t}{2}, t]$ 时, 利用 (2.14) 可以得到

$$\|DS(t-\tau)|u(\tau)|^p\|_{L^2(\Omega)} \leq C(1+t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \|u(\tau)\|_{L^{2p}(\Omega)}^p. \tag{2.26}$$

又因为当 $\tau \in [\frac{t}{2}, t]$ 时,

$$\|u(\tau)\|_{L^{2p}(\Omega)}^p \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-1} \left(\max_{[\frac{t}{2}, t]} (1+\tau)^{\frac{n}{4p}+\frac{1}{p}} \|u(\tau)\|_{L^{2p}(\Omega)} \right)^p, \tag{2.27}$$

所以, 对任意的 $\varepsilon_1, \delta > 0$, 成立

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{t}{2}}^t \|DS(t-\tau)|u(\tau)|^p\|_{L^2(\Omega)} d\tau \\
& \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-1} \int_{\frac{t}{2}}^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \left(\max_{[\frac{t}{2}, t]} (1+\tau)^{\frac{n}{4p}+\frac{1}{p}} \|u(\tau)\|_{L^{2p}(\Omega)} \right)^p d\tau \\
& \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \left(\max_{[\frac{t}{2}, t]} (1+\tau)^{\frac{n}{4p}+\frac{1}{p}+\varepsilon_1} \|e^{\delta\phi} u(\tau)\|_{L^{2p}(\Omega)} \right)^p, \tag{2.28}
\end{aligned}$$

最后一个不等式成立是因为

$$\int_{\frac{t}{2}}^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \leq C(1+t)^{\frac{1}{2}}.$$

因此, 由 (2.21)、(2.25) 和 (2.28), 便可以得到估计式 (2.19). 引理 2.2 的证明完毕. $\square$

引理 2.3 设 $u(t, x)$ 为初边值问题 (1.1) 在 $[0, T]$ 上的解, $\phi(t, x)$ 如 (2.15) 定义, 则有

$$\|e^{\phi(t, \cdot)} Du(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon + C \left(\max_{[0,t]} (1+\tau)^\delta \|e^{\gamma\phi(\tau, \cdot)} u(\tau, \cdot)\|_{L^{p+1}(\Omega)} \right)^{\frac{p+1}{2}}, \tag{2.29}$$

其中 $\delta > 0$, $\gamma > \frac{2}{p+1}$.

证明 该引理的证明可以参见文献 [4]. 为了读者阅读方便, 本文重述证明过程. 在方程 (1.1) 两端乘以乘子 $e^{2\phi} u_t$, 可得

$$e^{2\phi} u_t (\partial_t^2 u - \Delta u + u_t) = e^{2\phi} u_t |u|^p. \tag{2.30}$$

利用 (2.17), 上式左端可直接计算为

$$e^{2\phi} u_t (\partial_t^2 u - \Delta u + u_t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{2\phi}}{2} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) \right) - \nabla \cdot (e^{2\phi} u_t \nabla u) - \frac{e^{2\phi}}{\phi_t} (\phi_t \nabla u - u_t \nabla \phi)^2. \quad (2.31)$$

而 (2.30) 的右端可变形为

$$e^{2\phi} u_t |u|^p = \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{2\phi}}{p+1} |u|^p u \right) - \frac{2\phi_t}{p+1} e^{2\phi} |u|^p u. \quad (2.32)$$

于是,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{2\phi}}{2} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) - \frac{e^{2\phi}}{p+1} |u|^p u \right) - \nabla \cdot (e^{2\phi} u_t \nabla u) - \frac{e^{2\phi}}{\phi_t} (\phi_t \nabla u - u_t \nabla \phi)^2 \\ &= -\frac{2\phi_t}{p+1} e^{2\phi} |u|^p u. \end{aligned} \quad (2.33)$$

因为

$$\phi_t = \frac{\sqrt{(t+R)^2 - |x|^2} - (t+R)}{2\sqrt{(t+R)^2 - |x|^2}} < 0,$$

将 (2.33) 在 $[0, t] \times \Omega$ 上积分, 利用 u 的边界条件可得

$$\begin{aligned} \|e^\phi Du\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C\varepsilon + C\|e^{\frac{2\phi}{p+1}} u\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} + C \int_0^t \int_\Omega |\phi_\tau| e^{2\phi} |u|^p u dx d\tau \\ &\leq C\varepsilon + C\|e^{\frac{2\phi}{p+1}} u\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} + \int_0^t |\phi_\tau| e^{[2-\gamma(p+1)]\phi} \|e^{\gamma\phi} u\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} d\tau \\ &\leq C\varepsilon + C\|e^{\frac{2\phi}{p+1}} u\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} + \int_0^t \left(\max_{\text{supp } u(\tau, \cdot)} \varphi(\tau, x) \right) \|e^{\gamma\phi} u\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} d\tau, \end{aligned} \quad (2.34)$$

其中

$$\varphi(\tau, x) = |\phi_\tau(\tau, x)| e^{[2-\gamma(p+1)]\phi(\tau, x)}, \quad (2.35)$$

且 $\gamma > \frac{2}{p+1}$.

下面证明

$$\max_{\text{supp } u(\tau, \cdot)} \varphi(\tau, x) \leq \frac{C}{1+\tau}, \quad \forall \gamma > \frac{2}{p+1}. \quad (2.36)$$

易知当 $x \in \{x : |x| \leq \frac{\tau+R}{2}\} \cap \Omega$ 时,

$$\begin{aligned} |\phi_\tau(\tau, x)| &= \left| \frac{\sqrt{(\tau+R)^2 - |x|^2} - (\tau+R)}{2\sqrt{(\tau+R)^2 - |x|^2}} \right| \\ &\leq \frac{C|x|^2}{(\tau+R)\sqrt{(\tau+R)^2 - |x|^2}}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

于是,

$$|\phi_\tau(\tau, x)| \leq \frac{C|x|^2}{(\tau+R)^2}. \quad (2.38)$$

结合 (2.16) 可得

$$\varphi(\tau, x) \leq \frac{C}{\tau + R} \cdot \frac{|x|^2}{4(\tau + R)} e^{(2-\gamma(p+1)) \cdot \frac{|x|^2}{4(\tau+R)}} \leq \frac{C}{1+\tau}, \quad (2.39)$$

这里用到了当 $\gamma > \frac{2}{p+1}$ 时 $\sup_{r \geq 0} r e^{(2-\gamma(p+1))r} < C$ 成立.

当 $x \in \{x : |x| > \frac{\tau+R}{2}\} \cap \Omega$ 时, 有 $\phi(\tau, x) \geq \frac{\tau+R}{16}$, 且

$$\begin{aligned} |\phi_\tau(\tau, x)| &= \frac{1}{2} \frac{|x|^2}{(\sqrt{(\tau+R)^2 - |x|^2} + \tau + R) \sqrt{(\tau+R)^2 - |x|^2}} \\ &\leq \frac{C(\tau+R)}{d}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

其中 $d > 0$ 为区域 $\text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1$ 与 $\Omega \setminus B_R$ 之间的距离. 所以,

$$\varphi(\tau, x) \leq \frac{C}{\tau + R} \cdot (\tau + R)^2 e^{(2-\gamma(p+1)) \frac{\tau+R}{16}} \leq \frac{C}{1+\tau}, \quad (2.41)$$

同理用到了当 $\gamma > \frac{2}{p+1}$ 时 $\sup_{r \geq 0} r^2 e^{(2-\gamma(p+1))r} < C$ 成立.

由 (2.39) 和 (2.41) 便可得到 (2.36). 因此, 引理 2.3 中的估计式 (2.29) 可以直接由 (2.36) 和 (2.34) 得到. $\square$

引理 2.4 设 $u \in H_0^1(\Omega)$ 且 $\text{supp } u \in B_{t+R} \cap \Omega$, $t \geq 0$, 则对任意的 $\sigma > 0$, 成立

$$\frac{\sigma n}{2} (t+R)^{-1} \|e^{\sigma\phi(t, \cdot)} u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(e^{\sigma\phi(t, \cdot)} u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|e^{\sigma\phi(t, \cdot)} \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.42)$$

其中 ϕ 为 (2.15) 所定义.

引理 2.4 的证明与 Ikehata 关于二维外问题的工作 [15] 中引理 2.4 的证明是完全平行的, 因此这里省去详细的证明过程. 读者也可以在文献 [4] 中找到相应的 Cauchy 问题中类似的引理.

引理 2.5 令 $2 \leq q \leq \infty$, $\theta(q) = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ 且 $0 \leq \theta(q) \leq 1$. 假设 $0 < \sigma \leq 1$, $u \in H_0^1(\Omega)$ 且 $\text{supp } u \subset B_{t+R} \cap \Omega$, $t \geq 0$, 那么,

$$\|e^{\sigma\phi(t, \cdot)} u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(1+t)^{\frac{1-\theta(q)}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{1-\sigma} \|e^{\phi(t, \cdot)} \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^\sigma, \quad (2.43)$$

其中 ϕ 为 (2.15) 所定义.

证明 在引理 2.4 的基础上, 如果利用外区域 Ω 上的 Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Hölder 不等式, 则引理 2.5 的证明可以类似于文献 [4, 命题 2.4] 的证明. 在此给出简要的证明过程.

令 $f = e^{\sigma\phi} u$, 利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式可得

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^{1-\theta(q)} \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}^{\theta(q)}, \quad (2.44)$$

其中

$$\theta(q) = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \in [0, 1].$$

由引理 2.4 易得

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|e^{\sigma\phi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|f\|_{L^2(\Omega)} &\leq C(t+R)^{\frac{1}{2}} \|e^{\sigma\phi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

再结合 (2.44) 和 (2.45), 则有

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C(t+R)^{\frac{1-\theta(q)}{2}} \|e^{\sigma\phi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.46)$$

当 $0 < \sigma < 1$ 时, 由 Hölder 不等式便可以得到

$$\begin{aligned} \|e^{\sigma\phi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} e^{2\sigma\phi} |\nabla u|^{2\sigma} |\nabla u|^{2(1-\sigma)} dx \\ &\leq \|e^{2\sigma\phi} |\nabla u|^{2\sigma}\|_{L^{\frac{1}{\sigma}}(\Omega)} \| |\nabla u|^{2(1-\sigma)} \|_{L^{\frac{1}{1-\sigma}}(\Omega)} \\ &= \|e^{\phi} |\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}^{2\sigma} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{2(1-\sigma)}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

根据 (2.46) 和 (2.47) 可知估计式 (2.43) 成立. $\square$

3 主要定理的证明

本节证明主要定理 1.3. 定义加权的能量泛函

$$W(t) \triangleq \|e^{\phi(t,\cdot)} Du\|_{L^2(\Omega)} + (1+t)^{\frac{n}{4}+\frac{1}{2}} \|Du\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.1)$$

目标是建立 $W(t)$ 的一致的先验估计:

$$W(t) \leq C\varepsilon. \quad (3.2)$$

根据引理 2.2 中的估计式 (2.19) 和引理 2.3 中的估计式 (2.29), 可以得到

$$\begin{aligned} W(t) &\leq C\varepsilon + C \left(\max_{[0,t]} (1+\tau)^{\beta} \|e^{\delta\phi(\tau,\cdot)} u(\tau,\cdot)\|_{L^{2p}(\Omega)} \right)^p \\ &\quad + C \left(\max_{[0,t]} (1+\tau)^{\delta} \|e^{\gamma\phi(\tau,\cdot)} u(\tau,\cdot)\|_{L^{p+1}(\Omega)} \right)^{\frac{p+1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

再利用引理 2.5, 则成立

$$\begin{aligned} \|e^{\delta\phi(\tau,\cdot)} u(\tau,\cdot)\|_{L^{2p}(\Omega)} &\leq C(1+\tau)^{\frac{1-\theta(2p)}{2}} \|\nabla u(\tau,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^{1-\delta} \|e^{\phi(\tau,\cdot)} \nabla u(\tau,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^{\delta} \\ &= C(1+\tau)^{\frac{1-\theta(2p)}{2} - (\frac{1}{2}+\frac{n}{4})(1-\delta)} ((1+\tau)^{\frac{1}{2}+\frac{n}{4}} \|\nabla u(\tau,\cdot)\|_{L^2(\Omega)})^{1-\delta} \|e^{\phi(\tau,\cdot)} \nabla u(\tau,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^{\delta} \\ &\leq C(1+\tau)^{\frac{1-\theta(2p)}{2} - (\frac{1}{2}+\frac{n}{4})(1-\delta)} W(\tau) \end{aligned} \quad (3.4)$$

和

$$\begin{aligned} \|e^{\gamma\phi(\tau,\cdot)} u\|_{L^{p+1}(\Omega)} &\leq C(1+\tau)^{\frac{1-\theta(p+1)}{2}} \|\nabla u(\tau,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^{1-\gamma} \|e^{\phi(\tau,\cdot)} \nabla u(\tau,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^{\gamma} \\ &= C(1+\tau)^{\frac{1-\theta(p+1)}{2} - (\frac{n}{4}+\frac{1}{2})(1-\gamma)} ((1+\tau)^{\frac{n}{4}+\frac{1}{2}} \|\nabla u(\tau,\cdot)\|_{L^2(\Omega)})^{1-\gamma} \|e^{\phi(\tau,\cdot)} \nabla u(\tau,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^{\gamma} \\ &\leq C(1+\tau)^{\frac{1-\theta(p+1)}{2} - (\frac{n}{4}+\frac{1}{2})(1-\gamma)} W(\tau). \end{aligned} \quad (3.5)$$

将 (3.4) 和 (3.5) 代入 (3.3) 中, 则有

$$W(t) \leq C\varepsilon + C \max_{[0,t]} (1+\tau)^{p\beta+\frac{p}{2}(1-\theta(2p))-p(\frac{1}{2}+\frac{n}{4})(1-\delta)} (W(\tau))^p$$

$$+ C \max_{[0,t]} (1 + \tau)^{\frac{p+1}{2}\delta + \frac{(p+1)(1-\theta(p+1))}{4} - \frac{p+1}{2}(\frac{n}{4} + \frac{1}{2})(1-\gamma)} (W(\tau))^{\frac{p+1}{2}}. \quad (3.6)$$

令

$$\begin{aligned} M &\triangleq p\beta + \frac{p}{2}(1 - \theta(2p)) - p\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{4}\right)(1 - \delta), \\ N &\triangleq \frac{p+1}{2}\delta + \frac{(p+1)(1 - \theta(p+1))}{4} - \frac{p+1}{2}\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)(1 - \gamma). \end{aligned} \quad (3.7)$$

因为 $\beta > \frac{n}{4p} + \frac{1}{p}$ 且 $\gamma > \frac{2}{p+1}$, 不妨设

$$\beta = \frac{n}{4p} + \frac{1}{p} + \varepsilon_1, \quad \gamma = \frac{2}{p+1} + \varepsilon_2, \quad (3.8)$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. 于是, 由 (3.7) 和 (3.8) 可得

$$\begin{aligned} M &= p\beta + \frac{p}{2}(1 - \theta(2p)) - p\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{4}\right)(1 - \delta) \\ &= -\frac{n}{2}\left(p - 1 - \frac{2}{n}\right) + p\left[\varepsilon_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{4}\right)\delta\right], \\ N &= \frac{p+1}{2}\delta + \frac{(p+1)(1 - \theta(p+1))}{4} - \frac{p+1}{2}\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)(1 - \gamma) \\ &= -\frac{n}{4}\left(p - 1 - \frac{2}{n}\right) + (p+1)\left[\frac{\delta}{2} + \left(\frac{n}{8} + \frac{1}{4}\right)\varepsilon_2\right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

显然, 当 $p > 1 + \frac{2}{n}$ 时, 可以选择足够小的 δ, ε_1 和 ε_2 使得 $M < 0$ 且 $N < 0$. 这样, 由 (3.6) 便可得到

$$\max_{[0,t]} W(t) \leq C\varepsilon + C\left(\max_{[0,t]} W(\tau)\right)^p + C\left(\max_{[0,t]} W(\tau)\right)^{\frac{p+1}{2}}. \quad (3.10)$$

令 $\widetilde{W}(t) = \max_{[0,t]} W(t)$, 如果 $\varepsilon > 0$ 足够小, 则由 (3.10) 可得 $\widetilde{W}(t) \leq C\varepsilon$, 因此,

$$W(t) \triangleq \|e^{\phi(t, \cdot)} Du\|_{L^2(\Omega)} + (1+t)^{\frac{n}{4} + \frac{1}{2}} \|Du\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon, \quad (3.11)$$

从而由连续归纳法可以得到小解的整体存在性. 定理 1.3 的证明得以完成.

致谢 作者感谢两位审稿人的仔细审阅及提出的具体修改意见.

参考文献

- 1 Li T T, Zhou Y. Breakdown of solutions to $\square u + u_t = u^{1+\alpha}$. Discrete Contin Dyn Syst, 1995, 1: 503–520
- 2 Nishihara K. L^p - L^q estimates for the 3-D damped wave equation and their application to the semilinear problem. Seminar Notes Math Sci, 2003, 6: 69–83
- 3 Lai N, Zhou Y. The sharp lifespan estimate for semilinear damped wave equation with Fujita critical power in high dimensions. ArXiv:1702.07073, 2017
- 4 Todorova G, Yordanov B. Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping. J Differential Equations, 2001, 174: 464–489
- 5 Fujita H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + |u|^{1+\alpha}$. J Fac Sci Univ Tokyo, 1966, 16: 105–113
- 6 Zhang Q S. A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping: The critical case. C R Acad Sci Ser I Math, 2001, 333: 109–114
- 7 Ikehata R. Energy decay of solutions for the semilinear dissipative wave equations in an exterior domain. Funkcial Ekvac, 2001, 44: 487–499

- 8 Ikehata R. Small data global existence of solutions for dissipative wave equations in an exterior domain. *Funkcial Ekvac*, 2002, 45: 259–269
- 9 Ikehata R. New decay estimates for linear damped wave equations and its application to nonlinear problem. *Math Methods Appl Sci*, 2004, 27: 865–889
- 10 Nakao M. Energy decay for the linear and semilinear wave equations in exterior domains with some localized dissipations. *Math Z*, 2001, 238: 781–797
- 11 Racke R. Decay rates for solutions of damped systems and generalized Fourier transforms. *J Reine Angew Math*, 1990, 412: 1–19
- 12 Racke R. Non-homogeneous non-linear damped wave equations in unbounded domains. *Math Methods Appl Sci*, 1990, 13: 481–491
- 13 Shibata Y. On the global existence of classical solutions of second order fully hyperbolic equations with first order dissipation in the exterior domain. *Tsukuba J Math*, 1983, 7: 1–68
- 14 Ikehata R. Global existence of solutions for semilinear damped wave equation in 2-D exterior domain. *J Differential Equations*, 2004, 200: 53–68
- 15 Ikehata R. Two dimensional exterior mixed problem for semilinear damped wave equations. *J Math Anal Appl*, 2005, 301: 366–377
- 16 Ogawa T, Takeda H. Non-existence of weak solutions to nonlinear damped wave equations in exterior domains. *Nonlinear Anal*, 2009, 70: 3696–3701
- 17 Nishihara K, Zhao H. Existence and nonexistence of time-global solutions to damped wave equation on half-line. *Nonlinear Anal*, 2005, 61: 931–960
- 18 Lai N, Yin S. Finite time blow-up for a kind of initial-boundary value problem of semilinear damped wave equation. *Math Methods Appl Sci*, 2017, 40: 1223–1230
- 19 Matsumura A. On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equations. *Publ Res Inst Math Sci*, 1976, 12: 169–189
- 20 Ono K. Decay estimates for dissipative wave equations in exterior domains. *J Math Anal Appl*, 2003, 286: 540–562
- 21 Ikehata R, Matsuyama T. L^2 -behavior of solutions to the linear heat and wave equations in exterior domains. *Sci Math Jpn*, 2002, 55: 33–42
- 22 Strauss W A. Nonlinear scattering theory at low energy. *J Funct Anal*, 1981, 41: 110–133
- 23 John F. Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions. *Manuscripta Math*, 1979, 28: 235–268
- 24 Glassey R T. Existence in the large for $\square u = F(u)$ in two space dimensions. *Math Z*, 1981, 178: 233–261
- 25 Sideris T C. Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions. *J Differential Equations*, 1984, 52: 378–406
- 26 Zhou Y. Cauchy problem for semilinear wave equations in four space dimensions with small initial data. *J Partial Differential Equations*, 1995, 8: 135–144
- 27 Georgiev V, Lindblad H, Sogge C D. Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations. *Amer J Math*, 1997, 119: 1291–1319
- 28 Tataru D. Strichartz estimates in the hyperbolic space and global existence for the semilinear wave equation. *Trans Amer Math Soc*, 2001, 353: 795–807
- 29 Lai N A, Zhou Y. Nonexistence of global solutions to critical semilinear wave equations in exterior domain in high dimensions. *Nonlinear Anal*, 2016, 143: 89–104
- 30 Yordanov B T, Zhang Q S. Finite time blow up for critical wave equations in high dimensions. *J Funct Anal*, 2006, 231: 361–374
- 31 Zhou Y. Blow up of solutions to semilinear wave equations with critical exponent in high dimensions. *Chin Ann Math Ser B*, 2007, 28: 205–212
- 32 Takamura H, Wakasa K. The sharp upper bound of the lifespan of solutions to critical semilinear wave equations in high dimensions. *J Differential Equations*, 2011, 251: 1157–1171
- 33 Smith H F, Sogge C D, Wang C. Strichartz estimates for Dirichlet-wave equations in two dimensions with applications. *Trans Amer Math Soc*, 2012, 364: 3329–3347
- 34 Wang C, Yu X. Recent works on the Strauss conjecture. In: *Recent Advances in Harmonic Analysis and Partial Differential Equations*. Contemporary Mathematics, vol. 581. Providence: Amer Math Soc, 2012, 235–256
- 35 王成波. Strauss 猜测相关问题与进展. *中国科学: 数学*, 2018, 48: 111–130
- 36 Lai N A, Zhou Y. An elementary proof of Strauss conjecture. *J Funct Anal*, 2014, 267: 1364–1381
- 37 Lai N A, Zhou Y. Finite time blow up to critical semilinear wave equation outside the ball in 3-D. *Nonlinear Anal*, 2015, 125: 550–560

Global existence for damped semilinear wave equations outside obstacles in high dimensions

Yinhe Lin, Hongbiao Jiang & Silu Yin

Abstract In this work we focus on initial-boundary value problem of damped semilinear wave equation $u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^p$ outside compact obstacles in high dimensions ($n \geq 3$). We show that the solutions exist globally in time with power $1 + \frac{2}{n} < p \leq \frac{n}{n-2}$, assuming that the initial data are small enough. The proof relies on a prior estimate of a weighted energy functional, established based on the decay estimates for linear damped wave equations.

Keywords semilinear wave equation, global existence, exterior domain, dissipation

MSC(2010) 35L05, 35L70

doi: 10.1360/N012016-00208